数学演習（２次関数）Ｈ２５．６．１７　　　　(　)組(　)番　名前(　　　　　　　)

１．1 次関数 $f(x)=ax+b$ について，$f(-1)=3$，$f(2)=0$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

２．関数 $y=ax+b$ $(-2\leqq x\leqq 1)$ の値域が $-1\leqq y\leqq 4$ で，$a<0$ のとき，定数 a，b の値を求めよ。

３．放物線 $y=2x^2+4x-3$ を平行移動して放物線 $y=2x^2-8x$ に重ねるには，どのように平行移動すればよいか。

４．次の 2 次関数のグラフをかけ。また，その頂点と軸を求めよ。

(1) $y=x^2+6x$　　(2) $y=3x^2-6x+2$

(3) $y=2x^2-3x+1$　　(4) $y=-3x^2+4x+4$

５．関数 $y=3x^2-6x-1$ のグラフを，x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動して得られる放物線の式を求めよ。

６．放物線 $y=3x^2+x-7$ を，次の直線または点について，それぞれ対称移動して得られる放物線の式を求めよ。

(1) x 軸　　(2) y 軸　　(3) 原点

7．次の2次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=5x^2+3$　　(2)　$y=-2x^2-8x+5$

8．次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x^2-4x+5$　$(0\leqq x\leqq 3)$　　(2)　$y=-x^2-x+2$　$(-2<x<0)$

9．関数 $y=-x^2+6x+a$ $(1\leqq x\leqq 4)$ の最小値が -2 であるように，定数 a の値を定めよ。

10．2次関数 $y=x^2+4kx+24k$ の最小値 m を k で表せ。また，k の関数 m の最大値と，そのときの k の値を求めよ。

11．関数 $y=x^2-2x-1$ $(0\leqq x\leqq a)$ の最大値および最小値を，次の (1)〜(4) の場合について求めよ。

(1)　$0<a<1$　　(2)　$1\leqq a<2$　　(3)　$a=2$　　(4)　$2<a$

12．関数 $y=3x^2-6ax+2$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最大値および最小値を，次の (1)〜(5) の場合について求めよ。

(1)　$a<0$　　(2)　$0\leqq a<1$　　(3)　$a=1$　　(4)　$1<a\leqq 2$　　(5)　$a>2$

１．1 次関数 $f(x)=ax+b$ について，$f(-1)=3$，$f(2)=0$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答　$a=-1$，$b=2$

解説

$f(-1)=a\cdot(-1)+b$，$f(2)=a\cdot2+b$ で，

$f(-1)=3$，$f(2)=0$ であるから　$-a+b=3$，　$2a+b=0$

この連立方程式を解くと　　$a=-1$，$b=2$

２．関数 $y=ax+b$ $(-2\leqq x\leqq1)$ の値域が $-1\leqq y\leqq4$ で，$a<0$ のとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答　$a=-\dfrac{5}{3}$，$b=\dfrac{2}{3}$

解説

$a<0$ であるから，この関数は，x の値が増加すると y の値は減少する。

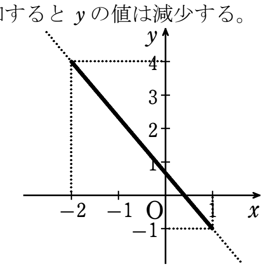
よって　　$x=-2$ のとき $y=4$，

　　　　　$x=1$ のとき $y=-1$

ゆえに　　$y=ax+b$ に代入して

　　$-2a+b=4$，　$a+b=-1$

したがって　　$a=-\dfrac{5}{3}$，$b=\dfrac{2}{3}$



３．放物線 $y=2x^2+4x-3$ を平行移動して放物線 $y=2x^2-8x$ に重ねるには，どのように平行移動すればよいか。

解答　x 軸方向に 3，y 軸方向に -3 だけ平行移動すればよい

解説

$y=2x^2+4x-3$ ……①，$y=2x^2-8x$ ……② とする。

$2x^2+4x-3=2(x^2+2\cdot1\cdot x+1^2)-2\cdot1^2-3=2(x+1)^2-5$

よって，放物線 ① の頂点は　点 $(-1,\ -5)$

$2x^2-8x=2(x^2-4x)=2(x^2-2\cdot2x+2^2)-2\cdot2^2=2(x-2)^2-8$

よって，放物線 ② の頂点は　点 $(2,\ -8)$

放物線 ① を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動して放物線 ② に移るものとすると，この移動で放物線 ① の頂点 $(-1,\ -5)$ が放物線 ② の頂点 $(2,\ -8)$ に重なるから

　　頂点のx座標について　$-1+p=2$，

　　頂点のy座標について　$-5+q=-8$　　　ゆえに　$p=3$，$q=-3$

したがって，x 軸方向に 3，y 軸方向に -3 だけ平行移動すればよい。

４．次の 2 次関数のグラフをかけ。また，その頂点と軸を求めよ。

(1)　$y=x^2+6x$　　　　(2)　$y=3x^2-6x+2$

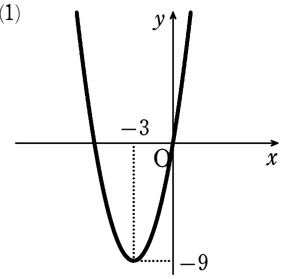
(3)　$y=2x^2-3x+1$　　　　(4)　$y=-3x^2+4x+4$

解答　グラフ，頂点，軸の順に

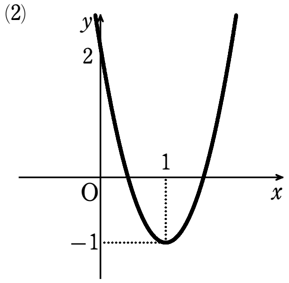
(1)　[図]，点 $(-3,\ -9)$，直線 $x=-3$　　(2)　[図]，点 $(1,\ -1)$，直線 $x=1$

(3)　[図]，点 $\left(\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{1}{8}\right)$，直線 $x=\dfrac{3}{4}$　　(4)　[図]，点 $\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{16}{3}\right)$，直線 $x=\dfrac{2}{3}$

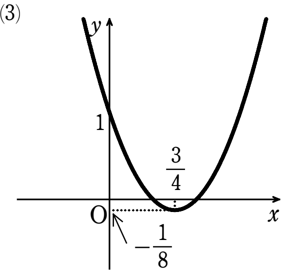
(1)



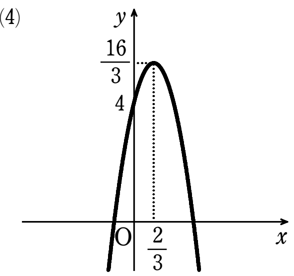
(2)



(3)



(4)



解説

(1)　$y=x^2+6x$

$=(x^2+2\cdot3x+3^2)-3^2$

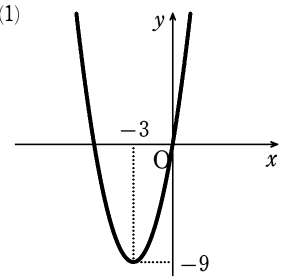
$=(x+3)^2-9$

よって，グラフは [図]。

頂点は　点 $(-3,\ -9)$

軸は　直線 $x=-3$

(1)



(2)　$y=3x^2-6x+2$

$=3(x^2-2x)+2$

$=3(x^2-2\cdot1\cdot x+1^2)-3\cdot1^2+2$

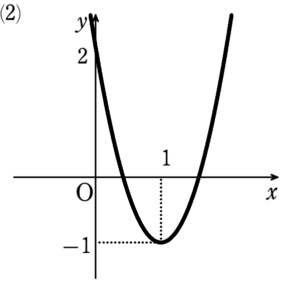
$=3(x-1)^2-1$

よって，グラフは [図]。

頂点は　点 $(1,\ -1)$

軸は　直線 $x=1$

(2)



(3)　$y=2x^2-3x+1$

$=2\left(x^2-\dfrac{3}{2}x\right)+1$

$=2\left\{x^2-2\cdot\dfrac{3}{4}x+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\right\}-2\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+1$

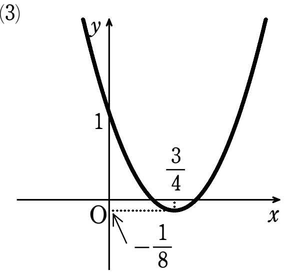
$=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$

よって，グラフは [図]。

頂点は　点 $\left(\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{1}{8}\right)$

軸は　直線 $x=\dfrac{3}{4}$

(3)



(4)　$y=-3x^2+4x+4$

$=-3\left(x^2-\dfrac{4}{3}x\right)+4$

$=-3\left\{x^2-2\cdot\dfrac{2}{3}x+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right\}+3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+4$

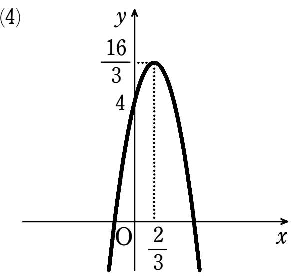
$=-3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{16}{3}$

よって，グラフは [図]。

頂点は　点 $\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{16}{3}\right)$

軸は　直線 $x=\dfrac{2}{3}$

(4)



５．関数 $y=3x^2-6x-1$ のグラフを，x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動して得られる放物線の式を求めよ。

解答　$y=3x^2+6x+2$

解説

$y=3x^2-6x-1$ を変形すると　$y=3(x-1)^2-4$

点 $(1,\ -4)$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動した点の座標は

$(1-2,\ -4+3)$　すなわち　$(-1,\ -1)$

よって，求める放物線の式は　　$y=3(x+1)^2-1$　すなわち　$y=3x^2+6x+2$

別解　$y=3x^2-6x-1$ の x を $x-(-2)$ で，y を $y-3$ でおき換えると

$y-3=3(x+2)^2-6(x+2)-1$

すなわち　　$y=3x^2+6x+2$

６．放物線 $y=3x^2+x-7$ を，次の直線または点について，それぞれ対称移動して得られる放物線の式を求めよ。

(1)　x 軸　　　　(2)　y 軸　　　　(3)　原点

解答　(1)　$y=-3x^2-x+7$　　(2)　$y=3x^2-x-7$　　(3)　$y=-3x^2+x+7$

解説

$3x^2+x-7=3\left(x^2+\dfrac{1}{3}x\right)-7=3\left\{x^2+2\cdot\dfrac{1}{6}x+\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\right\}-3\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^2-7$

$=3\left(x+\dfrac{1}{6}\right)^2-\dfrac{85}{12}$

ゆえに，放物線 $y=3x^2+x-7$ の頂点は　点 $\left(-\dfrac{1}{6},\ -\dfrac{85}{12}\right)$

(1)　移動後の頂点は　　点 $\left(-\dfrac{1}{6},\ \dfrac{85}{12}\right)$

よって，求める式は　$y=-3\left(x+\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{85}{12}$　　すなわち　　$y=-3x^2-x+7$

(2)　移動後の頂点は　　点 $\left(\dfrac{1}{6},\ -\dfrac{85}{12}\right)$

よって，求める式は　$y=3\left(x-\dfrac{1}{6}\right)^2-\dfrac{85}{12}$　　すなわち　　$y=3x^2-x-7$

(3)　移動後の頂点は　　点 $\left(\dfrac{1}{6},\ \dfrac{85}{12}\right)$

よって，求める式は　$y=-3\left(x-\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{85}{12}$　　すなわち　　$y=-3x^2+x+7$

別解　(1)　x 軸について対称移動した図形の式は，x，y をそれぞれ x，$-y$ でおき換えたものである。よって，求める式は

$-y=3x^2+x-7$　　　　すなわち　　$y=-3x^2-x+7$

(2) y 軸について対称移動した図形の式は，x，y をそれぞれ $-x$，y でおき換えたものである。よって，求める式は

$$y=3(-x)^2+(-x)-7 \qquad \text{すなわち} \qquad y=3x^2-x-7$$

(3) 原点について対称移動した図形の式は，x，y をそれぞれ $-x$，$-y$ でおき換えたものである。よって，求める式は

$$-y=3(-x)^2+(-x)-7 \qquad \text{すなわち} \qquad y=-3x^2+x+7$$

7．次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=5x^2+3$ (2) $y=-2x^2-8x+5$

解答 (1) $x=0$ のとき最小値 3，最大値はない

(2) $x=-2$ のとき最大値 13，最小値はない

解説

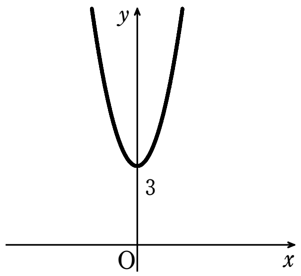
(1) $y=5x^2+3$を$y=5(x-0)^2+3$と考えて頂点$(0,3)$，軸$x=0$より

$x=0$ のとき最小値 3 をとる。最大値はない。

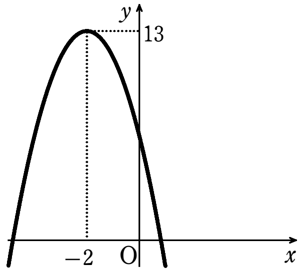
(2) $y=-2x^2-8x+5=-2(x^2+2\cdot 2x+2^2)+2\cdot 2^2+5=-2(x+2)^2+13$

よって，$x=-2$ のとき最大値 13 をとる。最小値はない。

(1)



(2)



8．次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=x^2-4x+5$ $(0\leqq x\leqq 3)$ (2) $y=-x^2-x+2$ $(-2<x<0)$

解答 (1) $x=0$ のとき最大値 5，$x=2$ のとき最小値 1

(2) $x=-\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{9}{4}$，最小値はない

解説

(1) $y=x^2-4x+5$

$=(x^2-2\cdot 2x+2^2)-2^2+5$

$=(x-2)^2+1$ $(0\leqq x\leqq 3)$

よって，グラフは右の図の実線部分である。

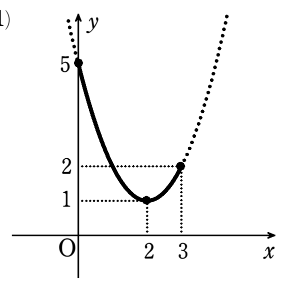
したがって，

$x=0$ のとき最大値 5，

$x=2$ のとき最小値 1

をとる。

(1)



(2) $y=-x^2-x+2$

$=-\left\{x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+2$

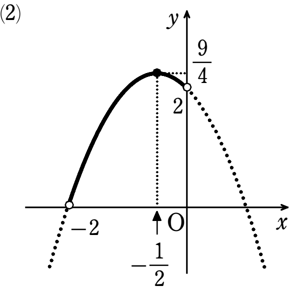
$=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$ $(-2<x<0)$

よって，グラフは右の図の実線部分である。

したがって，$x=-\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{9}{4}$ をとる。

最小値はない。

(2)



9．関数 $y=-x^2+6x+a$ $(1\leqq x\leqq 4)$ の最小値が -2 であるように，定数 a の値を定めよ。

解答 $a=-7$

解説

$-x^2+6x+a=-(x^2-2\cdot 3x+3^2)+3^2+a$

$=-(x-3)^2+9+a$

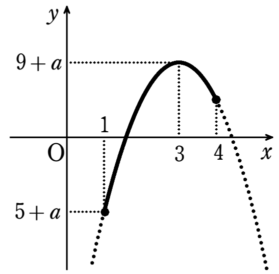
よって，与えられた関数のグラフは，右の図の実線の部分であり，この関数は

$x=1$ で最小値 $5+a$

をとる。

最小値が -2 であるための条件は $5+a=-2$

したがって $a=-7$



10．2 次関数 $y=x^2+4kx+24k$ の最小値 m を k で表せ。また，k の関数 m の最大値と，そのときの k の値を求めよ。

解答 $m=-4k^2+24k$，$k=3$ のとき最大値 36

解説

$y=x^2+4kx+24k$ を変形すると $y=(x+2k)^2-4k^2+24k$

よって，y は $x=-2k$ のとき最小値 $-4k^2+24k$ をとるから

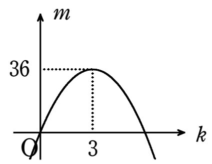
これをmと名付けるので

$m=-4k^2+24k$

これを変形すると

$m=-4(k^2-2\cdot 3k+3^2)+4\cdot 3^2=-4(k-3)^2+36$

したがって，m は $k=3$ のとき最大値 36 をとる。



11．関数 $y=x^2-2x-1$ $(0\leqq x\leqq a)$ の最大値および最小値を，次の (1)〜(4) の場合について求めよ。

(1) $0<a<1$ (2) $1\leqq a<2$ (3) $a=2$ (4) $2<a$

解答 (1) $x=0$ のとき最大値 -1，$x=a$ のとき最小値 a^2-2a-1

(2) $x=0$ のとき最大値 -1，$x=1$ のとき最小値 -2

(3) $x=0$，2 のとき最大値 -1，$x=1$ のとき最小値 -2

(4) $x=a$ のとき最大値 a^2-2a-1，$x=1$ のとき最小値 -2

解説

$$y=x^2-2x-1=(x-1)^2-2 \quad (0\leqq x\leqq a)$$

また，軸が$x=1$より，$x=0$と同じ高さになる場所は$x=2$のときである。

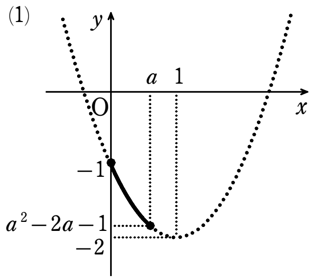
(1) $0<a<1$ のとき，グラフは図のようになる。

よって $x=0$ のとき最大値 -1， $x=a$ のとき最小値 a^2-2a-1

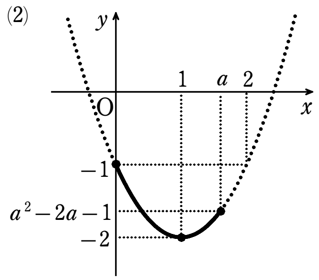
(2) $1\leqq a<2$ のとき，グラフは図のようになる。

よって $x=0$ のとき最大値 -1， $x=1$ のとき最小値 -2

(1)



(2)



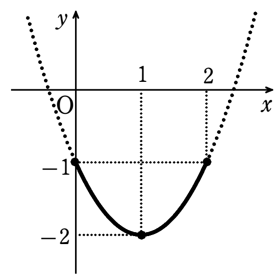
(3) $a=2$ のとき $y=(x-1)^2-2$ $(0\leqq x\leqq 2)$

よって $x=0$，2 のとき最大値 -1， $x=1$ のとき最小値 -2

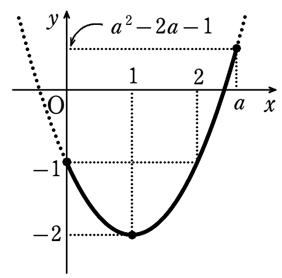
(4) $2<a$ のとき，グラフは図のようになる。

よって $x=a$ のとき最大値 a^2-2a-1， $x=1$ のとき最小値 -2

(3)



(4)



12．関数 $y=3x^2-6ax+2$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最大値および最小値を，次の (1)〜(5) の場合について求めよ。

(1) $a<0$ (2) $0\leqq a<1$ (3) $a=1$ (4) $1<a\leqq 2$ (5) $a>2$

解答 (1) $x=2$ のとき最大値 $14-12a$，$x=0$ のとき最小値 2

(2) $x=2$ のとき最大値 $14-12a$，$x=a$ のとき最小値 $-3a^2+2$

(3) $x=0$，2 のとき最大値 2，$x=1$ のとき最小値 -1

(4) $x=0$ のとき最大値 2，$x=a$ のとき最小値 $-3a^2+2$

(5) $x=0$ のとき最大値 2，$x=2$ のとき最小値 $14-12a$

解説

$y=3x^2-6ax+2$ を変形すると $y=3(x-a)^2-3a^2+2$

また代入して $x=0$ のとき $y=3\cdot 0^2-6a\cdot 0+2=2$，

$x=2$ のとき $y=3\cdot 2^2-6a\cdot 2+2=14-12a$，

$x=a$ のときは頂点のy座標より $y=-3a^2+2$

(1) $a<0$ のとき

$x=2$ のとき最大値 $14-12a$， $x=0$ のとき最小値 2

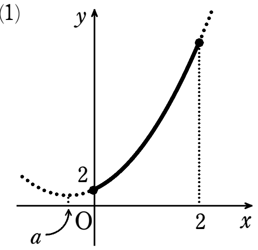
(2) $0\leqq a<1$ のとき

$x=2$ のとき最大値 $14-12a$， $x=a$ のとき最小値 $-3a^2+2$

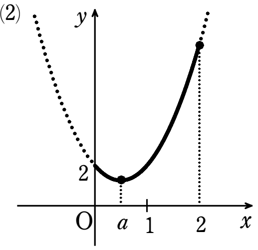
(3) $a=1$ のとき

$x=0$，2 のとき最大値 2， $x=1$ のとき最小値 -1

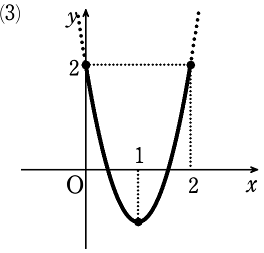
(1)



(2)



(3)



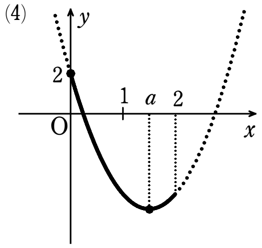
(4) $1<a\leqq 2$ のとき

$x=0$ のとき最大値 2， $x=a$ のとき最小値 $-3a^2+2$

(5) $a>2$ のとき

$x=0$ のとき最大値 2， $x=2$ のとき最小値 $14-12a$

(4)



(5)