数学演習（集合と論理）Ｈ２３．１１．２９　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

1．$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ を全体集合とする。
集合 U の部分集合 A，B を $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8\}$，$B=\{1,\ 3,\ 6,\ 9\}$ とするとき，次の集合を求めよ。

(1) $\overline{A}$　　(2) $\overline{A}\cap B$　　(3) $\overline{A}\cap\overline{B}$

(4) $\overline{A}\cup\overline{B}$　　(5) $\overline{A\cap B}$　　(6) $\overline{A\cup B}$

2．実数全体を全体集合とし，その部分集合 A，B，C について，次の問いに答えよ。

(1) $A=\{x\mid -3\leqq x\leqq 2\}$，$B=\{x\mid 2x-8>0\}$，$C=\{x\mid -2<x<5\}$ とするとき，次の集合を求めよ。

（ア） $\overline{B}$　　（イ） $A\cap\overline{B}$　　（ウ） $\overline{B}\cup C$

(2) $A=\{x\mid -2\leqq x\leqq 3\}$，$B=\{x\mid k-6\leqq x\leqq k\}$（$k$ は定数）とするとき，$A\subset B$ となる k の値の範囲を求めよ。

3．$P=\{a,\ b,\ c,\ d\}$ の部分集合をすべて求めよ。

4．次の文は命題であるか。命題であるものについては，その真偽を答えよ。

(1) 3 は不等式 $x-2<3$ の解である。

(2) -3000 は小さい数である。

(3) 正方形は長方形である。

(4) 方程式 $x^2+6x-7=0$ の解は 1 である。ただし，x は実数とする。

5．次の命題の真偽を調べよ。ただし，a は実数とする。

(1) $a=5$ ならば $a^2=25$　　(2) 3 の倍数ならば 9 の倍数である。

(3) $\sqrt{a^2}=a$

6．次の命題の真偽を調べよ。ただし，文字はすべて実数とする。

(1) $x^2+x-2=0 \Longrightarrow x=1$　　(2) $x^2-6x+9=0 \Longrightarrow x=3$

(3) $ab=0 \Longrightarrow a^2+b^2=0$

(4) $a+b$ と ab はともに整数 $\Longrightarrow$ a と b はともに整数

7．集合を用いて，次の命題の真偽を調べよ。ただし，x は実数とする。

(1) $x>1$ ならば $x>0$　　(2) $x\geqq 1$ ならば $x>1$

(3) $|x|>2$ ならば $|x|>1$　　(4) $|x|\leqq 3$ ならば $|x|<1$

8．a，b，x，y は実数，n は自然数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1) n は素数である　　(2) $a=0$ かつ $b\neq 0$

(3) $x>0$ または $y>0$　　(4) n は奇数 かつ 10 より小さい

9．p，q，x は実数とする。次の命題の逆を述べ，その真偽を調べよ。

(1) $p+q$ が無理数ならば p，q はともに無理数である。

(2) $x^2-3x-4\neq 0 \Longrightarrow x\neq -1$

(3) $3x-6<0 \Longrightarrow |x|\leqq 1$

(4) △ABC が正三角形ならば △ABC の 2 つの内角は等しい。

10. 次の命題の逆と対偶を述べよ。また，逆，対偶の真偽をそれぞれ答えよ。

(1)　$x+y=3 \Longrightarrow x=1$ かつ $y=2$

(2)　$(x-1)(y+9)=0 \Longrightarrow x=1$ または $y=-9$

(3)　$x \geqq 3$ または $y \geqq 4 \Longrightarrow xy \geqq 12$

11. 次の命題の対偶を述べ，その真偽を調べよ。ただし，x は実数とする。

(1)　東京は日本の首都である。

(2)　$x^2 \fallingdotseq x \Longrightarrow x \fallingdotseq 1$ かつ $x \fallingdotseq 0$

(3)　5 の倍数ならば 10 の倍数である。

(4)　$|x| \geqq 1 \Longrightarrow 4x+8 \geqq 0$

12. 次の命題の対偶を述べ，その真偽を調べよ。ただし，x は実数とする。

(1)　$x^2 \fallingdotseq 4 \Longrightarrow |x| \fallingdotseq 2$

(2)　$|x-1|<1 \Longrightarrow 0<x<1$

(3)　2 の倍数かつ 5 の倍数である整数は，10 の倍数である。

13. x，y は実数，m，n は整数とする。次の $\boxed{}$ に，下の (ア) ～ (エ) のうち，最も適するものを入れよ。

（ア）　必要条件である　　（イ）　十分条件である

（ウ）　必要十分条件である　　（エ）　必要条件でも十分条件でもない

(1)　$x+y>0$ は $xy>0$ であるための $\boxed{}$。

(2)　m，n がともに 3 の倍数であることは，積 mn が 3 の倍数であるための $\boxed{}$。

(3)　$\triangle ABC=\triangle PQR$ は $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$ であるための $\boxed{}$。

（$\triangle ABC=\triangle PQR$ は $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ の面積が等しいことを表す。）

(4)　$x \geqq 0$ は $\sqrt{x^2}=x$ であるための $\boxed{}$。

14. a，b，x，y は実数とする。次の条件 p，q について，q は p であるための 必要条件，十分条件，必要十分条件 のいずれであるか。

(1)　$p : x=1$ かつ $y=2$　　$q : x+y=3$ かつ $x-y=-1$

(2)　$p : a^4=b^4$　　$q : a=b$

15. a，b，x，y，z は実数とする。次の $\boxed{}$ に，下の(ア)～(エ)のうち，最も適するものを入れよ。

（ア）　必要条件である　　（イ）　十分条件である

（ウ）　必要十分条件である　　（エ）　必要条件でも十分条件でもない

(1)　$xy=yz=zx=0$ は $x=y=z=0$ であるための $\boxed{}$。

(2)　$a>2$ は $a^2 \fallingdotseq 1$ であるための $\boxed{}$。

(3)　$a>b$ は $a^2>b^2$ であるための $\boxed{}$。

16. a，b，x は実数とする。次の $\boxed{}$ に必要，十分，必要十分のうち，最も適するものを入れよ。

(1)　$ax=bx$ は $a=b$ であるための $\boxed{}$ 条件

(2)　$x \fallingdotseq 0$ は $x^2 \fallingdotseq 0$ であるための $\boxed{}$ 条件

17. x，y は実数とする。次の $\boxed{}$ の中は，(ア) 必要条件，(イ) 十分条件，(ウ) 必要十分条件，(エ) 必要条件でも十分条件でもない のうち，どれが最も適当か。

(1)　$xy=0$ は $x=0$ であるための $\boxed{}$

(2)　$xy \fallingdotseq 0$ は $x \fallingdotseq 0$ であるための $\boxed{}$

(3)　$xy>1$ は $x>1$ であるための $\boxed{}$

(4)　$\triangle ABC$ の 3 辺が等しいことは，$\triangle ABC$ の 3 つの角が等しいための $\boxed{}$

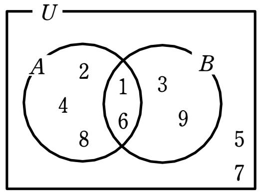
18. $\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ が無理数であることを証明せよ。

数学演習（集合と論理）Ｈ２３．１１．２９　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ を全体集合とする。
集合 U の部分集合 A，B を $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8\}$，$B=\{1,\ 3,\ 6,\ 9\}$ とするとき，次の集合を求めよ。
(1) $\overline{A}$　　(2) $\overline{A}\cap B$　　(3) $\overline{A}\cap\overline{B}$
(4) $\overline{A}\cup\overline{B}$　　(5) $\overline{A\cap B}$　　(6) $\overline{A\cup B}$

解答　(1) $\{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$　(2) $\{3,\ 9\}$　(3) $\{5,\ 7\}$　(4) $\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9\}$
(5) $\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9\}$　(6) $\{5,\ 7\}$

解説
与えられた集合の要素を図に書き込むと，右のようになる。したがって，図から

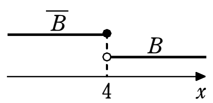


(1) $\overline{A}=\{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$
(2) $\overline{A}\cap B=\{3,\ 9\}$
(3) $\overline{A}\cap\overline{B}=\{5,\ 7\}$
(4) $\overline{A}\cup\overline{B}=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9\}$
(5) $A\cap B=\{1,\ 6\}$ であるから
$\overline{A\cap B}=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9\}$
(6) $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9\}$ であるから
$\overline{A\cup B}=\{5,\ 7\}$

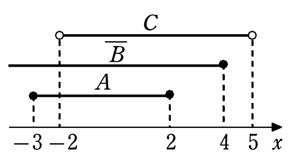
2．実数全体を全体集合とし，その部分集合 A，B，C について，次の問いに答えよ。
(1) $A=\{x\mid -3\leqq x\leqq 2\}$，$B=\{x\mid 2x-8>0\}$，$C=\{x\mid -2<x<5\}$ とするとき，次の集合を求めよ。
(ア) $\overline{B}$　　(イ) $A\cap\overline{B}$　　(ウ) $\overline{B}\cup C$
(2) $A=\{x\mid -2\leqq x\leqq 3\}$，$B=\{x\mid k-6\leqq x\leqq k\}$ (k は定数) とするとき，$A\subset B$ となる k の値の範囲を求めよ。

解答　(1) (ア) $\{x\mid x\leqq 4\}$　(イ) $\{x\mid -3\leqq x\leqq 2\}$　(ウ) $\{x\mid x<5\}$
(2) $3\leqq k\leqq 4$

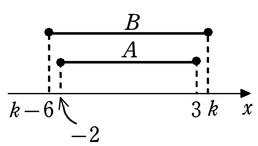
解説
(1) (ア) $2x-8>0$ を解くと
$x>4$
よって　$B=\{x\mid x>4\}$
ゆえに　$\overline{B}=\{x\mid x\leqq 4\}$



(イ) $A\cap\overline{B}=\{x\mid -3\leqq x\leqq 2\}$
(ウ) $\overline{B}\cup C=\{x\mid x<5\}$



(2) $A\subset B$ となるための条件は
$k-6\leqq -2$ ……①
$3\leqq k$ ……②
が同時に成り立つことである。



① から　$k\leqq 4$
これと ② の共通範囲を求めて　$3\leqq k\leqq 4$

3．$P=\{a,\ b,\ c,\ d\}$ の部分集合をすべて求めよ。

解答　$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{d\}$，$\{a,\ b\}$，$\{a,\ c\}$，$\{a,\ d\}$，$\{b,\ c\}$，$\{b,\ d\}$，$\{c,\ d\}$，$\{a,\ b,\ c\}$，$\{a,\ b,\ d\}$，$\{a,\ c,\ d\}$，$\{b,\ c,\ d\}$，$\{a,\ b,\ c,\ d\}$

解説
$\varnothing$ や P 自身も P の部分集合であるから，以下の 16 個である。
$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{d\}$，$\{a,\ b\}$，$\{a,\ c\}$，$\{a,\ d\}$，$\{b,\ c\}$，$\{b,\ d\}$，$\{c,\ d\}$，$\{a,\ b,\ c\}$，$\{a,\ b,\ d\}$，$\{a,\ c,\ d\}$，$\{b,\ c,\ d\}$，$\{a,\ b,\ c,\ d\}$

4．次の文は命題であるか。命題であるものについては，その真偽を答えよ。
(1) 3 は不等式 $x-2<3$ の解である。
(2) -3000 は小さい数である。
(3) 正方形は長方形である。
(4) 方程式 $x^2+6x-7=0$ の解は 1 である。ただし，x は実数とする。

解答　(1) 命題である，真　(2) 命題でない　(3) 命題である，真
(4) 命題である，偽

解説
(1) $3-2<3$ であるから，この文は正しい。
すなわち，真の命題である。
(2) 「小さい」の意味が明確でないから，この文は正しいか正しくないかが定まらない。
よって，命題でない。
(3) 正方形は長方形の特別な場合であるから，この文は正しい。
すなわち，真の命題である。
(4) $x^2+6x-7=0$ を解くと，$(x-1)(x+7)=0$ から　$x=1,\ -7$
よって，$x^2+6x-7=0$ の解は，1 または -7 であるから，与えられた文は正しくない。すなわち，偽の命題である。

5．次の命題の真偽を調べよ。ただし，a は実数とする。
(1) $a=5$ ならば $a^2=25$　　(2) 3 の倍数ならば 9 の倍数である。
(3) $\sqrt{a^2}=a$

解答　(1) 真　(2) 偽　(3) 偽

解説
(1) $a=5$ ならば　$a^2=5^2=25$　　よって　真
(2) 3 は 3 の倍数であるが，9 の倍数ではない。　よって　偽
(3) $a=-1$ のとき　$\sqrt{a^2}=\sqrt{1}=1\,(\neq -1)$　　よって　偽

6．次の命題の真偽を調べよ。ただし，文字はすべて実数とする。
(1) $x^2+x-2=0 \Longrightarrow x=1$　　(2) $x^2-6x+9=0 \Longrightarrow x=3$
(3) $ab=0 \Longrightarrow a^2+b^2=0$
(4) $a+b$ と ab はともに整数 $\Longrightarrow$ a と b はともに整数

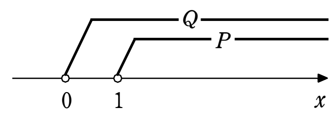
解答　(1) 偽　(2) 真　(3) 偽　(4) 偽

解説
(1) $x=-2$ とすると，$x^2+x-2=0$ であるが，$x=1$ ではない。
よって　偽
(2) $x^2-6x+9=0$ ならば　$(x-3)^2=0$　　したがって　$x=3$
よって　真
(3) $a=0$，$b=1$ とすると，$ab=0$ であるが　$a^2+b^2=1\,(\neq 0)$
よって　偽
(4) $a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$ とすると，$a+b=0$ (整数)，$ab=-2$ (整数) であるが，a と b はともに整数ではない。
よって　偽

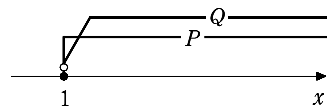
7．集合を用いて，次の命題の真偽を調べよ。ただし，x は実数とする。
(1) $x>1$ ならば $x>0$　　(2) $x\geqq 1$ ならば $x>1$
(3) $|x|>2$ ならば $|x|>1$　　(4) $|x|\leqq 3$ ならば $|x|<1$

解答　(1) 真　(2) 偽　(3) 真　(4) 偽

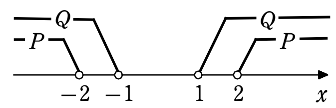
解説
(1) $P=\{x\mid x>1\}$，$Q=\{x\mid x>0\}$ とおく。
P，Q は右の図のようになり　$P\subset Q$
<u>（$P\subset Q$はPがQにすっぽり入る）</u>
したがって，与えられた命題は真である。



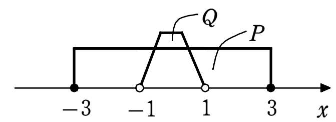
(2) $P=\{x\mid x\geqq 1\}$，$Q=\{x\mid x>1\}$ とおく。
P，Q は右の図のようになり，$P\subset Q$ とはならない。
したがって，与えられた命題は偽である。



(3) $P=\{x\mid |x|>2\}$，$Q=\{x\mid |x|>1\}$ とおく。
$|x|>2$ から　$x<-2$ または $2<x$
$|x|>1$ から　$x<-1$ または $1<x$
よって　$P=\{x\mid x<-2$ または $2<x\}$，
$Q=\{x\mid x<-1$ または $1<x\}$
ゆえに，P，Q は右の図のようになり　$P\subset Q$
したがって，与えられた命題は真である。



(4) $P=\{x\mid |x|\leqq 3\}$，$Q=\{x\mid |x|<1\}$ とおく。
$|x|\leqq 3$ から　$-3\leqq x\leqq 3$
$|x|<1$ から　$-1<x<1$
よって　$P=\{x\mid -3\leqq x\leqq 3\}$，
$Q=\{x\mid -1<x<1\}$
ゆえに，P，Q は右の図のようになり，$P\subset Q$ とはならない。
したがって，与えられた命題は偽である。



8．a，b，x，y は実数，n は自然数とする。次の条件の否定を述べよ。
(1) n は素数である　　(2) $a=0$ かつ $b\neq 0$
(3) $x>0$ または $y>0$　　(4) n は奇数 かつ 10 より小さい

解答　(1) n は素数でない　(2) $a\neq 0$ または $b=0$　(3) $x\leqq 0$ かつ $y\leqq 0$
(4) n は偶数 または 10 以上

解説
(1) n は素数でない　　(2) $a\neq 0$ または $b=0$
(3) $x\leqq 0$ かつ $y\leqq 0$　　(4) n は偶数 または 10 以上

9．p，q，x は実数とする。次の命題の逆を述べ，その真偽を調べよ。
(1) $p+q$ が無理数ならば p，q はともに無理数である。
(2) $x^2-3x-4\neq 0 \Longrightarrow x\neq -1$
(3) $3x-6<0 \Longrightarrow |x|\leqq 1$
(4) △ABC が正三角形ならば △ABC の 2 つの内角は等しい。

解答　(1) p，q がともに無理数ならば $p+q$ は無理数である，偽
(2) $x\neq -1 \Longrightarrow x^2-3x-4\neq 0$，偽
(3) $|x|\leqq 1 \Longrightarrow 3x-6<0$，真
(4) △ABC の 2 つの内角が等しいならば △ABC は正三角形である，偽

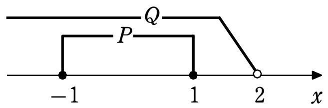
解説
(1) 逆：「p，q がともに無理数ならば $p+q$ は無理数である。」
これは　偽　　反例：$p=\sqrt{2}$，$q=-\sqrt{2}$
(2) 逆：「$x\neq -1 \Longrightarrow x^2-3x-4\neq 0$」
これは　偽　　反例：$x=4$
(3) 逆：「$|x|\leqq 1 \Longrightarrow 3x-6<0$」
$P=\{x\mid |x|\leqq 1\}$，$Q=\{x\mid 3x-6<0\}$ とおく。

$|x|\leqq 1$ から　　$-1\leqq x\leqq 1$

$3x-6<0$ から　　$x<2$

よって　$P=\{x\mid -1\leqq x\leqq 1\}$，$Q=\{x\mid x<2\}$

ゆえに，P，Q は右の図のようになり　$P\subset Q$



よって，逆は真である。

(4)　逆：「△ABC の 2 つの内角が等しいならば △ABC は正三角形である。」

これは　偽　　反例：AB＝AC である直角二等辺三角形 ABC

10. 次の命題の逆と対偶を述べよ。また，逆，対偶の真偽をそれぞれ答えよ。

(1)　$x+y=3 \Longrightarrow x=1$ かつ $y=2$

(2)　$(x-1)(y+9)=0 \Longrightarrow x=1$ または $y=-9$

(3)　$x\geqq 3$ または $y\geqq 4 \Longrightarrow xy\geqq 12$

解答　(1)　逆：$x=1$ かつ $y=2 \Longrightarrow x+y=3$，真

対偶：$x\neq 1$ または $y\neq 2 \Longrightarrow x+y\neq 3$，偽

(2)　逆：$x=1$ または $y=-9 \Longrightarrow (x-1)(y+9)=0$，真

対偶：$x\neq 1$ かつ $y\neq -9 \Longrightarrow (x-1)(y+9)\neq 0$，真

(3)　逆：$xy\geqq 12 \Longrightarrow x\geqq 3$ または $y\geqq 4$，偽

対偶：$xy<12 \Longrightarrow x<3$ かつ $y<4$，偽

解説

(1)　逆：「$x=1$ かつ $y=2 \Longrightarrow x+y=3$」　　これは　真

対偶：「$x\neq 1$ または $y\neq 2 \Longrightarrow x+y\neq 3$」

ここで，与えられた命題は　偽　　反例：$x=0$，$y=3$

したがって，対偶も　偽

(2)　逆：「$x=1$ または $y=-9 \Longrightarrow (x-1)(y+9)=0$」

$x=1$ ならば　　$x-1=0$　　よって　　$(x-1)(y+9)=0$

$y=-9$ ならば　　$y+9=0$　　ゆえに　　$(x-1)(y+9)=0$

よって，逆は　真

対偶：「$x\neq 1$ かつ $y\neq -9 \Longrightarrow (x-1)(y+9)\neq 0$」

ここで，与えられた命題について

$(x-1)(y+9)=0$ ならば　　$x-1=0$ または $y+9=0$

すなわち　　$x=1$ または $y=-9$　　　よって　真

したがって，対偶も　真

(3)　逆：「$xy\geqq 12 \Longrightarrow x\geqq 3$ または $y\geqq 4$」

これは　偽　　反例：$x=-3$，$y=-4$

対偶：「$xy<12 \Longrightarrow x<3$ かつ $y<4$」

ここで，与えられた命題は　偽　　反例：$x=3$，$y=0$

したがって，対偶も　偽

11. 次の命題の対偶を述べ，その真偽を調べよ。ただし，x は実数とする。

(1)　東京は日本の首都である。　　(2)　$x^2\neq x \Longrightarrow x\neq 1$ かつ $x\neq 0$

(3)　5 の倍数ならば 10 の倍数である。　　(4)　$|x|\geqq 1 \Longrightarrow 4x+8\geqq 0$

解答　(1)　日本の首都でなければ東京でない，真

(2)　$x=1$ または $x=0 \Longrightarrow x^2=x$，真

(3)　10 の倍数でなければ 5 の倍数でない，偽

(4)　$4x+8<0 \Longrightarrow |x|<1$，偽

解説

(1)　対偶：「日本の首都でなければ東京でない。」

これは　真

(2)　対偶：「$x=1$ または $x=0 \Longrightarrow x^2=x$」

$x=1$ のとき　　$x^2=1$　　よって　　$x^2=x$

$x=0$ のとき　　$x^2=0$　　よって　　$x^2=x$

したがって，対偶は　真

(3)　対偶：「10 の倍数でなければ 5 の倍数でない。」

これは　偽　　反例：5

(4)　対偶：「$4x+8<0 \Longrightarrow |x|<1$」

これは　偽　　反例：$x=-3$

12. 次の命題の対偶を述べ，その真偽を調べよ。ただし，x は実数とする。

(1)　$x^2\neq 4 \Longrightarrow |x|\neq 2$　　(2)　$|x-1|<1 \Longrightarrow 0<x<1$

(3)　2 の倍数かつ 5 の倍数である整数は，10 の倍数である。

解答　(1)　$|x|=2 \Longrightarrow x^2=4$，真

(2)　$x\leqq 0$ または $1\leqq x \Longrightarrow |x-1|\geqq 1$，偽

(3)　10 の倍数でない整数は，2 の倍数でないまたは 5 の倍数でない，真

解説

(1)　対偶：「$|x|=2 \Longrightarrow x^2=4$」

$|x|=2$ ならば　　$x=\pm 2$　　$x=\pm 2$ のとき　　$x^2=4$

よって，対偶は　真

(2)　対偶：「$x\leqq 0$ または $1\leqq x \Longrightarrow |x-1|\geqq 1$」

これは　偽　　反例：$x=1$

(3)　対偶：「10 の倍数でない整数は，2 の倍数でないまたは 5 の倍数でない。」

もとの命題は真であるから，対偶も　真

13. x，y は実数，m，n は整数とする。次の $\boxed{}$ に，下の (ア) ～ (エ) のうち，最も適するものを入れよ。

(ア)　必要条件である　　(イ)　十分条件である

(ウ)　必要十分条件である　　(エ)　必要条件でも十分条件でもない

(1)　$x+y>0$ は $xy>0$ であるための $\boxed{}$。

(2)　m，n がともに 3 の倍数であることは，積 mn が 3 の倍数であるための $\boxed{}$。

(3)　△ABC＝△PQR は △ABC≡△PQR であるための $\boxed{}$。

（△ABC＝△PQR は △ABC と △PQR の面積が等しいことを表す。）

(4)　$x\geqq 0$ は $\sqrt{x^2}=x$ であるための $\boxed{}$。

解答　(1)　(エ)　　(2)　(イ)　　(3)　(ア)　　(4)　(ウ)

解説

(1)　$x+y>0 \Longrightarrow xy>0$ は偽。反例：$x=1$，$y=0$

$xy>0 \Longrightarrow x+y>0$ も偽。反例：$x=-1$，$y=-1$

よって，必要条件でも十分条件でもない。(エ)

(2)　m，n がともに 3 の倍数ならば，$m=3k$，$n=3l$ (k，l は整数) とおける。

このとき　　$mn=9kl=3\cdot 3kl$

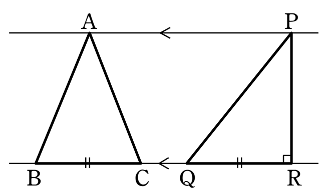
したがって，m，n がともに 3 の倍数 $\Longrightarrow$ 積 mn が 3 の倍数 は真。

一方，積 mn が 3 の倍数 $\Longrightarrow$ m，n がともに 3 の倍数 は偽。　反例：$m=3$，$n=1$

よって，十分条件である。(イ)

(3)　△ABC＝△PQR $\Longrightarrow$ △ABC≡△PQR は偽。

反例：右の △ABC と △PQR



一方，△ABC≡△PQR $\Longrightarrow$ △ABC＝△PQR は真。

よって，必要条件である。(ア)

(4)　$\sqrt{x^2}=\begin{cases} x & (x\geqq 0 \text{ のとき}) \\ -x & (x<0 \text{ のとき}) \end{cases}$ であるから

$x\geqq 0 \Longrightarrow \sqrt{x^2}=x$ は真。　　$\sqrt{x^2}=x \Longrightarrow x\geqq 0$ も真。

よって，必要十分条件である。(ウ)

14. a，b，x，y は実数とする。次の条件 p，q について，q は p であるための 必要条件，十分条件，必要十分条件 のいずれであるか。

(1)　p：$x=1$ かつ $y=2$　　q：$x+y=3$ かつ $x-y=-1$

(2)　p：$a^4=b^4$　　q：$a=b$

解答　(1)　必要十分条件　　(2)　十分条件

解説

(1)　$p \Longrightarrow q$ は真。

q の連立方程式を解くと，$x=1$ かつ $y=2$ であるから，$q \Longrightarrow p$ も真。

よって　　必要十分条件

(2)　$p \Longrightarrow q$ は偽。　反例：$a=1$，$b=-1$　　$q \Longrightarrow p$ は真。

よって　　十分条件

15. a，b，x，y，z は実数とする。次の $\boxed{}$ に，下の(ア)～(エ)のうち，最も適するものを入れよ。

(ア)　必要条件である　　(イ)　十分条件である

(ウ)　必要十分条件である　　(エ)　必要条件でも十分条件でもない

(1)　$xy=yz=zx=0$ は $x=y=z=0$ であるための $\boxed{}$。

(2)　$a>2$ は $a^2\neq 1$ であるための $\boxed{}$。

(3)　$a>b$ は $a^2>b^2$ であるための $\boxed{}$。

解答　(1)　(ア)　　(2)　(イ)　　(3)　(エ)

解説

(1)　$xy=yz=zx=0 \Longrightarrow x=y=z=0$ は偽。反例：$x=y=0$，$z=1$

$x=y=z=0 \Longrightarrow xy=yz=zx=0$ は真。　　よって　　(ア)

(2)　$a>2 \Longrightarrow a^2\neq 1$ は真。$a^2\neq 1 \Longrightarrow a>2$ は偽。反例：$a=0$

よって　　(イ)

(3)　$a>b \Longrightarrow a^2>b^2$ は偽。反例：$a=0$，$b=-1$

$a^2>b^2 \Longrightarrow a>b$ も偽。反例：$a=-1$，$b=0$　　　よって　　(エ)

16. a，b，x は実数とする。次の $\boxed{}$ に必要，十分，必要十分のうち，最も適するものを入れよ。

(1)　$ax=bx$ は $a=b$ であるための $\boxed{}$ 条件

(2)　$x\neq 0$ は $x^2\neq 0$ であるための $\boxed{}$ 条件

解答　(1)　必要　　(2)　必要十分

解説

(1)　$ax=bx \Longrightarrow a=b$ は偽。　反例：$a=1$，$b=2$，$x=0$

また，$a=b \Longrightarrow ax=bx$ は真。

したがって　　必要条件

(2)　$x\neq 0 \Longrightarrow x^2\neq 0$ は真。　　$x^2\neq 0 \Longrightarrow x\neq 0$ も真。

したがって　　必要十分条件

17. x，y は実数とする。次の $\boxed{}$ の中は，(ア) 必要条件，(イ) 十分条件，(ウ) 必要十分条件，(エ) 必要条件でも十分条件でもない のうち，どれが最も適当か。

(1)　$xy=0$ は $x=0$ であるための $\boxed{}$

(2)　$xy\neq 0$ は $x\neq 0$ であるための $\boxed{}$

(3)　$xy>1$ は $x>1$ であるための $\boxed{}$

(4)　△ABC の 3 辺が等しいことは，△ABC の 3 つの角が等しいための $\boxed{}$

解答　(1) (ア)　必要条件　　(2) (イ)　十分条件
(3) (エ)　必要条件でも十分条件でもない　　(4) (ウ)　必要十分条件

解説

(1)　$xy=0 \Longrightarrow x=0$　は　偽　(反例：$x=1$，$y=0$)
$x=0 \Longrightarrow xy=0$　は　真
ゆえに　(ア)　必要条件

(2)　$xy\neq 0 \Longrightarrow x\neq 0$　は　真
$x\neq 0 \Longrightarrow xy\neq 0$　は　偽　(反例：$x=1$，$y=0$)
ゆえに　(イ)　十分条件

(3)　$xy>1 \Longrightarrow x>1$　は　偽　(反例：$x=y=-2$)
$x>1 \Longrightarrow xy>1$　は　偽　(反例：$x=2$，$y=-1$)
ゆえに　(エ)　必要条件でも十分条件でもない

(4)　p：△ABC の 3 辺は等しい　　q：△ABC の 3 つの角は等しい　とする。
($p \Longrightarrow q$)　△ABC において　AB＝BC＝CA
AB＝BC から　∠C＝∠A　　BC＝CA から　∠A＝∠B
よって　∠A＝∠B＝∠C　　ゆえに，$p \Longrightarrow q$ は　真
($q \Longrightarrow p$)　△ABC において　∠A＝∠B＝∠C
∠A＝∠B から　BC＝CA　　∠B＝∠C から　CA＝AB
よって　AB＝BC＝CA　　ゆえに，$q \Longrightarrow p$ は　真
したがって　(ウ)　必要十分条件

18. $\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ が無理数であることを証明せよ。

解答　略

解説

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ が無理数でないと仮定すると，r を有理数として，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}=r$ とおける。

両辺を 2 乗すると　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{6}=r^2$　　よって　$\sqrt{3}=3r^2-2$　……①

ここで，r は有理数であるから，$3r^2-2$ も有理数である。

ゆえに，① は $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ は無理数である。