統一テスト（２次関数）Ｈ２３．６．２７　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．1次関数 $f(x)=ax+b$ について，$f(1)=0$ かつ $f(3)=1$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

2．関数 $y=ax+b$ $(-2\leqq x\leqq 6)$ の最大値は8，最小値は -3 である。このとき，a，b の値を求めよ。ただし，a，b は定数で $a<0$ である。

3．次の2次式を平方完成せよ。

(1) $-x^2+6x-2$　(2) $-2x^2+5x-2$　(3) $-\dfrac{1}{2}x^2-x+1$

4．次の2次関数のグラフをかけ。また，その頂点と軸を求めよ。

(1) $y=2x^2-2$　(2) $y=-(x+1)^2$

(3) $y=2x^2-4x-1$　(4) $y=-x^2-2x+4$

5．(1) 放物線 $y=x^2-4x$ を，x 軸方向に2，y 軸方向に -1 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(2) 2次関数 $y=x^2-8x-13$ のグラフをどのように平行移動すると，2次関数 $y=x^2+4x+3$ のグラフになるか。

6．放物線 $y=2x^2-2x+1$ を，次の直線または点に関して，それぞれ対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(1)　x 軸　　(2)　y 軸　　(3)　原点

7．次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=-x^2+5x-2$

(2)　$y=-x^2-4x+1$ $(0\leqq x\leqq 2)$

(3)　$y=x^2-4x+3$ $(0<x<3)$

8．関数 $y=-x^2+6x+c$ $(1\leqq x\leqq 4)$ の最小値が 1 となるように，定数 c の値を定めよ。また，そのときの最大値を求めよ。

9．そのグラフが次の条件を満たす 2 次関数を求めよ。

(1)　頂点が点 $(-1,\ 3)$ で，点 $(1,\ 7)$ を通る放物線

(2)　軸が直線 $x=1$ で，2 点 $(3,\ -6)$，$(0,\ -3)$ を通る放物線

(3)　グラフが 3 点 $(1,\ 3)$，$(2,\ 5)$，$(3,\ 9)$ を通るような 2 次関数を求めよ。

10．x の 2 次関数 $y=x^2+2bx+6+2b$ の最小値を m とする。

(1)　m を b の式で表せ。

(2)　b を変化させるとき，m の最大値とそのときの b の値を求めよ。

11．関数 $y=3x^2-6ax+2$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最大値と最小値を，次の各場合について，それぞれ求めよ。

(1)　$a\leqq 0$　　(2)　$0<a<1$

統一テスト（２次関数）Ｈ２３．６．２７　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．1 次関数 $f(x)=ax+b$ について，$f(1)=0$ かつ $f(3)=1$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{1}{2}$

解説

$f(1)=a+b$ であるから　　$a+b=0$　……①

$f(3)=3a+b$ であるから　　$3a+b=1$　……②

①，② の連立方程式を解いて　　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{1}{2}$

2．関数 $y=ax+b$ $(-2\leqq x\leqq 6)$ の最大値は 8，最小値は -3 である。このとき，a，b の値を求めよ。ただし，a，b は定数で $a<0$ である。

解答　$a=-\dfrac{11}{8}$，$b=\dfrac{21}{4}$

解説

関数 $y=ax+b$ において，$a<0$ であるから，このグラフは右下がりの直線である。

よって

$x=-2$ のとき $y=8$ であるから　$8=-2a+b$　……①

$x=6$ のとき $y=-3$ であるから　$-3=6a+b$　……②

①，② を a，b について解くと　$a=-\dfrac{11}{8}$，$b=\dfrac{21}{4}$

3．次の 2 次式を平方完成せよ。

(1)　$-x^2+6x-2$　　(2)　$-2x^2+5x-2$　　(3)　$-\dfrac{1}{2}x^2-x+1$

解答　(1)　$-(x-3)^2+7$　　(2)　$-2\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{9}{8}$　　(3)　$-\dfrac{1}{2}(x+1)^2+\dfrac{3}{2}$

解説

(1)
$$\begin{aligned}-x^2+6x-2&=-(x^2-6x)-2\\&=-(x^2-6x+3^2-3^2)-2\\&=-(x^2-6x+3^2)+3^2-2\\&=-(x-3)^2+7\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}-2x^2+5x-2&=-2\left(x^2-\frac{5}{2}x\right)-2\\&=-2\left\{x^2-\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2\right\}-2\\&=-2\left\{x^2-\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2\right\}+2\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2-2\\&=-2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{9}{8}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}x^2-x+1&=-\frac{1}{2}(x^2+2x)+1\\&=-\frac{1}{2}(x^2+2x+1^2-1^2)+1\\&=-\frac{1}{2}(x^2+2x+1^2)+\frac{1}{2}\cdot1^2+1\\&=-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

4．次の 2 次関数のグラフをかけ。また，その頂点と軸を求めよ。

(1)　$y=2x^2-2$　　(2)　$y=-(x+1)^2$

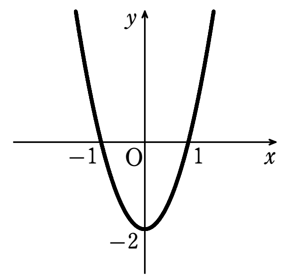
(3)　$y=2x^2-4x-1$　　(4)　$y=-x^2-2x+4$

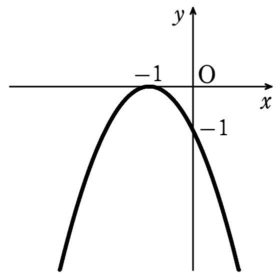
解答　(1)［図］，頂点は点 $(0,\ -2)$，軸は直線 $x=0$

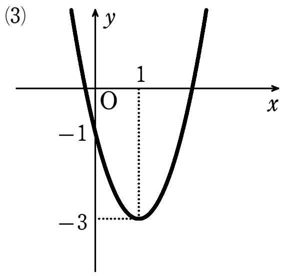
(2)［図］，頂点は点 $(-1,\ 0)$，軸は直線 $x=-1$

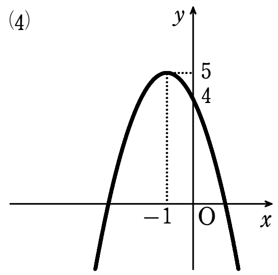
(3)［図］，頂点は点 $(1,\ -3)$，軸は直線 $x=1$

(4)［図］，頂点は点 $(-1,\ 5)$，軸は直線 $x=-1$

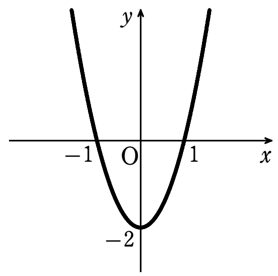
(1)


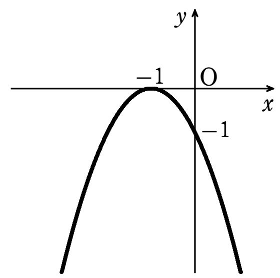
(2)


(3)


(4)


解説

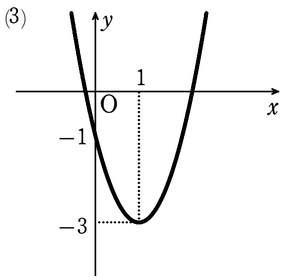
(1)


(2)


(3)
$$\begin{aligned}y&=2(x^2-2x)-1\\&=2(x^2-2x+1^2-1^2)-1\\&=2(x^2-2x+1^2)-2\cdot1^2-1\\&=2(x-1)^2-3\end{aligned}$$

よって，グラフは下に凸の放物線で，

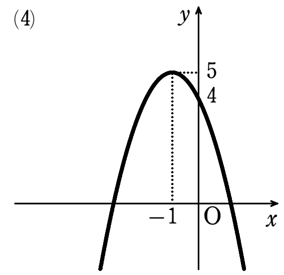
頂点は点 $(1,\ -3)$，軸は直線 $x=1$

(3)


(4)
$$\begin{aligned}y&=-(x^2+2x)+4\\&=-(x^2+2x+1^2-1^2)+4\\&=-(x^2+2x+1^2)+1^2+4\\&=-(x+1)^2+5\end{aligned}$$

よって，グラフは上に凸の放物線で，

頂点は点 $(-1,\ 5)$，軸は直線 $x=-1$

(4)


5．(1)　放物線 $y=x^2-4x$ を，x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(2)　2 次関数 $y=x^2-8x-13$ のグラフをどのように平行移動すると，2 次関数 $y=x^2+4x+3$ のグラフになるか。

解答　(1)　$y=x^2-8x+11$　　(2)　x 軸方向に -6，y 軸方向に 28 だけ平行移動する

解説

(1)　$x^2-4x=x^2-4x+2^2-2^2=(x-2)^2-4$

から，2 次関数 $y=x^2-4x$ のグラフの頂点は　点 $(2,\ -4)$

x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動すると，頂点は点 $(4,\ -5)$ に移る。

よって，求める関数は

$y=(x-4)^2-5$　すなわち　$y=x^2-8x+11$

別解　求める関数は　$y=(x-2)^2-4(x-2)-1$

すなわち　$y=x^2-8x+11$

(2)　$y=x^2-8x-13$　……①，$y=x^2+4x+3$　……② とする。

$x^2-8x-13=(x-4)^2-29$ であるから，① のグラフの頂点の座標は　$(4,\ -29)$

$x^2+4x+3=(x+2)^2-1$ であるから，② のグラフの頂点の座標は　$(-2,\ -1)$

よって，① のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動して ② のグラフに重なるとすると　$4+p=-2$，$-29+q=-1$

ゆえに　$p=-6$，$q=28$

よって，x 軸方向に -6，y 軸方向に 28 だけ平行移動する。

別解　① のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したグラフを表す関数は　$y=(x-p)^2-8(x-p)-13+q$

$=x^2-2(p+4)x+p^2+8p+q-13$　……③

③ のグラフが ② のグラフに重なるとすると

$-2(p+4)=4$，$p^2+8p+q-13=3$

これを解いて　$p=-6$，$q=28$　以下は，上と同じ。

6．放物線 $y=2x^2-2x+1$ を，次の直線または点に関して，それぞれ対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(1) x 軸　　(2) y 軸　　(3) 原点

解答　(1) $y=-2x^2+2x-1$　　(2) $y=2x^2+2x+1$　　(3) $y=-2x^2-2x-1$

解説

(1) $y=-(2x^2-2x+1)$

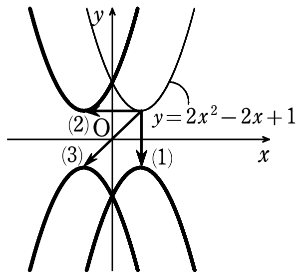
すなわち　$y=-2x^2+2x-1$

(2) $y=2(-x)^2-2(-x)+1$

すなわち　$y=2x^2+2x+1$

(3) $y=-\{2(-x)^2-2(-x)+1\}$

すなわち　$y=-2x^2-2x-1$



7．次の2次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=-x^2+5x-2$

(2) $y=-x^2-4x+1$ $(0\leqq x\leqq 2)$

(3) $y=x^2-4x+3$ $(0<x<3)$

解答　(1) $x=\dfrac{5}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{17}{4}$，最小値はない

(2) $x=0$ のとき最大値 1，$x=2$ のとき最小値 -11

(3) $x=2$ のとき最小値 -1，最大値はない

解説

(1) $y=-x^2+5x-2$

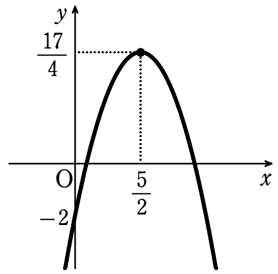
$=-(x^2-5x)-2$

$=-\left\{x^2-5x+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2\right\}-2$

$=-\left\{x^2-5x+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2\right\}+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-2$

$=-\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{17}{4}$

ゆえに，グラフは右図のようになる。



よって，$x=\dfrac{5}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{17}{4}$ をとる。

最小値はない。

(2) $y=-x^2-4x+1$

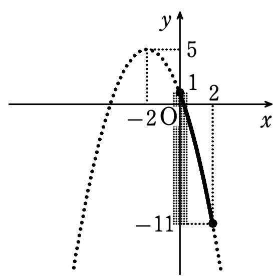
$=-(x^2+4x)+1$

$=-(x^2+4x+2^2-2^2)+1$

$=-(x^2+4x+2^2)+2^2+1$

$=-(x+2)^2+5$

この関数のグラフは，右の図の実線部分である。



よって，値域は　$-11\leqq y\leqq 1$

したがって，$x=0$ のとき最大値 1,

$x=2$ のとき最小値 -11

(3) $y=x^2-4x+3$

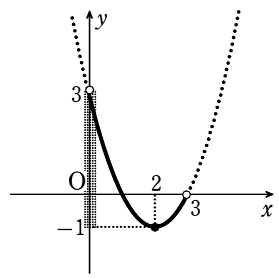
$=(x^2-4x)+3$

$=(x^2-4x+2^2-2^2)+3$

$=(x^2-4x+2^2)-2^2+3$

$=(x-2)^2-1$

この関数のグラフは，右の図の実線部分である。



よって，値域は　$-1\leqq y<3$

したがって，$x=2$ のとき最小値 -1,

最大値はない。

8．関数 $y=-x^2+6x+c$ $(1\leqq x\leqq 4)$ の最小値が1となるように，定数 c の値を定めよ。また，そのときの最大値を求めよ。

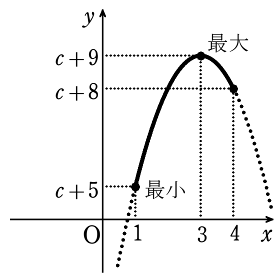
解答　$c=-4$，$x=3$ で最大値 5

解説

与えられた関数の式は

$y=-(x-3)^2+c+9$ $(1\leqq x\leqq 4)$

と変形されるから，そのグラフは，右の図の実線部分である。



よって，この関数は

$x=3$ で　最大値　$c+9$

$x=1$ で　最小値　$c+5$

をとる。

ゆえに　　$c+5=1$

したがって　　$c=-4$

また，$x=3$ で最大値 $c+9=5$ をとる。

9．そのグラフが次の条件を満たす2次関数を求めよ。

(1) 頂点が点 $(-1,\ 3)$ で，点 $(1,\ 7)$ を通る放物線

(2) 軸が直線 $x=1$ で，2点 $(3,\ -6)$，$(0,\ -3)$ を通る放物線

(3) グラフが3点 $(1,\ 3)$，$(2,\ 5)$，$(3,\ 9)$ を通るような2次関数を求めよ。

解答　(1) $y=x^2+2x+4$　　(2) $y=-x^2+2x-3$　(3) $y=x^2-x+3$

解説

(1) 放物線の頂点が点 $(-1,\ 3)$ であるから，求める2次関数は

$y=a(x+1)^2+3$

とおける。

点 $(1,\ 7)$ を通るから　$7=a(1+1)^2+3$

よって　　$a=1$

したがって　　$y=(x+1)^2+3$

すなわち　　$y=x^2+2x+4$　答

(2) 放物線の軸が直線 $x=1$ であるから，求める2次関数は

$y=a(x-1)^2+q$ とおける。

グラフが2点 $(3,\ -6)$，$(0,\ -3)$ を通るから

$\begin{cases}-6=a(3-1)^2+q\\-3=a(0-1)^2+q\end{cases}$　よって　$\begin{cases}4a+q=-6\\a+q=-3\end{cases}$

これを解いて　　$a=-1$，$q=-2$

したがって　　$y=-(x-1)^2-2$

すなわち　　$y=-x^2+2x-3$　答

(3) 求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

そのグラフが3点 $(1,\ 3)$，$(2,\ 5)$，$(3,\ 9)$ を通るから

$\begin{cases}3=a\cdot1^2+b\cdot1+c\\5=a\cdot2^2+b\cdot2+c\\9=a\cdot3^2+b\cdot3+c\end{cases}$　すなわち　$\begin{cases}a+b+c=3 & \cdots\cdots ①\\4a+2b+c=5 & \cdots\cdots ②\\9a+3b+c=9 & \cdots\cdots ③\end{cases}$

②－① から　　$3a+b=2$　……④

③－② から　　$5a+b=4$　……⑤

⑤－④ から　　$2a=2$　　よって　$a=1$

④ から　　$3+b=2$　　よって　$b=-1$

① から　　$1-1+c=3$　　よって　$c=3$

したがって，求める2次関数は　$y=x^2-x+3$　答

10．x の2次関数 $y=x^2+2bx+6+2b$ の最小値を m とする。

(1) m を b の式で表せ。

(2) b を変化させるとき，m の最大値とそのときの b の値を求めよ。

解答　(1) $m=-b^2+2b+6$　　(2) $b=1$ のとき最大値 7

解説

(1) $y=x^2+2bx+6+2b=(x^2+2bx)+2b+6$

$=(x^2+2bx+b^2)-b^2+2b+6$

$=(x+b)^2-b^2+2b+6$

よって，y は，$x=-b$ のとき最小値 $-b^2+2b+6$ をとる。

したがって　　$m=-b^2+2b+6$

(2) $m=-b^2+2b+6=-(b^2-2b)+6$

$=-(b^2-2b+1^2)+1^2+6$

$=-(b-1)^2+7$

よって，m は，$b=1$ のとき最大値 7 をとる。

11．関数 $y=3x^2-6ax+2$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最大値と最小値を，次の各場合について，それぞれ求めよ。

(1) $a\leqq 0$　　(2) $0<a<1$

解答　(1) $x=2$ で最大値 $14-12a$，$x=0$ で最小値 2

(2) $x=2$ で最大値 $14-12a$，$x=a$ で最小値 $-3a^2+2$

解説

$y=3x^2-6ax+2$

$=3(x-a)^2-3a^2+2$ $(0\leqq x\leqq 2)$

(1) $a\leqq 0$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

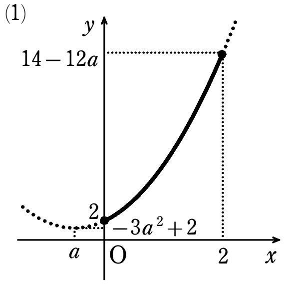
よって，$x=2$ で最大値 $14-12a$,　$x=0$ で最小値 2　をとる。

(2) $0<a<1$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=2$ で最大値 $14-12a$,　$x=a$ で最小値 $-3a^2+2$　をとる。

(1)



(2)