数学演習（２次関数）Ｈ２３．６．１０　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１. 関数 $y=1-2x$ $(-2\leqq x<1)$ のグラフをかき，その値域を求めよ。

２. 次の 2 次関数のグラフをかけ。また，その頂点と軸を求めよ。

(1) $y=x^2-4$　(2) $y=-2x^2-8x-5$　(3) $y=2x^2-6x+3$

３. 次の 2 次関数のグラフをかけ。

(1) $y=\frac{1}{2}x^2+2x$　(2) $y=-\frac{1}{3}x^2-2x$

(3) $y=(x+2)(x-1)$　(4) $y=(2x+1)(x-2)$

４. 放物線 $y=2x^2+4x-3$ を平行移動して放物線 $y=2x^2-8x$ に重ねるには，どのように平行移動すればよいか。

５. 関数 $y=3x^2-6x-1$ のグラフを，x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動して得られる放物線の式を求めよ。

6．次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x^2-4x+5$　$(0\leqq x\leqq 3)$　　(2)　$y=-x^2-x+2$　$(-2<x<0)$

7．関数 $y=-x^2+6x+a$ $(1\leqq x\leqq 4)$ の最小値が -2 であるように，定数 a の値を定めよ。

8．放物線 $y=2x^2-4x+4$ を，次の直線または点について，それぞれ対称移動して得られる放物線の式を求めよ。

(1)　x 軸　　(2)　y 軸　　(3)　原点

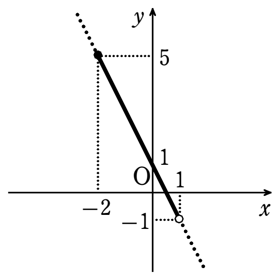
9．次の条件を満たすような定数 a の値を求めよ。

(1)　2 次関数 $y=-x^2-4x+a$ の最大値が 5 である。

(2)　2 次関数 $y=x^2+2ax+45$ の最小値が 36 である。

1．関数 $y=1-2x$ $(-2\leqq x<1)$ のグラフをかき，その値域を求めよ。

解答 [図] の実線部分。ただし，点 $(1,\ -1)$ を除く。
値域は　$-1<y\leqq 5$



解説

1 次関数 $y=1-2x$ のグラフは，傾きが -2，y 切片が 1 の直線である。

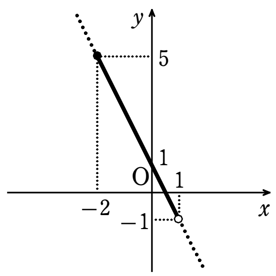
また　　$x=-2$ のとき　$y=5$

　　　　$x=1$ 　のとき　$y=-1$

よって，求めるグラフは，右図の実線部分である。

ただし，点 $(1,\ -1)$ を除く。

したがって，値域は　　$-1<y\leqq 5$



2．次の 2 次関数のグラフをかけ。また，その頂点と軸を求めよ。

(1)　$y=x^2-4$　　(2)　$y=-2x^2-8x-5$　　(3)　$y=2x^2-6x+3$

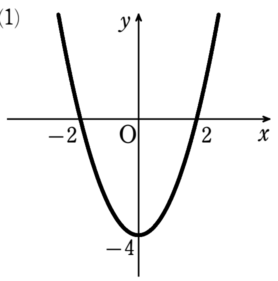
解答 グラフ，頂点，軸の順に

(1)　[図]，点 $(0,\ -4)$，直線 $x=0$

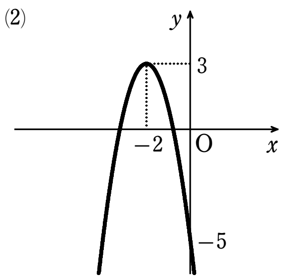
(2)　[図]，点 $(-2,\ 3)$，直線 $x=-2$

(3)　[図]，点 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$，直線 $x=\frac{3}{2}$

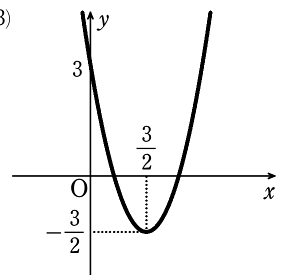
(1)



(2)



(3)



解説

(1)　グラフは [図]。

頂点は　点 $(0,\ -4)$，

軸は　直線 $x=0$

(2)　$y=-2x^2-8x-5$

$=-2(x^2+2\cdot 2x+2^2)+2\cdot 2^2-5$

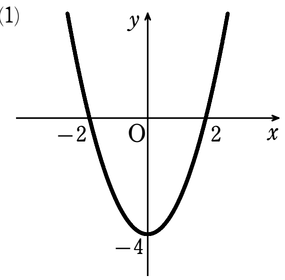
$=-2(x+2)^2+3$

よって，グラフは [図]。

頂点は　点 $(-2,\ 3)$，

軸は　直線 $x=-2$

(1)



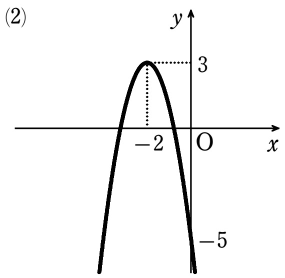
(3)　$y=2x^2-6x+3=2(x^2-3x)+3=2\left\{x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+3$

$=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$

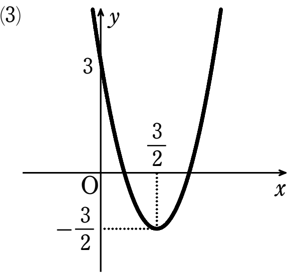
よって，グラフは [図]。

頂点は　点 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$，軸は　直線 $x=\frac{3}{2}$

(2)



(3)

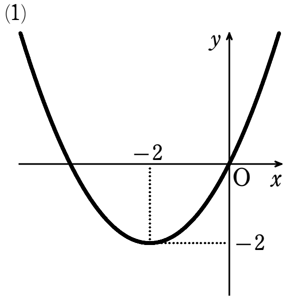


3．次の 2 次関数のグラフをかけ。

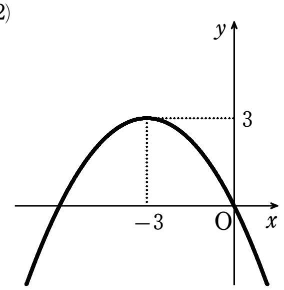
(1)　$y=\frac{1}{2}x^2+2x$　　(2)　$y=-\frac{1}{3}x^2-2x$

(3)　$y=(x+2)(x-1)$　　(4)　$y=(2x+1)(x-2)$

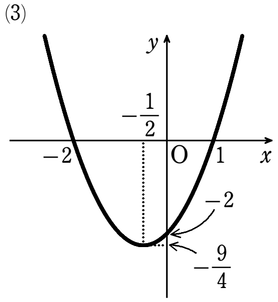
解答 (1)



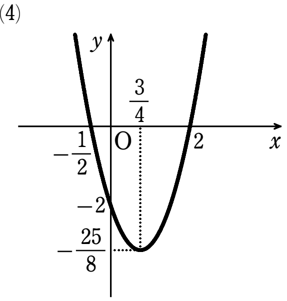
(2)



(3)



(4)



解説

(1)　$y=\frac{1}{2}x^2+2x=\frac{1}{2}(x^2+4x)$

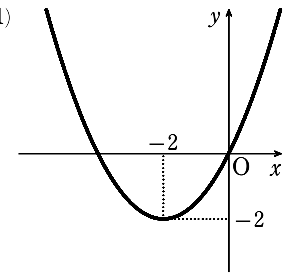
$=\frac{1}{2}(x^2+2\cdot 2x+2^2)-\frac{1}{2}\cdot 2^2$

$=\frac{1}{2}(x+2)^2-2$

グラフは [図]。頂点は　点 $(-2,\ -2)$

軸は　直線 $x=-2$

(1)



(2)　$y=-\frac{1}{3}x^2-2x$

$=-\frac{1}{3}(x^2+6x)$

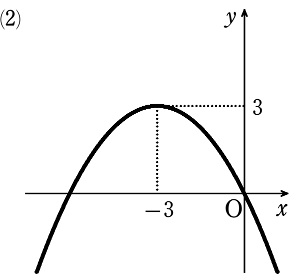
$=-\frac{1}{3}(x^2+2\cdot 3x+3^2)+\frac{1}{3}\cdot 3^2$

$=-\frac{1}{3}(x+3)^2+3$

グラフは [図]。頂点は　点 $(-3,\ 3)$

軸は　直線 $x=-3$

(2)



(3)　$y=(x+2)(x-1)=x^2+x-2$

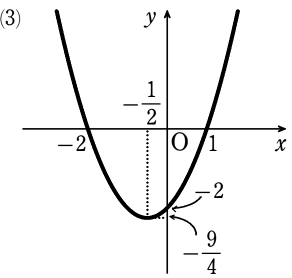
$=\left\{x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{1}{2}\right)^2-2$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

グラフは [図]。頂点は　点 $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{9}{4}\right)$

軸は　直線 $x=-\frac{1}{2}$

(3)



(4)　$y=(2x+1)(x-2)=2x^2-3x-2$

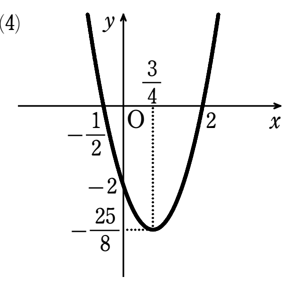
$=2\left\{x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}-2\left(\frac{3}{4}\right)^2-2$

$=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$

グラフは [図]，頂点は　点 $\left(\frac{3}{4},\ -\frac{25}{8}\right)$

軸は　直線 $x=\frac{3}{4}$

(4)



4．放物線 $y=2x^2+4x-3$ を平行移動して放物線 $y=2x^2-8x$ に重ねるには，どのように平行移動すればよいか。

解答 x 軸方向に 3，y 軸方向に -3 だけ平行移動すればよい

解説

$y=2x^2+4x-3$ …… ①，$y=2x^2-8x$ …… ② とする。

$2x^2+4x-3=2(x^2+2\cdot 1\cdot x+1^2)-2\cdot 1^2-3=2(x+1)^2-5$

よって，放物線 ① の頂点は　点 $(-1,\ -5)$

$2x^2-8x=2(x^2-4x)=2(x^2-2\cdot 2x+2^2)-2\cdot 2^2=2(x-2)^2-8$

よって，放物線 ② の頂点は　点 $(2,\ -8)$

放物線 ① を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動して放物線 ② に移るものとすると，この移動で放物線 ① の頂点 $(-1,\ -5)$ が放物線 ② の頂点 $(2,\ -8)$ に重なるから

$-1+p=2,\quad -5+q=-8$　　　　ゆえに　$p=3,\ q=-3$

したがって，x 軸方向に 3，y 軸方向に -3 だけ平行移動すればよい。

5．関数 $y=3x^2-6x-1$ のグラフを，x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動して得られる放物線の式を求めよ。

解答　$y=3x^2+6x+2$

解説

$y=3x^2-6x-1$ を変形すると　$y=3(x-1)^2-4$

点 $(1,\ -4)$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動した点の座標は

$(1-2,\ -4+3)$　すなわち　$(-1,\ -1)$

よって，求める放物線の式は　　$y=3(x+1)^2-1$　すなわち　$y=3x^2+6x+2$

別解　$y=3x^2-6x-1$ の x を $x-(-2)$ で，y を $y-3$ でおき換えると

$y-3=3(x+2)^2-6(x+2)-1$

すなわち　　$y=3x^2+6x+2$

6．次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x^2-4x+5\ (0\leqq x\leqq 3)$　　　　(2)　$y=-x^2-x+2\ (-2<x<0)$

解答　(1)　$x=0$ のとき最大値 5，$x=2$ のとき最小値 1

(2)　$x=-\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{9}{4}$，最小値はない

解説

(1)　$y=x^2-4x+5$

$=(x^2-2\cdot 2x+2^2)-2^2+5$

$=(x-2)^2+1\ (0\leqq x\leqq 3)$

よって，グラフは右の図の実線部分である。

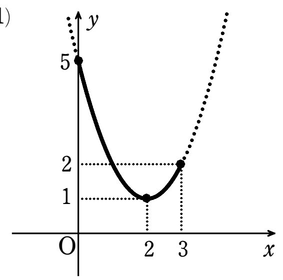
したがって，

$x=0$ のとき最大値 5，

$x=2$ のとき最小値 1

をとる。

(1)



(2)　$y=-x^2-x+2$

$=-\left\{x^2+2\cdot\dfrac{1}{2}x+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right\}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+2$

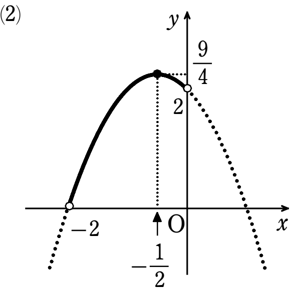
$=-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}\ (-2<x<0)$

よって，グラフは右の図の実線部分である。

したがって，$x=-\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{9}{4}$ をとる。

最小値はない。

(2)



7．関数 $y=-x^2+6x+a\ (1\leqq x\leqq 4)$ の最小値が -2 であるように，定数 a の値を定めよ。

解答　$a=-7$

解説

$-x^2+6x+a=-(x^2-2\cdot 3x+3^2)+3^2+a$

$=-(x-3)^2+9+a$

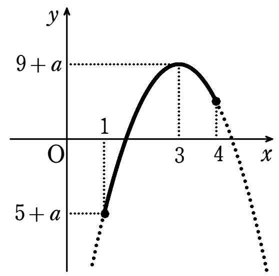
よって，与えられた関数のグラフは，右の図の実線の部分であり，この関数は

$x=1$ で最小値 $5+a$

をとる。

最小値が -2 であるための条件は　　$5+a=-2$

したがって　　$a=-7$



8．放物線 $y=2x^2-4x+4$ を，次の直線または点について，それぞれ対称移動して得られる放物線の式を求めよ。

(1)　x 軸　　　　(2)　y 軸　　　　(3)　原点

解答　(1)　$y=-2x^2+4x-4$　　(2)　$y=2x^2+4x+4$　　(3)　$y=-2x^2-4x-4$

解説

$2x^2-4x+4=2(x-1)^2+2$ から，

放物線 $y=2x^2-4x+4$ の頂点は

点 $(1,\ 2)$

(1)　移動後の頂点は　点 $(1,\ -2)$

よって　　$y=-2(x-1)^2-2$

すなわち　　$y=-2x^2+4x-4$

(2)　移動後の頂点は　点 $(-1,\ 2)$

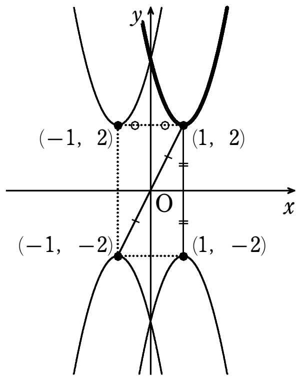
よって　　$y=2(x+1)^2+2$

すなわち　　$y=2x^2+4x+4$

(3)　移動後の頂点は　点 $(-1,\ -2)$

よって　　$y=-2(x+1)^2-2$

すなわち　　$y=-2x^2-4x-4$



9．次の条件を満たすような定数 a の値を求めよ。

(1)　2 次関数 $y=-x^2-4x+a$ の最大値が 5 である。

(2)　2 次関数 $y=x^2+2ax+45$ の最小値が 36 である。

解答　(1)　$a=1$　　(2)　$a=\pm 3$

解説

(1)　$y=-x^2-4x+a=-(x+2)^2+a+4$

この関数は $x=-2$ で最大値 $a+4$ をとるから，最大値が 5 であるための条件は

$a+4=5$　　　　よって　$a=1$

(2)　$y=x^2+2ax+45=(x+a)^2-a^2+45$

この関数は $x=-a$ で最小値 $-a^2+45$ をとるから，最小値が 36 であるための条件は

$-a^2+45=36$　　　よって　$a^2=9$　　　したがって　$a=\pm 3$