数学演習（２次関数）Ｈ２３．６．１３　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　　）

１．次の２次関数のグラフをかけ。また，その軸と頂点をいえ。

(1)　$y=x^2-4x$　　(2)　$y=-x^2+3x-2$　　(3)　$y=2x^2+8x+12$

(4)　$y=-2x^2+6x+1$　　(5)　$y=3x^2-5x+1$　　(6)　$y=-3x^2+10x-7$

２．放物線 $y=x^2-4x$ を，x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

３．放物線 $y=2x^2+4x-3$ を平行移動して放物線 $y=2x^2-8x$ に重ねるには，どのように平行移動すればよいか。

４．次の２次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=3x^2+4x-1$　　(2)　$y=-2x^2+3x-5$

５．次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=3x^2-4$　$(-2\leqq x\leqq 2)$　　(2)　$y=2x^2-4x+3$　$(x\geqq 2)$

(3)　$y=x^2-4x+2$　$(-2<x\leqq 4)$　　(4)　$y=-x^2-6x+1$　$(0\leqq x<2)$

6．次の関数の最大値が 7 となるように，定数 c の値を定めよ。また，そのときの最小値を求めよ。

(1)　$y=3x^2+6x+c$　　$(-2\leqq x\leqq 1)$

(2)　$y=-2x^2+12x+c$　$(-2\leqq x\leqq 2)$

7．関数 $y=-x^2+6x+a\ (1\leqq x\leqq 4)$ の最小値が -2 であるように，定数 a の値を定めよ。

8．次の条件を満たすような定数 a の値を求めよ。

(1)　2 次関数 $y=-x^2-4x+a$ の最大値が 5 である。

(2)　2 次関数 $y=x^2+2ax+45$ の最小値が 36 である。

9．関数 $y=1-2x\ (-2\leqq x<1)$ のグラフをかき，その値域を求めよ。

10．放物線 $y=2x^2-4x+4$ を，次の直線または点について，それぞれ対称移動して得られる放物線の式を求めよ。

(1)　x 軸　　(2)　y 軸　　(3)　原点

数学演習（２次関数）Ｈ２３．６．１３　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．次の２次関数のグラフをかけ。また，その軸と頂点をいえ。

(1)　$y=x^2-4x$　　(2)　$y=-x^2+3x-2$　　(3)　$y=2x^2+8x+12$

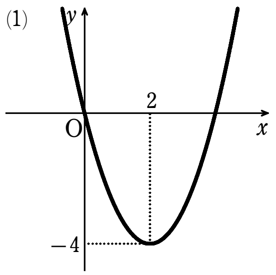
(4)　$y=-2x^2+6x+1$　　(5)　$y=3x^2-5x+1$　　(6)　$y=-3x^2+10x-7$

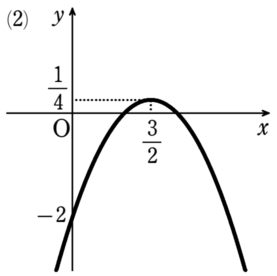
解答　グラフ，軸，頂点の順に

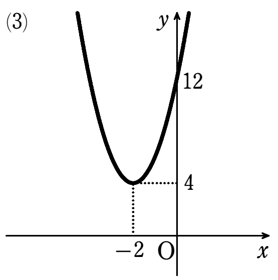
(1)［図］，直線 $x=2$，点 $(2,\ -4)$　　(2)［図］，直線 $x=\frac{3}{2}$，点 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{4}\right)$

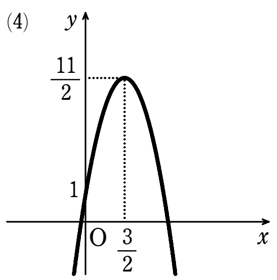
(3)［図］，直線 $x=-2$，点 $(-2,\ 4)$　　(4)［図］，直線 $x=\frac{3}{2}$，点 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{11}{2}\right)$

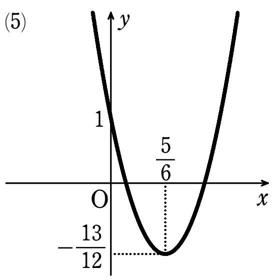
(5)［図］，直線 $x=\frac{5}{6}$，点 $\left(\frac{5}{6},\ -\frac{13}{12}\right)$　　(6)［図］，直線 $x=\frac{5}{3}$，点 $\left(\frac{5}{3},\ \frac{4}{3}\right)$

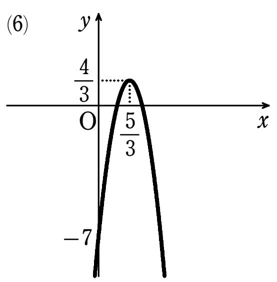
(1)


(2)


(3)


(4)


(5)


(6)


解説

(1)　$x^2-4x=(x^2-4x+2^2)-2^2$

$=(x-2)^2-4$

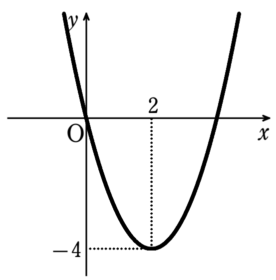
ゆえに，この２次関数は

$y=(x-2)^2-4$

と表され，そのグラフは右の図のようになり，

軸は 直線 $x=2$

頂点は 点 $(2,\ -4)$



(2)　$-x^2+3x-2=-(x^2-3x)-2$

$=-\left[\left\{x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]-2$

$=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}-2=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

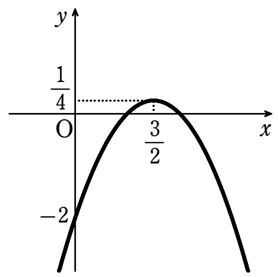
ゆえに，この２次関数は

$y=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

と表され，そのグラフは右の図のようになり，

軸は 直線 $x=\frac{3}{2}$

頂点は 点 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{4}\right)$



(3)　$2x^2+8x+12=2(x^2+4x)+12$

$=2\{(x^2+4x+2^2)-2^2\}+12$

$=2(x+2)^2-2\cdot4+12$

$=2(x+2)^2+4$

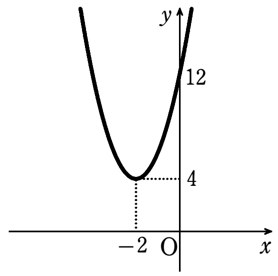
ゆえに，この２次関数は

$y=2(x+2)^2+4$

と表され，そのグラフは右の図のようになり，

軸は 直線 $x=-2$

頂点は 点 $(-2,\ 4)$



(4)　$-2x^2+6x+1=-2(x^2-3x)+1$

$=-2\left[\left\{x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]+1$

$=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+2\left(\frac{3}{2}\right)^2+1$

$=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{2}$

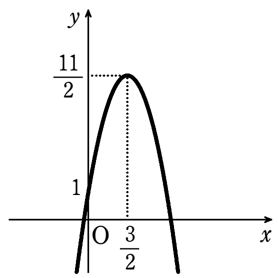
ゆえに，この２次関数は

$y=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{2}$

と表され，そのグラフは右の図のようになり，

軸は 直線 $x=\frac{3}{2}$

頂点は 点 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{11}{2}\right)$



(5)　$3x^2-5x+1=3\left(x^2-\frac{5}{3}x\right)+1$

$=3\left[\left\{x^2-\frac{5}{3}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2\right\}-\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]+1$

$=3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-3\left(\frac{5}{6}\right)^2+1$

$=3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{13}{12}$

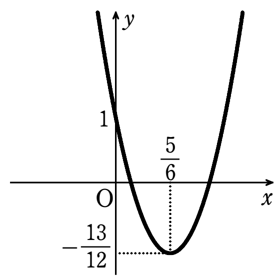
ゆえに，この２次関数は

$y=3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{13}{12}$

と表され，そのグラフは右の図のようになり，

軸は 直線 $x=\frac{5}{6}$

頂点は 点 $\left(\frac{5}{6},\ -\frac{13}{12}\right)$



(6)　$-3x^2+10x-7=-3\left(x^2-\frac{10}{3}x\right)-7$

$=-3\left[\left\{x^2-\frac{10}{3}x+\left(\frac{5}{3}\right)^2\right\}-\left(\frac{5}{3}\right)^2\right]-7$

$=-3\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+3\left(\frac{5}{3}\right)^2-7$

$=-3\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$

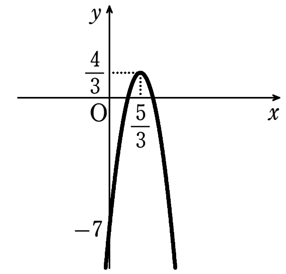
ゆえに，この２次関数は

$y=-3\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$

と表され，そのグラフは右の図のようになり，

軸は 直線 $x=\frac{5}{3}$

頂点は 点 $\left(\frac{5}{3},\ \frac{4}{3}\right)$



２．放物線 $y=x^2-4x$ を，x 軸方向に２，y 軸方向に -1 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

解答　$y=x^2-8x+11$

解説

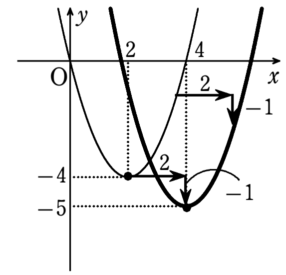
放物線 $y=x^2-4x$　すなわち　$y=(x-2)^2-4$

の頂点 $(2,\ -4)$ を平行移動すると　$(2+2,\ -4-1)$

すなわち　$(4,\ -5)$ となるから，移動後の放物線の

方程式は　　$y=(x-4)^2-5$

よって　　$y=x^2-8x+11$



３．放物線 $y=2x^2+4x-3$ を平行移動して放物線 $y=2x^2-8x$ に重ねるには，どのように平行移動すればよいか。

解答　x 軸方向に３，y 軸方向に -3 だけ平行移動すればよい

解説

$y=2x^2+4x-3$ ……①，$y=2x^2-8x$ ……② とする。

$2x^2+4x-3=2(x^2+2\cdot1\cdot x+1^2)-2\cdot1^2-3=2(x+1)^2-5$

よって，放物線①の頂点は　点 $(-1,\ -5)$

$2x^2-8x=2(x^2-4x)=2(x^2-2\cdot2x+2^2)-2\cdot2^2=2(x-2)^2-8$

よって，放物線②の頂点は　点 $(2,\ -8)$

放物線①を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動して放物線②に移るものとすると，この移動で放物線①の頂点 $(-1,\ -5)$ が放物線②の頂点 $(2,\ -8)$ に重なるから

$-1+p=2$，　$-5+q=-8$　　　ゆえに　$p=3$，$q=-3$

したがって，x 軸方向に３，y 軸方向に -3 だけ平行移動すればよい。

4. 次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=3x^2+4x-1$　　(2)　$y=-2x^2+3x-5$

解答　(1)　$x=-\dfrac{2}{3}$ で最小値 $-\dfrac{7}{3}$，最大値はない

(2)　$x=\dfrac{3}{4}$ で最大値 $-\dfrac{31}{8}$，最小値はない

解説

(1)　$3x^2+4x-1=3\left\{x^2+\dfrac{4}{3}x+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right\}-3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-1$

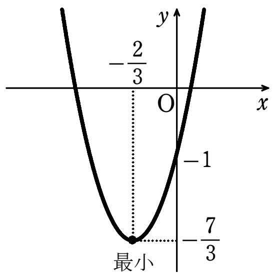
$=3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{7}{3}$

ゆえに，この 2 次関数は　$y=3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{7}{3}$

と表される。

グラフは図のようになり，下に凸の放物線で，頂点は

点 $\left(-\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{7}{3}\right)$



よって，$x=-\dfrac{2}{3}$ で最小値 $-\dfrac{7}{3}$ をとる。

また，y の値はいくらでも大きくなるから，最大値はない。

(2)　$-2x^2+3x-5=-2\left\{x^2-\dfrac{3}{2}x+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\right\}+2\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^2-5$

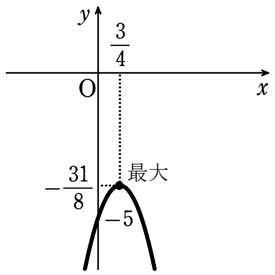
$=-2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{31}{8}$

ゆえに，この 2 次関数は　$y=-2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{31}{8}$

と表される。

グラフは図のようになり，上に凸の放物線で，頂点は

点 $\left(\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{31}{8}\right)$



よって，$x=\dfrac{3}{4}$ で最大値 $-\dfrac{31}{8}$ をとる。

また，y の値はいくらでも小さくなるから，最小値はない。

5. 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=3x^2-4$　$(-2\leqq x\leqq 2)$　　(2)　$y=2x^2-4x+3$　$(x\geqq 2)$

(3)　$y=x^2-4x+2$　$(-2<x\leqq 4)$　　(4)　$y=-x^2-6x+1$　$(0\leqq x<2)$

解答　(1)　$x=\pm 2$ で最大値 8，$x=0$ で最小値 -4

(2)　$x=2$ で最小値 3，最大値はない　　(3)　$x=2$ で最小値 -2，最大値はない

(4)　$x=0$ で最大値 1，最小値はない

解説

(1)　関数 $y=3x^2-4$ $(-2\leqq x\leqq 2)$ のグラフは，頂点が点 $(0,\ -4)$ で下に凸の放物線の一部である。

$x=-2$ のとき　$y=8$

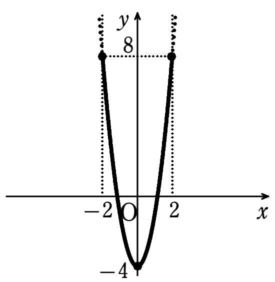
$x=2$　のとき　$y=8$

与えられた関数のグラフは図の実線部分である。

よって，グラフから

$x=\pm 2$ で　最大値 8,

$x=0$　で　最小値 -4　をとる。



(2)　$2x^2-4x+3=2(x^2-2x+1)-2+3$

$=2(x-1)^2+1$

ゆえに，関数 $y=2x^2-4x+3$ $(x\geqq 2)$ のグラフは，頂点が点 $(1,\ 1)$ で下に凸の放物線の一部である。

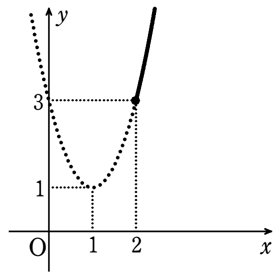
$x=2$ のとき　$y=3$

与えられた関数のグラフは図の実線部分である。

よって，グラフから

$x=2$ で　最小値 3　をとり，

最大値はない。



(3)　$x^2-4x+2=(x^2-4x+2^2)-2^2+2$

$=(x-2)^2-2$

ゆえに，関数 $y=x^2-4x+2$ $(-2<x\leqq 4)$ のグラフは，頂点が点 $(2,\ -2)$ で下に凸の放物線の一部である。

$x=-2$ のとき　$y=14$

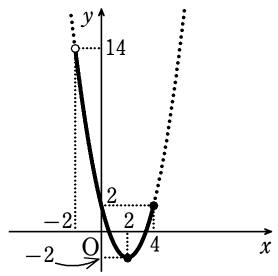
$x=4$　のとき　$y=2$

定義域 $-2<x\leqq 4$ に $x=-2$ は含まれないから，与えられた関数のグラフは図の実線部分である。

よって，グラフから

$x=2$ で　最小値 -2　をとり，

最大値はない。



(4)　$-x^2-6x+1=-(x^2+6x+3^2)+3^2+1$

$=-(x+3)^2+10$

ゆえに，関数 $y=-x^2-6x+1$ $(0\leqq x<2)$ のグラフは，頂点が点 $(-3,\ 10)$ で上に凸の放物線の一部である。

$x=0$ のとき　$y=1$

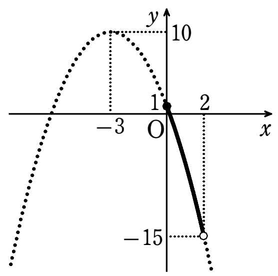
$x=2$ のとき　$y=-15$

定義域 $0\leqq x<2$ に $x=2$ は含まれないから，与えられた関数のグラフは図の実線部分である。

よって，グラフから

$x=0$ で　最大値 1　をとり，

最小値はない。



6. 次の関数の最大値が 7 となるように，定数 c の値を定めよ。また，そのときの最小値を求めよ。

(1)　$y=3x^2+6x+c$　　$(-2\leqq x\leqq 1)$

(2)　$y=-2x^2+12x+c$　$(-2\leqq x\leqq 2)$

解答　(1)　$c=-2$，$x=-1$ で最小値 -5　　(2)　$c=-9$，$x=-2$ で最小値 -41

解説

(1)　与えられた関数の式は

$y=3(x+1)^2+c-3$　$(-2\leqq x\leqq 1)$

と変形されるから，そのグラフは，右の図の実線部分である。

よって，この関数は

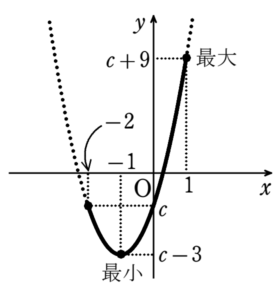
$x=1$　で　最大値 $c+9$

$x=-1$ で　最小値 $c-3$

をとる。

ゆえに，$c+9=7$ から　$c=-2$

また，$x=-1$ で最小値 $c-3=-5$ をとる。



(2)　与えられた関数の式は

$y=-2(x-3)^2+c+18$　$(-2\leqq x\leqq 2)$

と変形されるから，そのグラフは，右の図の実線部分である。

よって，この関数は

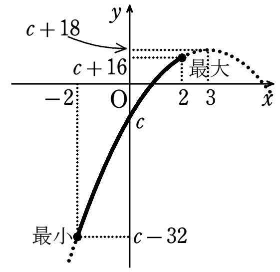
$x=2$　で　最大値 $c+16$

$x=-2$ で　最小値 $c-32$

をとる。

ゆえに，$c+16=7$ から　$c=-9$

また，$x=-2$ で最小値 $c-32=-41$ をとる。



7. 関数 $y=-x^2+6x+a$ $(1\leqq x\leqq 4)$ の最小値が -2 であるように，定数 a の値を定めよ。

解答　$a=-7$

解説

$-x^2+6x+a=-(x^2-2\cdot 3x+3^2)+3^2+a$

$=-(x-3)^2+9+a$

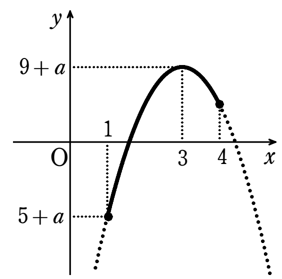
よって，与えられた関数のグラフは，右の図の実線の部分であり，この関数は

$x=1$ で最小値 $5+a$

をとる。

最小値が -2 であるための条件は　$5+a=-2$

したがって　$a=-7$



8. 次の条件を満たすような定数 a の値を求めよ。

(1)　2 次関数 $y=-x^2-4x+a$ の最大値が 5 である。

(2)　2 次関数 $y=x^2+2ax+45$ の最小値が 36 である。

解答　(1)　$a=1$　　(2)　$a=\pm 3$

解説

(1)　$y=-x^2-4x+a=-(x+2)^2+a+4$

この関数は $x=-2$ で最大値 $a+4$ をとるから，最大値が 5 であるための条件は

$a+4=5$　　よって　$a=1$

(2)　$y=x^2+2ax+45=(x+a)^2-a^2+45$

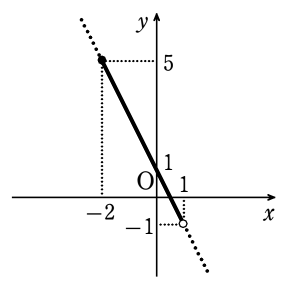
この関数は $x=-a$ で最小値 $-a^2+45$ をとるから，最小値が 36 であるための条件は

$-a^2+45=36$　　よって　$a^2=9$　　したがって　$a=\pm 3$

9. 関数 $y=1-2x$ $(-2\leqq x<1)$ のグラフをかき，その値域を求めよ。

解答　[図] の実線部分。ただし，点 $(1,\ -1)$ を除く。

値域は　$-1<y\leqq 5$



解説

1 次関数 $y=1-2x$ のグラフは，傾きが -2，y 切片が 1 の直線である。

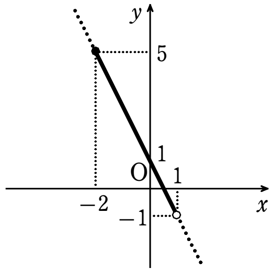
また　　$x=-2$ のとき　$y=5$

　　　　$x=1$　のとき　$y=-1$

よって，求めるグラフは，右図の実線部分である。

ただし，点 $(1,\ -1)$ を除く。

したがって，値域は　　$-1<y\leqq 5$



10. 放物線 $y=2x^2-4x+4$ を，次の直線または点について，それぞれ対称移動して得られる放物線の式を求めよ。

(1)　x 軸　　　(2)　y 軸　　　(3)　原点

$\boxed{\text{解答}}$　(1)　$y=-2x^2+4x-4$　　(2)　$y=2x^2+4x+4$　　(3)　$y=-2x^2-4x-4$

(解説)

$2x^2-4x+4=2(x-1)^2+2$ から，

放物線 $y=2x^2-4x+4$ の頂点は

　　点 $(1,\ 2)$

(1)　移動後の頂点は　点 $(1,\ -2)$

　よって　　$y=-2(x-1)^2-2$

　すなわち　$y=-2x^2+4x-4$

(2)　移動後の頂点は　点 $(-1,\ 2)$

　よって　　$y=2(x+1)^2+2$

　すなわち　$y=2x^2+4x+4$

(3)　移動後の頂点は　点 $(-1,\ -2)$

　よって　　$y=-2(x+1)^2-2$

　すなわち　$y=-2x^2-4x-4$