数学演習（２次関数）Ｈ２３．６．１７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．次の２次関数のグラフをかけ。また，その軸と頂点をいえ。

(1)　$y=\frac{1}{2}x^2+2x$　　(2)　$y=(2x+1)(x-2)$

２．次の条件を満たす２次関数を求めよ。

(1)　$x=1$ のとき最小値 -2 をとり，$x=-1$ のとき $y=6$

(2)　$x=-2$ のとき最大値 6 をとり，$x=1$ のとき $y=-3$

３．次の条件を満たす放物線をグラフにもつ２次関数を求めよ。

(1)　頂点が点 $(1,\ 2)$ で，点 $(0,\ 4)$ を通る。

(2)　直線 $x=-3$ を軸とし，２点 $(-2,\ 0)$，$(1,\ -15)$ を通る。

４．グラフが次の３点を通る２次関数を求めよ。

(1)　$(-1,\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(1,\ 6)$　　(2)　$(-1,\ -6)$，$(1,\ 0)$，$(2,\ 6)$

(3)　$(1,\ -1)$，$(2,\ 6)$，$(-3,\ -9)$　　(4)　$(-2,\ -9)$，$(2,\ 7)$，$(4,\ -9)$

5．グラフが次の条件を満たすような2次関数を求めよ。

(1)　放物線 $y=x^2-3x+2$ を平行移動したもので，2点 $(1,\ 2)$，$(2,\ 3)$ を通る。

(2)　放物線 $y=2x^2+3x+1$ を平行移動したもので，軸が直線 $x=-1$，y 軸と点 $(0,\ 7)$ で交わる。

6．x の2次関数 $y=x^2+2mx+3m$ の最小値を k とする。

(1)　この関数の最小値 k を m の式で表せ。

(2)　この関数の最小値 k が -4 であるとき，m の値を求めよ。

(3)　k の値を最大にする m の値と，k の最大値を求めよ。

7．a を定数とする。関数 $y=-x^2+2ax-a$ $(-2\leqq x\leqq 0)$ の最小値を次の各場合について，それぞれ求めよ。

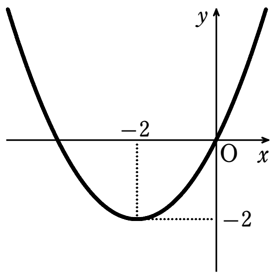
(1)　$a<-1$　　(2)　$a=-1$　　(3)　$a>-1$

1．次の 2 次関数のグラフをかけ。また，その軸と頂点をいえ。

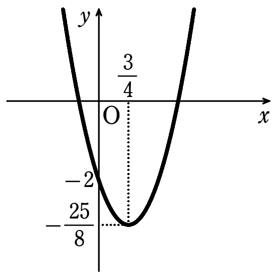
(1)　$y=\frac{1}{2}x^2+2x$　　　　(2)　$y=(2x+1)(x-2)$

解答　(1)　[図]，直線 $x=-2$，点 $(-2,\ -2)$　(2)　[図]，直線 $x=\frac{3}{4}$，点 $\left(\frac{3}{4},\ -\frac{25}{8}\right)$

(1)



(2)



解説

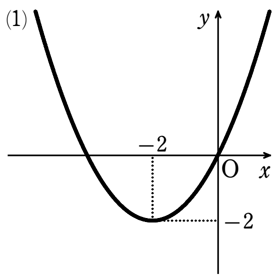
(1)　$y=\frac{1}{2}x^2+2x=\frac{1}{2}(x^2+4x)$

$=\frac{1}{2}(x^2+2\cdot2x+2^2)-\frac{1}{2}\cdot2^2$

$=\frac{1}{2}(x+2)^2-2$

グラフは [図]，軸は直線 $x=-2$，頂点は点 $(-2,\ -2)$

(1)



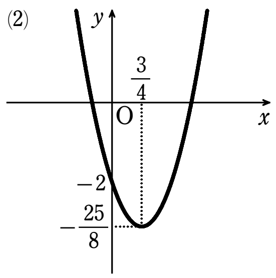
(2)　$y=(2x+1)(x-2)=2x^2-3x-2$

$=2\left\{x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}-2\left(\frac{3}{4}\right)^2-2$

$=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$

グラフは [図]，軸は直線 $x=\frac{3}{4}$，頂点は点 $\left(\frac{3}{4},\ -\frac{25}{8}\right)$

(2)



2．次の条件を満たす 2 次関数を求めよ。

(1)　$x=1$ のとき最小値 -2 をとり，$x=-1$ のとき $y=6$

(2)　$x=-2$ のとき最大値 6 をとり，$x=1$ のとき $y=-3$

解答　(1)　$y=2x^2-4x$　　(2)　$y=-x^2-4x+2$

解説

(1)　$x=1$ のとき最小値 -2 をとるから，求める 2 次関数は $y=a(x-1)^2-2$ $(a>0)$ とおける。$x=-1$ のとき $y=6$ であるから

$4a-2=6$　　　ゆえに　$a=2$　　　これは $a>0$ を満たす。

よって，求める 2 次関数は

$y=2(x-1)^2-2$　　すなわち　$y=2x^2-4x$

(2)　$x=-2$ のとき最大値 6 をとるから，求める 2 次関数は $y=a(x+2)^2+6$ $(a<0)$ とおける。$x=1$ のとき $y=-3$ であるから

$9a+6=-3$　　　ゆえに　$a=-1$　　　これは $a<0$ を満たす。

よって，求める 2 次関数は

$y=-(x+2)^2+6$　　すなわち　$y=-x^2-4x+2$

3．次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

(1)　頂点が点 (1，2) で，点 (0，4) を通る。

(2)　直線 $x=-3$ を軸とし，2 点 $(-2,\ 0)$，$(1,\ -15)$ を通る。

解答　(1)　$y=2x^2-4x+4$　　(2)　$y=-x^2-6x-8$

解説

(1)　頂点が点 (1，2) であるから，求める 2 次関数は $y=a(x-1)^2+2$ とおける。

このグラフが点 (0，4) を通るから　　$a+2=4$　　　ゆえに　$a=2$

よって，求める 2 次関数は

$y=2(x-1)^2+2$　　すなわち　$y=2x^2-4x+4$

(2)　軸が直線 $x=-3$ であるから，求める 2 次関数は $y=a(x+3)^2+q$ とおける。

このグラフが 2 点 $(-2,\ 0)$，$(1,\ -15)$ を通るから

$a+q=0$，　$16a+q=-15$　　　これを解いて　$a=-1$，$q=1$

よって，求める 2 次関数は

$y=-(x+3)^2+1$　　すなわち　$y=-x^2-6x-8$

4．グラフが次の 3 点を通る 2 次関数を求めよ。

(1)　$(-1,\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(1,\ 6)$　　　　(2)　$(-1,\ -6)$，$(1,\ 0)$，$(2,\ 6)$

(3)　$(1,\ -1)$，$(2,\ 6)$，$(-3,\ -9)$　　　　(4)　$(-2,\ -9)$，$(2,\ 7)$，$(4,\ -9)$

解答　(1)　$y=x^2+3x+2$　　(2)　$y=x^2+3x-4$　　(3)　$y=x^2+4x-6$

(4)　$y=-2x^2+4x+7$

解説

求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく。

(1)　グラフが 3 点 $(-1,\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(1,\ 6)$ を通るから

$$\begin{cases} a-b+c=0 & \cdots\cdots ① \\ c=2 & \cdots\cdots ② \\ a+b+c=6 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

② を ① に代入して　　$a-b+2=0$　……④

② を ③ に代入して　　$a+b+2=6$　……⑤

④+⑤ から　　$2a+4=6$　　　ゆえに　$a=1$

⑤−④ から　　$2b=6$　　　ゆえに　$b=3$

よって，求める 2 次関数は　　$y=x^2+3x+2$

(2)　グラフが 3 点 $(-1,\ -6)$，$(1,\ 0)$，$(2,\ 6)$ を通るから

$$\begin{cases} a-b+c=-6 & \cdots\cdots ① \\ a+b+c=0 & \cdots\cdots ② \\ 4a+2b+c=6 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②−① から　　$2b=6$　　　ゆえに　$b=3$

③−② から　　$3a+b=6$　……④

④ に $b=3$ を代入して　　$3a+3=6$　　　ゆえに　$a=1$

$a=1$，$b=3$ を ② に代入して　　$1+3+c=0$　　　ゆえに　$c=-4$

よって，求める 2 次関数は　　$y=x^2+3x-4$

(3)　グラフが 3 点 $(1,\ -1)$，$(2,\ 6)$，$(-3,\ -9)$ を通るから

$$\begin{cases} a+b+c=-1 & \cdots\cdots ① \\ 4a+2b+c=6 & \cdots\cdots ② \\ 9a-3b+c=-9 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②−① から　　$3a+b=7$　……④

③−② から　　$5a-5b=-15$　　　よって　$a-b=-3$　……⑤

④+⑤ から　　$4a=4$　　　ゆえに　$a=1$

$a=1$ を ④ に代入して　　$3+b=7$　　　ゆえに　$b=4$

$a=1$，$b=4$ を ① に代入して　　$1+4+c=-1$　　　ゆえに　$c=-6$

よって，求める 2 次関数は　　$y=x^2+4x-6$

(4)　グラフが 3 点 $(-2,\ -9)$，$(2,\ 7)$，$(4,\ -9)$ を通るから

$$\begin{cases} 4a-2b+c=-9 & \cdots\cdots ① \\ 4a+2b+c=7 & \cdots\cdots ② \\ 16a+4b+c=-9 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②−① から　　$4b=16$　　　ゆえに　$b=4$

③−② から　　$12a+2b=-16$　　　よって　$6a+b=-8$　……④

$b=4$ を ④ に代入して　　$6a+4=-8$　　　ゆえに　$a=-2$

$a=-2$，$b=4$ を ① に代入して　　$-8-8+c=-9$　　　ゆえに　$c=7$

よって，求める 2 次関数は　　$y=-2x^2+4x+7$

5．グラフが次の条件を満たすような2次関数を求めよ。

(1)　放物線 $y=x^2-3x+2$ を平行移動したもので，2点 (1，2)，(2，3) を通る。

(2)　放物線 $y=2x^2+3x+1$ を平行移動したもので，軸が直線 $x=-1$，y 軸と点 (0，7) で交わる。

解答　(1)　$y=x^2-2x+3$　　(2)　$y=2x^2+4x+7$

解説

(1)　放物線 $y=x^2-3x+2$ を平行移動したものであるから，求める2次関数は $y=x^2+bx+c$ とおける。

このグラフが2点 (1，2)，(2，3) を通るから

$$2=1+b+c,\quad 3=4+2b+c$$

すなわち　　$b+c=1,\quad 2b+c=-1$

これを解くと　　$b=-2,\ c=3$

よって，求める2次関数は　　$y=x^2-2x+3$

(2)　グラフが放物線 $y=2x^2+3x+1$ を平行移動したもので，軸が直線 $x=-1$ であるから，求める2次関数は $y=2(x+1)^2+q$ とおける。

点 (0，7) を通るから　　$2+q=7$　　ゆえに　　$q=5$

よって，求める2次関数は

$$y=2(x+1)^2+5\quad \text{すなわち}\quad y=2x^2+4x+7$$

6．x の2次関数 $y=x^2+2mx+3m$ の最小値を k とする。

(1)　この関数の最小値 k を m の式で表せ。

(2)　この関数の最小値 k が -4 であるとき，m の値を求めよ。

(3)　k の値を最大にする m の値と，k の最大値を求めよ。

解答　(1)　$k=-m^2+3m$　　(2)　$m=-1,\ 4$　　(3)　$m=\dfrac{3}{2}$ で最大値 $\dfrac{9}{4}$

解説

(1)　$y=(x+m)^2-m^2+3m$ より，y は $x=-m$ で最小値 $-m^2+3m$ をとるので　　$k=-m^2+3m$

(2)　$-m^2+3m=-4$ より　　$m^2-3m-4=0$

これを解いて　　$m=-1,\ 4$

(3)　$-m^2+3m=-\left(m-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$ より　　$k=-\left(m-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$

よって，k は $m=\dfrac{3}{2}$ で最大値 $\dfrac{9}{4}$ をとる。

7．a を定数とする。関数 $y=-x^2+2ax-a\ (-2\leqq x\leqq 0)$ の最小値を次の各場合について，それぞれ求めよ。

(1)　$a<-1$　　(2)　$a=-1$　　(3)　$a>-1$

解答　(1)　$x=0$ で 最小値 $-a$　　(2)　$x=-2,\ 0$ で 最小値 1

(3)　$x=-2$ で 最小値 $-4-5a$

解説

$$y=-x^2+2ax-a=-(x-a)^2+a^2-a\quad(-2\leqq x\leqq 0)$$

この関数のグラフは上に凸の放物線で，頂点は点 $(a,\ a^2-a)$

ゆえに，各場合において下の図のようになる。

$x=-2$ のとき $y=-4-5a$，　$x=0$ のとき $y=-a$

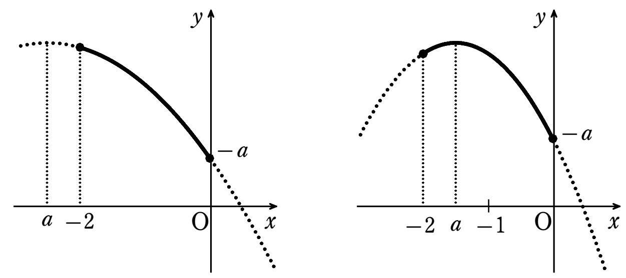
定義域の中央は $x=-1$ であるから，図より

(1)　$a<-1$ のとき　$x=0$ で　　最小値 $-a$

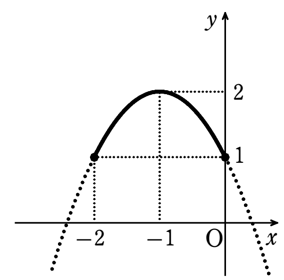
(2)　$a=-1$ のとき　$x=-2,\ 0$ で 最小値 1

(3)　$a>-1$ のとき　$x=-2$ で　　最小値 $-4-5a$

(1)　$a<-1$



(2)　$a=-1$



(3)　$a>-1$