統一テスト（２次関数）Ｈ２３．６．２１　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．1 次関数 $f(x)=ax+b$ について，$f(2)=4$ かつ $f(4)=0$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

２．$a<0$ とする。関数 $y=ax+b$ 　$(-1\leqq x\leqq 1)$ の値域が，$-3\leqq y\leqq 1$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

３．次の 2 次式を平方完成せよ。

(1)　x^2+2x　　(2)　x^2-x+2　　(3)　$2x^2+10x$

４．次の 2 次関数のグラフをかけ。また，その頂点と軸を求めよ。

(1)　$y=x^2+2$　　(2)　$y=(x+3)^2$

(3)　$y=2x^2-4x-2$　　(4)　$y=-2x^2-8x-6$

５．放物線 $y=x^2+2x-1$ を平行移動して放物線 $y=x^2-6x+12$ に重ねるには，どのように平行移動すればよいか。

６．放物線 $y=2x^2-4x+3$ を，x 軸方向に -5，y 軸方向に 2だけ平行移動したとき，移動後の放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

7．放物線 $y=2x^2-8x+11$ に対して，x 軸，y 軸，原点について対称な放物線を表す式を，それぞれ求めよ。

8．次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x^2-4x-4$

(2)　$y=-2x^2-4x+1$　$(-2\leqq x\leqq 1)$

(3)　$y=-x^2+4x+5$　$(-1<x<3)$

9．次の関数の最大値が 7 であるとき，定数 c の値を求めよ。

$$y=2x^2+4x+c\quad(-2\leqq x\leqq 1)$$

10．次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

(1)　頂点が $(1,\ -2)$ で，点 $(2,\ -3)$ を通る。

(2)　直線 $x=-3$ を軸とし，2 点 $(0,\ 9)$，$(-2,\ -7)$ を通る。

(3)　3 点$(-1,\ 1)$，$(1,\ -5)$，$(3,\ 5)$を通る。

11．x の 2 次関数 $y=x^2+2mx+3m$ の最小値を k とする。

(1)　この関数の最小値 k を m の式で表せ。

(2)　この関数の最小値 k が -4 であるとき，m の値を求めよ。

(3)　k の値を最大にする m の値と，k の最大値を求めよ。

12．関数 $y=x^2-2mx+1$　$(0\leqq x\leqq 2)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$m\leqq 0$ のとき，関数の最大値と最小値を求めよ。

(2)　$0<m<1$ のとき，関数の最大値と最小値を求めよ。

統一テスト（２次関数）Ｈ２３．６．２１　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．1次関数 $f(x)=ax+b$ について，$f(2)=4$ かつ $f(4)=0$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答　$a=-2$，$b=8$

解説

$f(2)=2a+b$ であるから　　$2a+b=4$　……①

$f(4)=4a+b$ であるから　　$4a+b=0$　……②

①，② の連立方程式を解いて　　$a=-2$，$b=8$

2．$a<0$ とする。関数 $y=ax+b$　$(-1\leqq x\leqq 1)$ の値域が，$-3\leqq y\leqq 1$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答　$a=-2$，$b=-1$

解説

$a<0$ より，この関数のグラフは右下がりの線分であるから，$f(x)=ax+b$ とすると，値域は

$f(1)\leqq y\leqq f(-1)$　　すなわち　　$a+b\leqq y\leqq -a+b$

この値域が $-3\leqq y\leqq 1$ と一致するから

$a+b=-3$，$-a+b=1$

これを解いて　　$a=-2$，$b=-1$

3．次の２次式を平方完成せよ。

(1)　x^2+2x　　(2)　x^2-x+2　　(3)　$2x^2+10x$

解答　(1)　$(x+1)^2-1$　　(2)　$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$　　(3)　$2\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{2}$

解説

(1)　$x^2+2x=(x+1)^2-1$

(2)　$x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

(3)　$2x^2+10x=2(x^2+5x)=2\left\{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right\}=2\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-2\cdot\frac{25}{4}$

$=2\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{2}$

4．次の２次関数のグラフをかけ。また，その頂点と軸を求めよ。

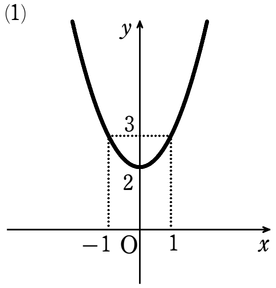
(1)　$y=x^2+2$　　(2)　$y=(x+3)^2$

(3)　$y=2x^2-4x-2$　　(4)　$y=-2x^2-8x-6$

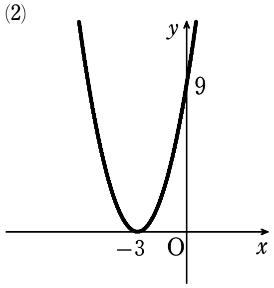
解答　(1)　[図]，頂点 $(0,\ 2)$，軸 $x=0$　　(2)　[図]，頂点 $(-3,\ 0)$，軸 $x=-3$

(3)　[図]，頂点 $(1,\ -4)$，軸 $x=1$　　(4)　[図]，頂点 $(-2,\ 2)$，軸 $x=-2$

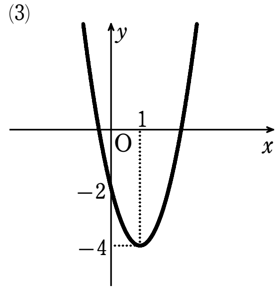
(1)



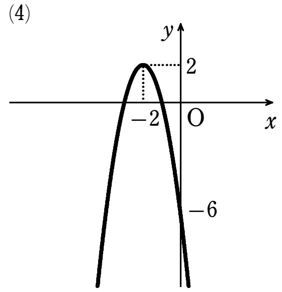
(2)



(3)



(4)



解説

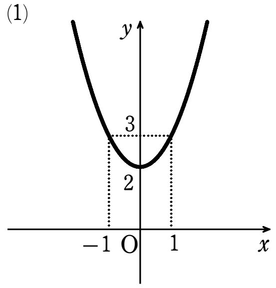
(1)　グラフは [図]

頂点は 点 $(0,\ 2)$，軸は直線 $x=0$

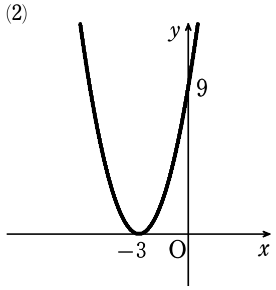
(2)　グラフは [図]

頂点は 点 $(-3,\ 0)$，軸は 直線 $x=-3$

(1)



(2)



(3)　$2x^2-4x-2=2(x^2-2x)-2=2\{(x-1)^2-1^2\}-2=2(x-1)^2-2\cdot1-2$

$=2(x-1)^2-4$

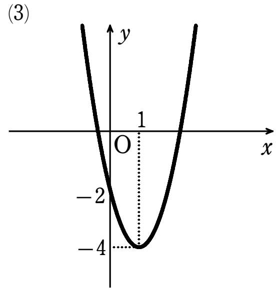
よって　　グラフは [図]，頂点は 点 $(1,\ -4)$，軸は 直線 $x=1$

(4)　$-2x^2-8x-6=-2(x^2+4x)-6=-2\{(x+2)^2-2^2\}-6=-2(x+2)^2+2\cdot4-6$

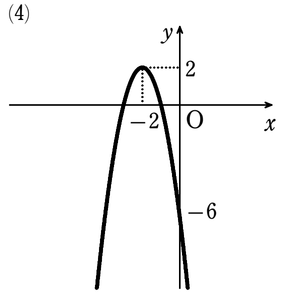
$=-2(x+2)^2+2$

よって　　グラフは [図]，頂点は 点 $(-2,\ 2)$，軸は 直線 $x=-2$

(3)



(4)



5．放物線 $y=x^2+2x-1$ を平行移動して放物線 $y=x^2-6x+12$ に重ねるには，どのように平行移動すればよいか。

解答　x 軸方向に 4，y 軸方向に 5

解説

$y=x^2+2x-1$ を変形すると　　$y=(x+1)^2-2$

$y=x^2-6x+12$ を変形すると　　$y=(x-3)^2+3$

よって，頂点は点 $(-1,\ -2)$ から点 $(3,\ 3)$ に移動する。

したがって，x 軸方向に 4，y 軸方向に 5 だけ平行移動すればよい。

6．放物線 $y=2x^2-4x+3$ を，x 軸方向に -5，y 軸方向に 2だけ平行移動したとき，移動後の放物線をグラフにもつ２次関数を求めよ。

解答　$y=2x^2+16x+35$

解説

$2x^2-4x+3=2(x-1)^2+1$ であるから　　$y=2(x-1)^2+1$

この平行移動によって，放物線 $y=2x^2-4x+3$ の頂点 $(1,\ 1)$ が移る点は

点 $(1+(-5),\ 1+2)$　　すなわち　　点 $(-4,\ 3)$

よって，求める２次関数は

$y=2(x+4)^2+3$　　すなわち　　$y=2x^2+16x+35$

別解　求める２次関数は　　$y=2\{x-(-5)\}^2-4\{x-(-5)\}+3+2$

すなわち　　$y=2x^2+16x+35$

7．放物線 $y=2x^2-8x+11$ に対して，x 軸，y 軸，原点について対称な放物線を表す式を，それぞれ求めよ。

解答　x 軸，y 軸，原点についての順に

$y=-2x^2+8x-11$，　$y=2x^2+8x+11$，　$y=-2x^2-8x-11$

解説

$2x^2-8x+11=2(x-2)^2+3$ より　　$y=2(x-2)^2+3$

よって，この放物線の頂点の座標は　　$(2,\ 3)$

この頂点に対して，x 軸，y 軸，原点について対称な点の座標は，それぞれ

$(2,\ -3)$，$(-2,\ 3)$，$(-2,\ -3)$

また，下に凸である放物線に対して，x 軸，原点について対称な放物線は，上に凸であるから，求める２次関数の式は，それぞれ

$y=-2(x-2)^2-3$，　$y=2(x+2)^2+3$，　$y=-2(x+2)^2-3$

すなわち

$y=-2x^2+8x-11$，　$y=2x^2+8x+11$，　$y=-2x^2-8x-11$

別解　x 軸，y 軸，原点について対称な放物線は，それぞれ

$-y=2x^2-8x+11$　　すなわち　　$y=-2x^2+8x-11$

$y=2(-x)^2-8(-x)+11$　　すなわち　　$y=2x^2+8x+11$

$-y=2(-x)^2-8(-x)+11$　　すなわち　　$y=-2x^2-8x-11$

8．次の２次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x^2-4x-4$

(2)　$y=-2x^2-4x+1$　$(-2\leqq x\leqq 1)$

(3)　$y=-x^2+4x+5$　$(-1<x<3)$

解答　(1)　$x=2$ で最小値 -8，最大値はない

(2)　$x=-1$ で最大値 3，$x=1$ で最小値 -5

(3)　$x=2$ で最大値 9，最小値はない

解説

(1)　$x^2-4x-4=(x-2)^2-2^2-4=(x-2)^2-8$

よって，$x=2$ で最小値 -8 をとる。最大値はない。

(2)　関数の式を変形すると　　$y=-2(x+1)^2+3$　$(-2\leqq x\leqq 1)$

よって，そのグラフは [図] の実線部分である。

しがたって，y は

$x=-1$ で最大値 3，$x=1$ で最小値 -5

をとる。

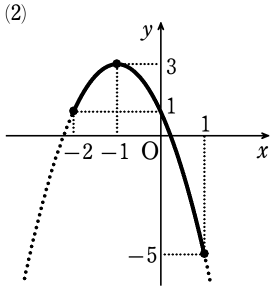
(3)　関数の式を変形すると　$y=-(x-2)^2+9\quad(-1<x<3)$

よって，そのグラフは [図] の実線部分である。

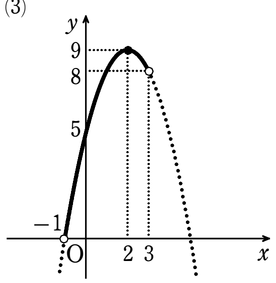
したがって，y は

$x=2$ で最大値 9 をとる。最小値はない。

(2)



(3)



9．次の関数の最大値が 7 であるとき，定数 c の値を求めよ。

$$y=2x^2+4x+c\quad(-2\leqq x\leqq 1)$$

解答　$c=1$

解説

$2x^2+4x+c=2(x+1)^2+c-2$ より

$y=2(x+1)^2+c-2\quad(-2\leqq x\leqq 1)$

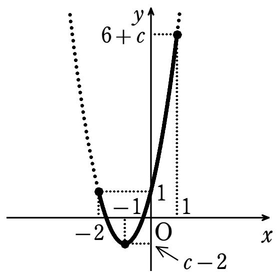
この関数のグラフは，右の図の実線部分である。

この関数は

$x=1$ で最大値 $6+c$

をとるので

$6+c=7$　すなわち　$c=1$



10. 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

(1)　頂点が $(1,\ -2)$ で，点 $(2,\ -3)$ を通る。

(2)　直線 $x=-3$ を軸とし，2 点 $(0,\ 9)$，$(-2,\ -7)$ を通る。

(3)　3 点 $(-1,\ 1)$，$(1,\ -5)$，$(3,\ 5)$ を通る。

解答　(1)　$y=-x^2+2x-3$　　(2)　$y=2x^2+12x+9$　(3)　$y=2x^2-3x-4$

解説

(1)　頂点が $(1,\ -2)$ であるから，求める 2 次関数は

$$y=a(x-1)^2-2$$

の形に表される。このグラフが点 $(2,\ -3)$ を通るから　$-3=a(2-1)^2-2$

よって　$a=-1$

したがって，求める 2 次関数は

$y=-(x-1)^2-2$　すなわち　$y=-x^2+2x-3$

(2)　放物線の軸が直線 $x=-3$ であるから，求める 2 次関数は

$$y=a(x+3)^2+q$$

の形に表される。このグラフが

点 $(0,\ 9)$ を通るから　$9=a(0+3)^2+q$

点 $(-2,\ -7)$ を通るから　$-7=a(-2+3)^2+q$

よって　$9=9a+q,\quad -7=a+q$

これを解くと　$a=2,\ q=-9$

したがって，求める 2 次関数は

$y=2(x+3)^2-9$　すなわち　$y=2x^2+12x+9$

(3)　求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

グラフが 3 点 $(-1,\ 1)$，$(1,\ -5)$，$(3,\ 5)$ を通るから

$$\begin{cases}1=a-b+c & \cdots\cdots ①\\ -5=a+b+c & \cdots\cdots ②\\ 5=9a+3b+c & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

②−① から　$-6=2b$

よって　$b=-3$

③−② から　$10=8a+2b$ ……④

$b=-3$ を ④ に代入して　$10=8a-6$

よって　$a=2$

$a=2,\ b=-3$ を ① に代入して　$1=2+3+c$

よって　$c=-4$

したがって，求める 2 次関数は　$y=2x^2-3x-4$

11. x の 2 次関数 $y=x^2+2mx+3m$ の最小値を k とする。

(1)　この関数の最小値 k を m の式で表せ。

(2)　この関数の最小値 k が -4 であるとき，m の値を求めよ。

(3)　k の値を最大にする m の値と，k の最大値を求めよ。

解答　(1)　$k=-m^2+3m$　　(2)　$m=-1,\ 4$　　(3)　$m=\dfrac{3}{2}$ で最大値 $\dfrac{9}{4}$

解説

(1)　$y=(x+m)^2-m^2+3m$ より，y は $x=-m$ で最小値 $-m^2+3m$ を

とるので　$k=-m^2+3m$

(2)　$-m^2+3m=-4$ より　$m^2-3m-4=0$

これを解いて　$m=-1,\ 4$

(3)　$-m^2+3m=-\left(m-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$ より　$k=-\left(m-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$

よって，k は $m=\dfrac{3}{2}$ で最大値 $\dfrac{9}{4}$ をとる。

12. 関数 $y=x^2-2mx+1\quad(0\leqq x\leqq 2)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$m\leqq 0$ のとき，関数の最大値と最小値を求めよ。

(2)　$0<m<1$ のとき，関数の最大値と最小値を求めよ。

解答　(1)　$x=2$ で最大値　$-4m+5$，$x=0$ で最小値　1

(2)　$x=2$ で最大値　$-4m+5$，$x=m$ で最小値　$-m^2+1$

解説

$x^2-2mx+1=(x-m)^2-m^2+1$ より

$y=(x-m)^2-m^2+1\quad(0\leqq x\leqq 2)$

よって，放物線の軸は　直線 $x=m$

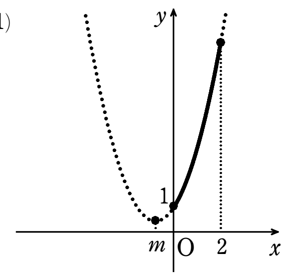
(1)　$m\leqq 0$ のとき，グラフは [図] の実線部分である。

よって　$x=2$ で最大値　$-4m+5$，$x=0$ で最小値　1

(2)　$0<m<1$ のとき，グラフは [図] の実線部分である。

よって　$x=2$ で最大値　$-4m+5$，$x=m$ で最小値　$-m^2+1$

(1)



(2)