数学演習（集合と論理）Ｈ２３．１２．５　　　　(　)組(　)番　名前(　　　)

１．実数 a に対して，2つの集合を
$$A=\{a-1,\ 4,\ a^2-5a+6\},\ B=\{1,\ a^2-4,\ a^2-7a+12,\ 4\}$$
とする。$A\cap B=\{0,\ 4\}$ であるとき，a の値を求めよ。

２．次の命題の真偽を調べよ。ただし，a は実数とする。
(1)　$a=5$ ならば $a^2=25$　　(2)　3の倍数ならば9の倍数である。
(3)　$\sqrt{a^2}=a$

３．次の命題の真偽を調べよ。ただし，文字はすべて実数とする。
(1)　$x^2+x-2=0 \Longrightarrow x=1$　　(2)　$x^2-6x+9=0 \Longrightarrow x=3$
(3)　$ab=0 \Longrightarrow a^2+b^2=0$
(4)　$a+b$ と ab はともに整数 $\Longrightarrow$ a と b はともに整数

４．次の命題の真偽を調べよ。ただし，x は実数とする。
(1)　$x>1$ ならば $x>0$　　(2)　$|x|>2$ ならば $|x|>1$

５．a，b，x，y は実数，n は自然数とする。次の条件の否定を述べよ。
(1)　n は素数である　　(2)　$a=0$ かつ $b\fallingdotseq 0$
(3)　$x>0$ または $y>0$

６．p，q は実数とする。次の命題の逆を述べ，その真偽を調べよ。
(1)　$p+q$ が無理数ならば p，q はともに無理数である。
(2)　△ABC が正三角形ならば △ABC の2つの内角は等しい。

７．次の命題の逆と対偶を述べよ。また，逆，対偶の真偽をそれぞれ答えよ。
(1)　$(x-1)(y+9)=0 \Longrightarrow x=1$ または $y=-9$
(2)　$x\geqq 3$ または $y\geqq 4 \Longrightarrow xy\geqq 12$

８．x，y は実数，m，n は整数とする。次の $\boxed{}$ に，下の(ア)～(エ)のうち，最も適するものを入れよ。
(ア)　必要条件である　　(イ)　十分条件である
(ウ)　必要十分条件である　　(エ)　必要条件でも十分条件でもない
(1)　$x+y>0$ は $xy>0$ であるための $\boxed{}$。
(2)　m，n がともに3の倍数であることは，積 mn が3の倍数であるための $\boxed{}$。
(3)　△ABC＝△PQR は △ABC≡△PQR であるための $\boxed{}$。
（△ABC＝△PQR は △ABC と △PQR の面積が等しいことを表す。）
(4)　$x\geqq 0$ は $\sqrt{x^2}=x$ であるための $\boxed{}$。

9．a，b，x，y は実数とする。次の条件 p，q について，q は p であるための 必要条件，十分条件，必要十分条件 のいずれであるか。

(1)　$p : x=1$ かつ $y=2$　　$q : x+y=3$ かつ $x-y=-1$

(2)　$p : a^4=b^4$　　$q : a=b$

10. a，b，x，y，z は実数とする。次の $\boxed{}$ に，下の(ア)～(エ)のうち，最も適するものを入れよ。

（ア）　必要条件である　　　（イ）　十分条件である

（ウ）　必要十分条件である　　　（エ）　必要条件でも十分条件でもない

(1)　$xy=yz=zx=0$ は $x=y=z=0$ であるための $\boxed{}$。

(2)　$a>2$ は $a^2 \neq 1$ であるための $\boxed{}$。

(3)　$a>b$ は $a^2>b^2$ であるための $\boxed{}$。

11. a，b，x は実数とする。次の $\boxed{}$ に必要，十分，必要十分のうち，最も適するものを入れよ。

(1)　$ax=bx$ は $a=b$ であるための $\boxed{}$ 条件

(2)　$x \neq 0$ は $x^2 \neq 0$ であるための $\boxed{}$ 条件

12. x，y は実数とする。次の $\boxed{}$ の中は，（ア）必要条件，（イ）十分条件，（ウ）必要十分条件，（エ）必要条件でも十分条件でもない のうち，どれが最も適当か。

(1)　$xy=0$ は $x=0$ であるための $\boxed{}$

(2)　$xy \neq 0$ は $x \neq 0$ であるための $\boxed{}$

(3)　$xy>1$ は $x>1$ であるための $\boxed{}$

(4)　△ABC の 3 辺が等しいことは，△ABC の 3 つの角が等しいための $\boxed{}$

13. 整数 n の平方が 3 の倍数ならば，n は 3 の倍数であることを証明せよ。

14. 対偶を考えることにより，次の命題を証明せよ。ただし，a，b，c は整数とする。

(1)　$a^2+b^2+c^2$ が偶数ならば，a，b，c のうち少なくとも 1 つは偶数である。

(2)　$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ が奇数ならば，a，b，c のうち奇数の個数は 1 個または 2 個である。

数学演習（集合と論理）Ｈ２３．１２．５　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．実数 a に対して，2 つの集合を

$$A=\{a-1,\ 4,\ a^2-5a+6\},\ B=\{1,\ a^2-4,\ a^2-7a+12,\ 4\}$$

とする。$A\cap B=\{0,\ 4\}$ であるとき，a の値を求めよ。

解答　$a=3$

解説

$A\cap B=\{0,\ 4\}$ より $0\in A$ であるから

$a-1=0$　または　$a^2-5a+6=0$

[1]　$a-1=0$ すなわち $a=1$ のとき

$A=\{0,\ 2,\ 4\}$，$B=\{-3,\ 1,\ 4,\ 6\}$

よって，$0\notin B$ となるから，条件に適さない。

[2]　$a^2-5a+6=0$ のとき　$(a-2)(a-3)=0$

したがって　$a=2,\ 3$

(i)　$a=2$ の場合　$A=\{0,\ 1,\ 4\}$，$B=\{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$

よって，$A\cap B=\{0,\ 1,\ 4\}$ となるから，条件に適さない。

(ii)　$a=3$ の場合　$A=\{0,\ 2,\ 4\}$，$B=\{0,\ 1,\ 4,\ 5\}$

よって，$A\cap B=\{0,\ 4\}$ となるから，条件に適する。

以上から，求める a の値は　$a=3$

2．次の命題の真偽を調べよ。ただし，a は実数とする。

(1)　$a=5$ ならば $a^2=25$　　(2)　3 の倍数ならば 9 の倍数である。

(3)　$\sqrt{a^2}=a$

解答　(1)　真　(2)　偽　(3)　偽

解説

(1)　$a=5$ ならば　$a^2=5^2=25$　　よって　真

(2)　3 は 3 の倍数であるが，9 の倍数ではない。　よって　偽

(3)　$a=-1$ のとき　$\sqrt{a^2}=\sqrt{1}=1\ (\neq -1)$　よって　偽

3．次の命題の真偽を調べよ。ただし，文字はすべて実数とする。

(1)　$x^2+x-2=0 \Longrightarrow x=1$　　(2)　$x^2-6x+9=0 \Longrightarrow x=3$

(3)　$ab=0 \Longrightarrow a^2+b^2=0$

(4)　$a+b$ と ab はともに整数 $\Longrightarrow$ a と b はともに整数

解答　(1)　偽　(2)　真　(3)　偽　(4)　偽

解説

(1)　$x=-2$ とすると，$x^2+x-2=0$ であるが，$x=1$ ではない。

よって　偽

(2)　$x^2-6x+9=0$ ならば　$(x-3)^2=0$　　したがって　$x=3$

よって　真

(3)　$a=0$，$b=1$ とすると，$ab=0$ であるが　$a^2+b^2=1\ (\neq 0)$

よって　偽

(4)　$a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$ とすると，$a+b=0$ (整数)，$ab=-2$ (整数) であるが，a と b はともに整数ではない。

よって　偽

4．次の命題の真偽を調べよ。ただし，x は実数とする。

(1)　$x>1$ ならば $x>0$　　(2)　$|x|>2$ ならば $|x|>1$

解答　(1)　真　(2)　真

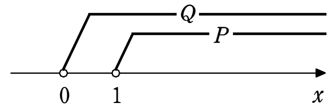
解説

(1)　$P=\{x \mid x>1\}$，$Q=\{x \mid x>0\}$ とおく。

P，Q は右の図のようになり　$P\subset Q$

（$P\subset Q$はPがQにすっぽり入る）

したがって，与えられた命題は真である。



(2)　$P=\{x \mid |x|>2\}$，$Q=\{x \mid |x|>1\}$ とおく。

$|x|>2$ から　$x<-2$ または $2<x$

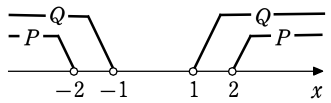
$|x|>1$ から　$x<-1$ または $1<x$

よって　$P=\{x \mid x<-2$ または $2<x\}$，

$Q=\{x \mid x<-1$ または $1<x\}$

ゆえに，P，Q は右の図のようになり　$P\subset Q$

したがって，与えられた命題は真である。



5．a，b，x，y は実数，n は自然数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1)　n は素数である　　(2)　$a=0$ かつ $b\neq 0$

(3)　$x>0$ または $y>0$

解答　(1)　n は素数でない　(2)　$a\neq 0$ または $b=0$　(3)　$x\leqq 0$ かつ $y\leqq 0$

解説

(1)　n は素数でない　　(2)　$a\neq 0$ または $b=0$

(3)　$x\leqq 0$ かつ $y\leqq 0$

6．p，q は実数とする。次の命題の逆を述べ，その真偽を調べよ。

(1)　$p+q$ が無理数ならば p，q はともに無理数である。

(2)　△ABC が正三角形ならば △ABC の 2 つの内角は等しい。

解答　(1)　p，q がともに無理数ならば $p+q$ は無理数である，偽

(2)　△ABC の 2 つの内角が等しいならば △ABC は正三角形である，偽

解説

(1)　逆：「p，q がともに無理数ならば $p+q$ は無理数である。」

これは　偽　　反例：$p=\sqrt{2}$，$q=-\sqrt{2}$

(2)　逆：「△ABC の 2 つの内角が等しいならば △ABC は正三角形である。」

これは　偽　　反例：AB＝AC である直角二等辺三角形 ABC

7．次の命題の逆と対偶を述べよ。また，逆，対偶の真偽をそれぞれ答えよ。

(1)　$(x-1)(y+9)=0 \Longrightarrow x=1$ または $y=-9$

(2)　$x\geqq 3$ または $y\geqq 4 \Longrightarrow xy\geqq 12$

解答　(1)　逆：$x=1$ または $y=-9 \Longrightarrow (x-1)(y+9)=0$，真

対偶：$x\neq 1$ かつ $y\neq -9 \Longrightarrow (x-1)(y+9)\neq 0$，真

(2)　逆：$xy\geqq 12 \Longrightarrow x\geqq 3$ または $y\geqq 4$，偽

対偶：$xy<12 \Longrightarrow x<3$ かつ $y<4$，偽

解説

(1)　逆：「$x=1$ または $y=-9 \Longrightarrow (x-1)(y+9)=0$」

$x=1$ ならば　$x-1=0$　　よって　$(x-1)(y+9)=0$

$y=-9$ ならば　$y+9=0$　　ゆえに　$(x-1)(y+9)=0$

よって，逆は　真

対偶：「$x\neq 1$ かつ $y\neq -9 \Longrightarrow (x-1)(y+9)\neq 0$」

ここで，与えられた命題について

$(x-1)(y+9)=0$ ならば　$x-1=0$ または $y+9=0$

すなわち　$x=1$ または $y=-9$　　よって　真

したがって，対偶も　真

(2)　逆：「$xy\geqq 12 \Longrightarrow x\geqq 3$ または $y\geqq 4$」

これは　偽　　反例：$x=-3$，$y=-4$

対偶：「$xy<12 \Longrightarrow x<3$ かつ $y<4$」

ここで，与えられた命題は　偽　　反例：$x=3$，$y=0$

したがって，対偶も　偽

8．x，y は実数，m，n は整数とする。次の $\boxed{}$ に，下の (ア)～(エ) のうち，最も適するものを入れよ。

(ア)　必要条件である　　(イ)　十分条件である

(ウ)　必要十分条件である　　(エ)　必要条件でも十分条件でもない

(1)　$x+y>0$ は $xy>0$ であるための $\boxed{}$。

(2)　m，n がともに 3 の倍数であることは，積 mn が 3 の倍数であるための $\boxed{}$。

(3)　△ABC＝△PQR は △ABC≡△PQR であるための $\boxed{}$。

（△ABC＝△PQR は △ABC と △PQR の面積が等しいことを表す。）

(4)　$x\geqq 0$ は $\sqrt{x^2}=x$ であるための $\boxed{}$。

解答　(1)　(エ)　(2)　(イ)　(3)　(ア)　(4)　(ウ)

解説

(1)　$x+y>0 \Longrightarrow xy>0$ は偽。反例：$x=1$，$y=0$

$xy>0 \Longrightarrow x+y>0$ も偽。反例：$x=-1$，$y=-1$

よって，必要条件でも十分条件でもない。(エ)

(2)　m，n がともに 3 の倍数ならば，$m=3k$，$n=3l$ (k，l は整数) とおける。

このとき　$mn=9kl=3\cdot 3kl$

したがって，m，n がともに 3 の倍数 $\Longrightarrow$ 積 mn が 3 の倍数 は真。

一方，積 mn が 3 の倍数 $\Longrightarrow$ m，n がともに 3 の倍数 は偽。　反例：$m=3$，$n=1$

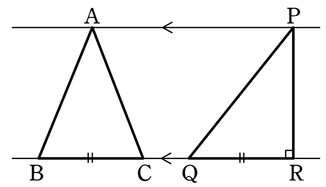
よって，十分条件である。(イ)

(3)　△ABC＝△PQR $\Longrightarrow$ △ABC≡△PQR は偽。

反例：右の △ABC と △PQR

一方，△ABC≡△PQR $\Longrightarrow$ △ABC＝△PQR は真。

よって，必要条件である。(ア)



(4)　$\sqrt{x^2}=\begin{cases} x & (x\geqq 0 \text{ のとき}) \\ -x & (x<0 \text{ のとき}) \end{cases}$ であるから

$x\geqq 0 \Longrightarrow \sqrt{x^2}=x$ は真。　$\sqrt{x^2}=x \Longrightarrow x\geqq 0$ も真。

よって，必要十分条件である。(ウ)

9．a，b，x，y は実数とする。次の条件 p，q について，q は p であるための 必要条件，十分条件，必要十分条件 のいずれであるか。

(1)　$p : x=1$ かつ $y=2$　　$q : x+y=3$ かつ $x-y=-1$

(2)　$p : a^4=b^4$　　$q : a=b$

解答　(1)　必要十分条件　　(2)　十分条件

解説

(1)　$p \Longrightarrow q$ は真。

q の連立方程式を解くと，$x=1$ かつ $y=2$ であるから，$q \Longrightarrow p$ も真。

よって　　必要十分条件

(2)　$p \Longrightarrow q$ は偽。　反例：$a=1$，$b=-1$　　$q \Longrightarrow p$ は真。

よって　　十分条件

10．a，b，x，y，z は実数とする。次の $\boxed{\quad}$ に，下の(ア)～(エ)のうち，最も適するものを入れよ。

（ア）　必要条件である　　　　（イ）　十分条件である

（ウ）　必要十分条件である　　（エ）　必要条件でも十分条件でもない

(1)　$xy=yz=zx=0$ は $x=y=z=0$ であるための $\boxed{\quad}$。

(2)　$a>2$ は $a^2 \fallingdotseq 1$ であるための $\boxed{\quad}$。

(3)　$a>b$ は $a^2>b^2$ であるための $\boxed{\quad}$。

解答　(1)　(ア)　　(2)　(イ)　　(3)　(エ)

解説

(1)　$xy=yz=zx=0 \Longrightarrow x=y=z=0$ は偽。反例：$x=y=0$，$z=1$

$x=y=z=0 \Longrightarrow xy=yz=zx=0$ は真。　　よって　　(ア)

(2)　$a>2 \Longrightarrow a^2 \fallingdotseq 1$ は真。$a^2 \fallingdotseq 1 \Longrightarrow a>2$ は偽。反例：$a=0$

よって　　(イ)

(3)　$a>b \Longrightarrow a^2>b^2$ は偽。反例：$a=0$，$b=-1$

$a^2>b^2 \Longrightarrow a>b$ も偽。反例：$a=-1$，$b=0$　　　よって　　(エ)

11．a，b，x は実数とする。次の $\boxed{\quad}$ に必要，十分，必要十分のうち，最も適するものを入れよ。

(1)　$ax=bx$ は $a=b$ であるための $\boxed{\quad}$ 条件

(2)　$x \fallingdotseq 0$ は $x^2 \fallingdotseq 0$ であるための $\boxed{\quad}$ 条件

解答　(1)　必要　　(2)　必要十分

解説

(1)　$ax=bx \Longrightarrow a=b$ は偽。　反例：$a=1$，$b=2$，$x=0$

また，$a=b \Longrightarrow ax=bx$ は真。

したがって　　必要条件

(2)　$x \fallingdotseq 0 \Longrightarrow x^2 \fallingdotseq 0$ は真。　　$x^2 \fallingdotseq 0 \Longrightarrow x \fallingdotseq 0$ も真。

したがって　　必要十分条件

12．x，y は実数とする。次の $\boxed{\quad}$ の中は，(ア) 必要条件，(イ) 十分条件，(ウ) 必要十分条件，(エ) 必要条件でも十分条件でもない のうち，どれが最も適当か。

(1)　$xy=0$ は $x=0$ であるための $\boxed{\quad}$

(2)　$xy \fallingdotseq 0$ は $x \fallingdotseq 0$ であるための $\boxed{\quad}$

(3)　$xy>1$ は $x>1$ であるための $\boxed{\quad}$

(4)　△ABC の 3 辺が等しいことは，△ABC の 3 つの角が等しいための $\boxed{\quad}$

解答　(1)　(ア)　必要条件　　(2)　(イ)　十分条件

(3)　(エ)　必要条件でも十分条件でもない　　(4)　(ウ)　必要十分条件

解説

(1)　$xy=0 \Longrightarrow x=0$　は　偽　(反例：$x=1$，$y=0$)

$x=0 \Longrightarrow xy=0$　は　真

ゆえに　　(ア)　必要条件

(2)　$xy \fallingdotseq 0 \Longrightarrow x \fallingdotseq 0$　は　真

$x \fallingdotseq 0 \Longrightarrow xy \fallingdotseq 0$　は　偽　(反例：$x=1$，$y=0$)

ゆえに　　(イ)　十分条件

(3)　$xy>1 \Longrightarrow x>1$　は　偽　(反例：$x=y=-2$)

$x>1 \Longrightarrow xy>1$　は　偽　(反例：$x=2$，$y=-1$)

ゆえに　　(エ)　必要条件でも十分条件でもない

(4)　p：△ABC の 3 辺は等しい　　q：△ABC の 3 つの角は等しい　とする。

($p \Longrightarrow q$)　△ABC において　　AB＝BC＝CA

AB＝BC から　　∠C＝∠A　　　BC＝CA から　　∠A＝∠B

よって　　∠A＝∠B＝∠C　　　ゆえに，$p \Longrightarrow q$ は　真

($q \Longrightarrow p$)　△ABC において　　∠A＝∠B＝∠C

∠A＝∠B から　　BC＝CA　　　∠B＝∠C から　　CA＝AB

よって　　AB＝BC＝CA　　　ゆえに，$q \Longrightarrow p$ は　真

したがって　　(ウ)　必要十分条件

13．整数 n の平方が 3 の倍数ならば，n は 3 の倍数であることを証明せよ。

解答　略

解説

与えられた命題の対偶は「n が 3 の倍数でないならば，n^2 は 3 の倍数でない」である。

n が 3 の倍数でないとき，k を整数として，$n=3k+1$ または $n=3k+2$ と表される。

[1]　$n=3k+1$ のとき　　$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$

$3k^2+2k$ は整数であるから，n^2 は 3 の倍数ではない。

[2]　$n=3k+2$ のとき　　$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$

$3k^2+4k+1$ は整数であるから，n^2 は 3 の倍数ではない。

[1]，[2] により，対偶が真である。

したがって，与えられた命題も真である。

14．対偶を考えることにより，次の命題を証明せよ。ただし，a，b，c は整数とする。

(1)　$a^2+b^2+c^2$ が偶数ならば，a，b，c のうち少なくとも 1 つは偶数である。

(2)　$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ が奇数ならば，a，b，c のうち奇数の個数は 1 個または 2 個である。

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　与えられた命題の対偶は

「a，b，c がすべて奇数ならば，$a^2+b^2+c^2$ は奇数である」

a，b，c がすべて奇数ならば，整数 l，m，n を用いて

$a=2l+1$，$b=2m+1$，$c=2n+1$ と表される。

このとき　　$a^2+b^2+c^2=(2l+1)^2+(2m+1)^2+(2n+1)^2$

$=2(2l^2+2m^2+2n^2+2l+2m+2n+1)+1$

$2l^2+2m^2+2n^2+2l+2m+2n+1$ は整数であるから，$a^2+b^2+c^2$ は奇数である。

対偶が真であるから，与えられた命題も真である。

(2)　与えられた命題の対偶は

「a，b，c がすべて偶数 または すべて奇数ならば，

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ は偶数である」

[1]　a，b，c がすべて偶数のとき

整数 p，q，r を用いて $a=2p$，$b=2q$，$c=2r$ と表される。

このとき　　$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=4p^2+4q^2+4r^2-4pq-4qr-4rp$

$=2(2p^2+2q^2+2r^2-2pq-2qr-2rp)$　……①

$2p^2+2q^2+2r^2-2pq-2qr-2rp$ は整数であるから，① は偶数である。

[2]　a，b，c がすべて奇数のとき

整数 l，m，n を用いて $a=2l+1$，$b=2m+1$，$c=2n+1$ と表される。

また，(1) で示したことから，整数 s を用いて $a^2+b^2+c^2=2s+1$ と表される。

このとき　　$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=2s+1-(2l+1)(2m+1)-(2m+1)(2n+1)-(2n+1)(2l+1)$

$=2(s-2lm-l-m-2mn-m-n-2nl-n-l-1)$

$=2(s-2lm-2mn-2nl-2l-2m-2n-1)$　……②

$s-2lm-2mn-2nl-2l-2m-2n-1$ は整数であるから，② は偶数である。

したがって，[1]，[2] のいずれの場合も，$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ は偶数である。

対偶が真であるから，与えられた命題も真である。