数学演習（２次関数のグラフ）Ｈ２３．６．７　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１．次の関数の値域をいえ。また，最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x+2$ $(0\leqq x\leqq 3)$　　(2)　$y=4-2x$ $(-1\leqq x<2)$

２．次の２次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x^2-3$　　(2)　$y=-2x^2+1$　　(3)　$y=3(x-2)^2+5$

３．次の２次関数のグラフをかけ。また，その軸と頂点をいえ。

(1)　$y=x^2-4x$　　(2)　$y=-x^2+3x-2$　　(3)　$y=2x^2+8x+12$

(4)　$y=-2x^2+6x+1$　　(5)　$y=3x^2-5x+1$　　(6)　$y=-3x^2+10x-7$

４．次の２次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x^2-2x-3$　　(2)　$y=-2x^2+x$

(3)　$y=3x^2+4x-1$　　(4)　$y=-2x^2+3x-5$

5．次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=3x^2-4$　$(-2\leqq x\leqq 2)$

(2)　$y=2x^2-4x+3$　$(x\geqq 2)$

(3)　$y=x^2-4x+2$　$(-2<x\leqq 4)$

(4)　$y=-x^2-6x+1$　$(0\leqq x<2)$

6．次の関数の最大値が 7 となるように，定数 c の値を定めよ。また，そのときの最小値を求めよ。

(1)　$y=3x^2+6x+c$　$(-2\leqq x\leqq 1)$

(2)　$y=-2x^2+12x+c$　$(-2\leqq x\leqq 2)$

7．放物線 $y=2x^2+3x+6$ …… ① は，放物線 $y=2x^2-4x+1$ …… ② をどのように平行移動したものか。

8．放物線 $y=x^2-4x$ を，x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

１．次の関数の値域をいえ。また，最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x+2$ $(0\leqq x\leqq 3)$　　　(2)　$y=4-2x$ $(-1\leqq x<2)$

解答　(1)　値域は $2\leqq y\leqq 5$；$x=3$ で最大値 5，$x=0$ で最小値 2

(2)　値域は $0<y\leqq 6$；$x=-1$ で最大値 6，最小値はない

解説

(1)　関数 $y=x+2$ において

$x=0$ のとき　$y=2$，　$x=3$ のとき　$y=5$

グラフから，値域は　　$2\leqq y\leqq 5$

また，$x=3$ で最大値 5，$x=0$ で最小値 2 をとる。

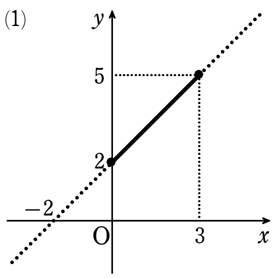
(2)　関数 $y=4-2x$ において

$x=-1$ のとき　$y=6$，　$x=2$ のとき　$y=0$

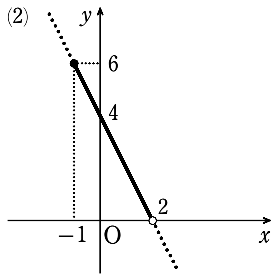
グラフから，値域は　　$0<y\leqq 6$

また，$x=-1$ で最大値 6 をとり，最小値はない。

(1)



(2)



２．次の２次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x^2-3$　　　(2)　$y=-2x^2+1$　　　(3)　$y=3(x-2)^2+5$

解答　(1)　$x=0$ で最小値 -3，最大値はない　　(2)　$x=0$ で最大値 1，最小値はない

(3)　$x=2$ で最小値 5，最大値はない

解説

(1)　グラフは下に凸で，頂点は点 $(0,\ -3)$

ゆえに，$x=0$ で最小値 -3 をとる。

また，y の値はいくらでも大きくなるから，最大値はない。

(2)　グラフは上に凸で，頂点は点 $(0,\ 1)$

ゆえに，$x=0$ で最大値 1 をとる。

また，y の値はいくらでも小さくなるから，最小値はない。

(3)　グラフは下に凸で，頂点は点 $(2,\ 5)$

ゆえに，$x=2$ で最小値 5 をとる。

また，y の値はいくらでも大きくなるから，最大値はない。

３．次の２次関数のグラフをかけ。また，その軸と頂点をいえ。

(1)　$y=x^2-4x$　　　(2)　$y=-x^2+3x-2$　　　(3)　$y=2x^2+8x+12$

(4)　$y=-2x^2+6x+1$　　　(5)　$y=3x^2-5x+1$　　　(6)　$y=-3x^2+10x-7$

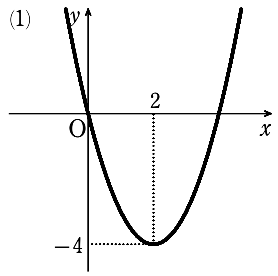
解答　グラフ，軸，頂点の順に

(1)　［図］，直線 $x=2$，点 $(2,\ -4)$　　(2)　［図］，直線 $x=\dfrac{3}{2}$，点 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$

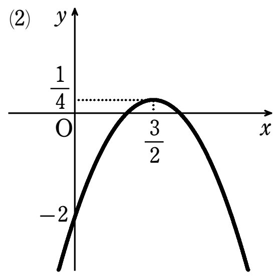
(3)　［図］，直線 $x=-2$，点 $(-2,\ 4)$　　(4)　［図］，直線 $x=\dfrac{3}{2}$，点 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{11}{2}\right)$

(5)　［図］，直線 $x=\dfrac{5}{6}$，点 $\left(\dfrac{5}{6},\ -\dfrac{13}{12}\right)$　　(6)　［図］，直線 $x=\dfrac{5}{3}$，点 $\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$

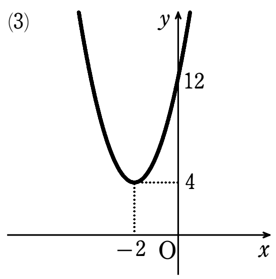
(1)



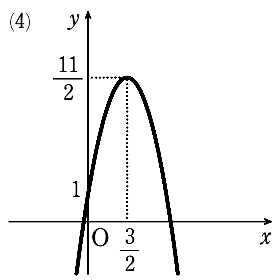
(2)



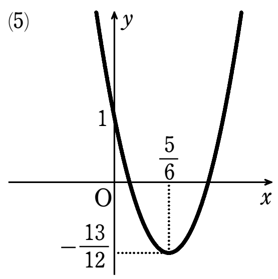
(3)



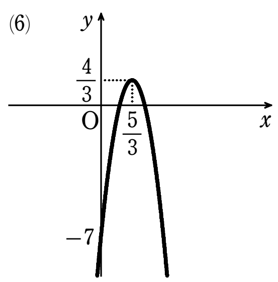
(4)



(5)



(6)



解説

(1)　$x^2-4x=(x^2-4x+2^2)-2^2$

$=(x-2)^2-4$

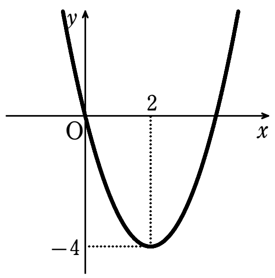
ゆえに，この２次関数は

$y=(x-2)^2-4$

と表され，そのグラフは右の図のようになり，

軸は 直線 $x=2$

頂点は 点 $(2,\ -4)$



(2)　$-x^2+3x-2=-(x^2-3x)-2$

$=-\left[\left\{x^2-3x+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right\}-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right]-2$

$=-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}-2=-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

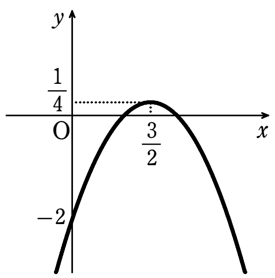
ゆえに，この２次関数は

$y=-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

と表され，そのグラフは右の図のようになり，

軸は 直線 $x=\dfrac{3}{2}$

頂点は 点 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$



(3)　$2x^2+8x+12=2(x^2+4x)+12$

$=2\{(x^2+4x+2^2)-2^2\}+12$

$=2(x+2)^2-2\cdot 4+12$

$=2(x+2)^2+4$

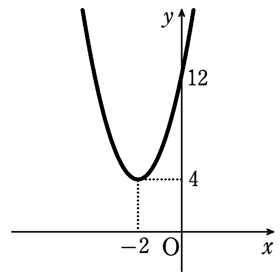
ゆえに，この２次関数は

$y=2(x+2)^2+4$

と表され，そのグラフは右の図のようになり，

軸は 直線 $x=-2$

頂点は 点 $(-2,\ 4)$



(4)　$-2x^2+6x+1=-2(x^2-3x)+1$

$=-2\left[\left\{x^2-3x+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right\}-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right]+1$

$=-2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+2\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+1$

$=-2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{2}$

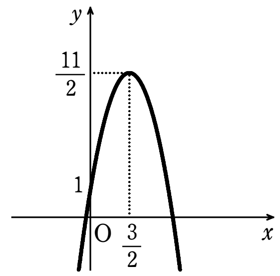
ゆえに，この２次関数は

$y=-2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{2}$

と表され，そのグラフは右の図のようになり，

軸は 直線 $x=\dfrac{3}{2}$

頂点は 点 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{11}{2}\right)$



(5)　$3x^2-5x+1=3\left(x^2-\dfrac{5}{3}x\right)+1$

$=3\left[\left\{x^2-\dfrac{5}{3}x+\left(\dfrac{5}{6}\right)^2\right\}-\left(\dfrac{5}{6}\right)^2\right]+1$

$=3\left(x-\dfrac{5}{6}\right)^2-3\left(\dfrac{5}{6}\right)^2+1$

$=3\left(x-\dfrac{5}{6}\right)^2-\dfrac{13}{12}$

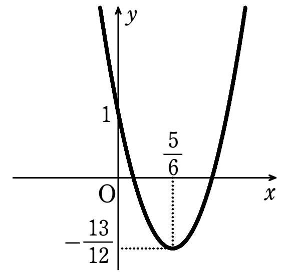
ゆえに，この２次関数は

$y=3\left(x-\dfrac{5}{6}\right)^2-\dfrac{13}{12}$

と表され，そのグラフは右の図のようになり，

軸は 直線 $x=\dfrac{5}{6}$

頂点は 点 $\left(\dfrac{5}{6},\ -\dfrac{13}{12}\right)$



(6)　$-3x^2+10x-7=-3\left(x^2-\dfrac{10}{3}x\right)-7$

$=-3\left[\left\{x^2-\dfrac{10}{3}x+\left(\dfrac{5}{3}\right)^2\right\}-\left(\dfrac{5}{3}\right)^2\right]-7$

$=-3\left(x-\dfrac{5}{3}\right)^2+3\left(\dfrac{5}{3}\right)^2-7$

$=-3\left(x-\dfrac{5}{3}\right)^2+\dfrac{4}{3}$

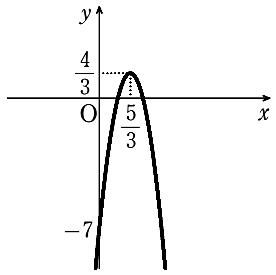
ゆえに，この 2 次関数は

$$y=-3\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$$

と表され，そのグラフは右の図のようになり，

軸は 直線 $x=\frac{5}{3}$

頂点は 点 $\left(\frac{5}{3},\ \frac{4}{3}\right)$



4． 次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=x^2-2x-3$　　(2) $y=-2x^2+x$

(3) $y=3x^2+4x-1$　　(4) $y=-2x^2+3x-5$

解答　(1) $x=1$ で最小値 -4，最大値はない

(2) $x=\frac{1}{4}$ で最大値 $\frac{1}{8}$，最小値はない

(3) $x=-\frac{2}{3}$ で最小値 $-\frac{7}{3}$，最大値はない

(4) $x=\frac{3}{4}$ で最大値 $-\frac{31}{8}$，最小値はない

解説

(1) $x^2-2x-3=(x^2-2x+1^2)-1^2-3$

$$=(x-1)^2-4$$

ゆえに，この 2 次関数は　$y=(x-1)^2-4$

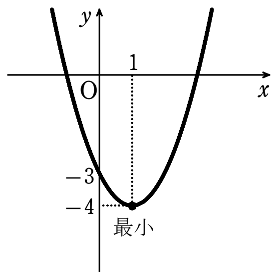
と表される。

グラフは図のようになり，下に凸の放物線で，頂点は

点 $(1,\ -4)$

よって，$x=1$ で最小値 -4 をとる。

また，y の値はいくらでも大きくなるから，最大値はない。



(2) $-2x^2+x=-2\left\{x^2-\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}+2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$$=-2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$$

ゆえに，この 2 次関数は　$y=-2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$

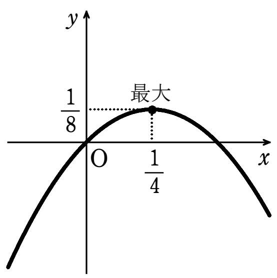
と表される。

グラフは図のようになり，上に凸の放物線で，頂点は

点 $\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{8}\right)$

よって，$x=\frac{1}{4}$ で最大値 $\frac{1}{8}$ をとる。

また，y の値はいくらでも小さくなるから，最小値はない。



(3) $3x^2+4x-1=3\left\{x^2+\frac{4}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-1$

$$=3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{7}{3}$$

ゆえに，この 2 次関数は　$y=3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{7}{3}$

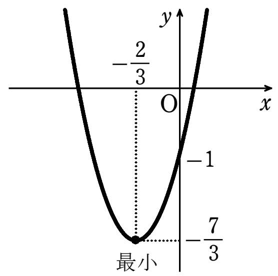
と表される。

グラフは図のようになり，下に凸の放物線で，頂点は

点 $\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{7}{3}\right)$

よって，$x=-\frac{2}{3}$ で最小値 $-\frac{7}{3}$ をとる。

また，y の値はいくらでも大きくなるから，最大値はない。



(4) $-2x^2+3x-5=-2\left\{x^2-\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}+2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2-5$

$$=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{31}{8}$$

ゆえに，この 2 次関数は　$y=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{31}{8}$

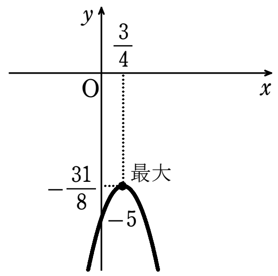
と表される。

グラフは図のようになり，上に凸の放物線で，頂点は

点 $\left(\frac{3}{4},\ -\frac{31}{8}\right)$

よって，$x=\frac{3}{4}$ で最大値 $-\frac{31}{8}$ をとる。

また，y の値はいくらでも小さくなるから，最小値はない。



5． 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=3x^2-4$　$(-2\leqq x\leqq 2)$　　(2) $y=2x^2-4x+3$　$(x\geqq 2)$

(3) $y=x^2-4x+2$　$(-2<x\leqq 4)$　　(4) $y=-x^2-6x+1$　$(0\leqq x<2)$

解答　(1) $x=\pm 2$ で最大値 8，$x=0$ で最小値 -4

(2) $x=2$ で最小値 3，最大値はない　　(3) $x=2$ で最小値 -2，最大値はない

(4) $x=0$ で最大値 1，最小値はない

解説

(1) 関数 $y=3x^2-4$ $(-2\leqq x\leqq 2)$ のグラフは，頂点が点 $(0,\ -4)$ で下に凸の放物線の一部である。

$x=-2$ のとき　$y=8$

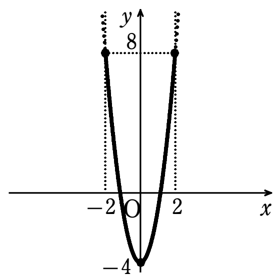
$x=2$　のとき　$y=8$

与えられた関数のグラフは図の実線部分である。

よって，グラフから

$x=\pm 2$ で 最大値 8，

$x=0$　で 最小値 -4 をとる。



(2) $2x^2-4x+3=2(x^2-2x+1)-2+3$

$$=2(x-1)^2+1$$

ゆえに，関数 $y=2x^2-4x+3$ $(x\geqq 2)$ のグラフは，頂点が点 $(1,\ 1)$ で下に凸の放物線の一部である。

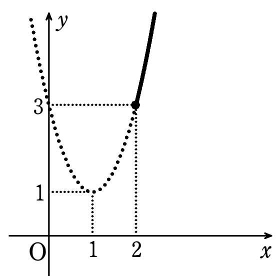
$x=2$ のとき　$y=3$

与えられた関数のグラフは図の実線部分である。

よって，グラフから

$x=2$ で 最小値 3　をとり，

最大値はない。



(3) $x^2-4x+2=(x^2-4x+2^2)-2^2+2$

$$=(x-2)^2-2$$

ゆえに，関数 $y=x^2-4x+2$ $(-2<x\leqq 4)$ のグラフは，頂点が点 $(2,\ -2)$ で下に凸の放物線の一部である。

$x=-2$ のとき　$y=14$

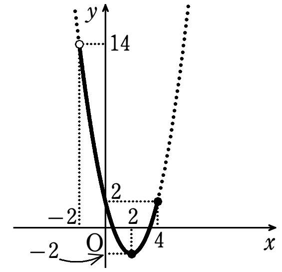
$x=4$　のとき　$y=2$

定義域 $-2<x\leqq 4$ に $x=-2$ は含まれないから，与えられた関数のグラフは図の実線部分である。

よって，グラフから

$x=2$ で 最小値 -2　をとり，

最大値はない。



(4) $-x^2-6x+1=-(x^2+6x+3^2)+3^2+1$

$$=-(x+3)^2+10$$

ゆえに，関数 $y=-x^2-6x+1$ $(0\leqq x<2)$ のグラフは，頂点が点 $(-3,\ 10)$ で上に凸の放物線の一部である。

$x=0$ のとき　$y=1$

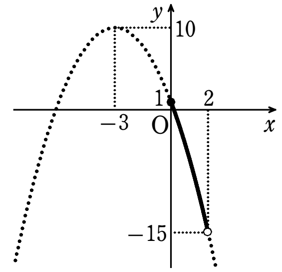
$x=2$ のとき　$y=-15$

定義域 $0\leqq x<2$ に $x=2$ は含まれないから，与えられた関数のグラフは図の実線部分である。

よって，グラフから

$x=0$ で 最大値 1　をとり，

最小値はない。



6． 次の関数の最大値が 7 となるように，定数 c の値を定めよ。また，そのときの最小値を求めよ。

(1) $y=3x^2+6x+c$　　$(-2\leqq x\leqq 1)$

(2) $y=-2x^2+12x+c$　$(-2\leqq x\leqq 2)$

解答　(1) $c=-2$，$x=-1$ で最小値 -5　　(2) $c=-9$，$x=-2$ で最小値 -41

解説

(1) 与えられた関数の式は

$y=3(x+1)^2+c-3$　$(-2\leqq x\leqq 1)$

と変形されるから，そのグラフは，右の図の実線部分である。

よって，この関数は

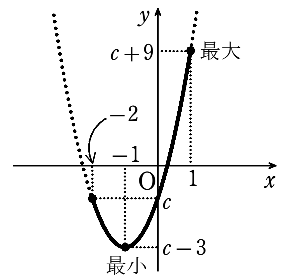
$x=1$　で 最大値 $c+9$

$x=-1$ で 最小値 $c-3$

をとる。

ゆえに，$c+9=7$ から　$c=-2$

また，$x=-1$ で最小値 $c-3=-5$ をとる。



(2) 与えられた関数の式は

$y=-2(x-3)^2+c+18$　$(-2\leqq x\leqq 2)$

と変形されるから，そのグラフは，右の図の実線部分である。

よって，この関数は

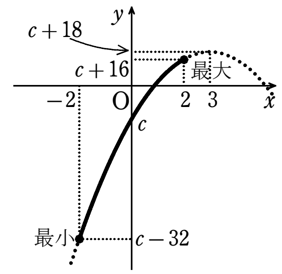
$x=2$　で 最大値 $c+16$

$x=-2$ で 最小値 $c-32$

をとる。

ゆえに，$c+16=7$ から　$c=-9$

また，$x=-2$ で最小値 $c-32=-41$ をとる。



7．放物線 $y=2x^2+3x+6$ …… ① は，放物線 $y=2x^2-4x+1$ …… ② をどのように平行移動したものか。

解答　x 軸方向に $-\dfrac{7}{4}$，y 軸方向に $\dfrac{47}{8}$ だけ平行移動したもの

解説

① から　　$y=2x^2+3x+6=2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{39}{8}$

ゆえに，放物線 ① の頂点を A とすると　　$\mathrm{A}\left(-\dfrac{3}{4},\ \dfrac{39}{8}\right)$

② から　　$y=2x^2-4x+1=2(x-1)^2-1$

ゆえに，放物線 ② の頂点を B とすると　　$\mathrm{B}(1,\ -1)$

点 B を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ移動したときに点 A に重なるとすると

$$1+p=-\frac{3}{4},\qquad -1+q=\frac{39}{8}$$

これを解くと　　$p=-\dfrac{7}{4}$，$q=\dfrac{47}{8}$

したがって，放物線 ① は，放物線 ② を

x 軸方向に $-\dfrac{7}{4}$，y 軸方向に $\dfrac{47}{8}$ だけ平行移動したもの

である。

8．放物線 $y=x^2-4x$ を，x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

解答　$y=x^2-8x+11$

解説

放物線 $y=x^2-4x$　すなわち　$y=(x-2)^2-4$

の頂点 $(2,\ -4)$ を平行移動すると　$(2+2,\ -4-1)$

すなわち　$(4,\ -5)$ となるから，移動後の放物線の

方程式は　　$y=(x-4)^2-5$

よって　　$y=x^2-8x+11$