数学演習（集合と論理）Ｈ２５．６．３

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．全体集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ の部分集合 A，B を $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ とする。次の集合を求めよ。

(1) $A\cap B$　　(2) $\overline{A}$　　(3) $\overline{B}$

(4) $\overline{A}\cap B$　　(5) $A\cap\overline{B}$　　(6) $\overline{A}\cup\overline{B}$

2．$U=\{0,1\}$ の部分集合をすべて求めよ。

3．整数を要素とする 2 つの集合 A，B を $A=\{2,\ 5,\ a^2\}$，$B=\{4,\ a-1,\ a+b,\ 9\}$ とする。また，$A\cap B=\{5,\ 9\}$ とする。

(1) 定数 a，b の値を求めよ。　　(2) $A\cup B$ を求めよ。

4．実数全体を全体集合とし，$A=\{x\mid -2\leqq x<6\}$，$B=\{x\mid -3\leqq x<5\}$，$C=\{x\mid k-5\leqq x\leqq k+5\}$ (k は定数) とする。

(1) 次の集合を求めよ。

（ア） $A\cap B$　　（イ） $A\cup B$　　（ウ） $\overline{B}$　　（エ） $A\cup\overline{B}$

(2) $A\subset C$ となる k の値の範囲を求めよ。

5．次の命題の真偽を調べよ。ただし，文字はすべて実数とする。

(1) $x^2+x-2=0 \Longrightarrow x=1$　　(2) $x^2-6x+9=0 \Longrightarrow x=3$

(3) $ab=0 \Longrightarrow a^2+b^2=0$

(4) $a+b$ と ab はともに整数 $\Longrightarrow$ a と b はともに整数

(5) $|x|>2$ ならば $|x|>1$

6．a，b，x，y，z は実数とする。次の $\boxed{}$ に，下の(ア)〜(エ)のうち，最も適するものを入れよ。

（ア） 必要条件である　　（イ） 十分条件である

（ウ） 必要十分条件である　　（エ） 必要条件でも十分条件でもない

(1) $xy=yz=zx=0$ は $x=y=z=0$ であるための $\boxed{}$。

(2) $a>2$ は $a^2\neq 1$ であるための $\boxed{}$。

(3) $a>b$ は $a^2>b^2$ であるための $\boxed{}$。

7．実数 x に対し $x^2=4$ であるための (1) 必要条件であるが十分条件でないもの (2) 十分条件であるが必要条件でないもの (3) 必要十分条件であるもの を，下の ①～③ からそれぞれ選べ。

① $x=2$　　② $x=-2$ または $x=2$　　③ $|x|>0$

8．m，n は整数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1)　m，n はともに奇数

(2)　m，n のうち，少なくとも一方は 5 の倍数

9．m，n は整数とする。次のことを証明せよ。

「mn が偶数ならば，m，n のうち少なくとも 1 つは偶数である。」

10. $\sqrt{2}$ は無理数である。$2-\sqrt{2}$ が無理数であることを背理法で証明せよ。

11. $\sqrt{3}$ は無理数である。$\dfrac{7+a\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=b+9\sqrt{3}$ を満たす有理数 a，b の値を求めよ。

12. 命題「$x+y \leqq 4$ ならば $x \leqq 2$ または $y \leqq 2$ である」の逆，対偶，裏を述べよ。

13. x，y は実数とする。次の各条件を「かつ」，「または」を用いてそれぞれ表せ。また，その否定も「かつ」，「または」を用いてそれぞれ表せ。

(1)　$(x+5)(3y-1)=0$

(2)　$(x-2)^2+(y+7)^2=0$

数学演習（集合と論理）Ｈ２５．６．３

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１．全体集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ の部分集合 A，B を $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ とする。次の集合を求めよ。

(1) $A\cap B$　　(2) $\overline{A}$　　(3) $\overline{B}$

(4) $\overline{A}\cap B$　　(5) $A\cap\overline{B}$　　(6) $\overline{A}\cup\overline{B}$

解答　(1) $\{1,\ 3,\ 5\}$　(2) $\{6,\ 7,\ 8,\ 9\}$　(3) $\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$　(4) $\{7,\ 9\}$

(5) $\{2,\ 4\}$　(6) $\{2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

解説

(1) $A\cap B=\{1,\ 3,\ 5\}$

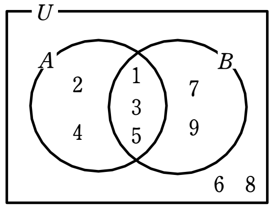
(2) $\overline{A}=\{6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

(3) $\overline{B}=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

(4) $\overline{A}\cap B=\{7,\ 9\}$

(5) $A\cap\overline{B}=\{2,\ 4\}$

(6) $\overline{A}\cup\overline{B}=\{2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$



２．$U=\{0,1\}$ の部分集合をすべて求めよ。

解答　$\{0,\ 1\}$，$\{0\}$，$\{1\}$，ϕ

解説

U の部分集合の要素の個数は，0 個から 2 個まで 3 つの場合がある。

2 個のとき　$\{0,\ 1\}$

1 個のとき　$\{0\}$，$\{1\}$

0 個のとき　ϕ

３．整数を要素とする 2 つの集合 A，B を $A=\{2,\ 5,\ a^2\}$，$B=\{4,\ a-1,\ a+b,\ 9\}$ とする。また，$A\cap B=\{5,\ 9\}$ とする。

(1) 定数 a，b の値を求めよ。　(2) $A\cup B$ を求めよ。

解答　(1) $a=-3$，$b=8$　(2) $A\cup B=\{-4,\ 2,\ 4,\ 5,\ 9\}$

解説

(1) $A\cap B=\{5,\ 9\}$ より $9\in A$ であるから　$a^2=9$　…… ①

同様に，$5\in B$ であるから　$a-1=5$　…… ②　または　$a+b=5$　…… ③

① から　$a=\pm3$

これらは ② を満たさない。

[1] $a=3$ のとき，③ から　$3+b=5$　　よって　$b=2$

このとき $A=\{2,\ 5,\ 9\}$，$B=\{4,\ 2,\ 5,\ 9\}$ であるから，$A\cap B=\{2,\ 5,\ 9\}$ となり適さない。

[2] $a=-3$ のとき，③ から　$-3+b=5$　　よって　$b=8$

このとき $A=\{2,\ 5,\ 9\}$，$B=\{4,\ -4,\ 5,\ 9\}$ となり適する。

したがって　$a=-3$，$b=8$

(2) (1) より $A=\{2,\ 5,\ 9\}$，$B=\{4,\ -4,\ 5,\ 9\}$ であるから

$A\cup B=\{-4,\ 2,\ 4,\ 5,\ 9\}$

４．実数全体を全体集合とし，$A=\{x\mid -2\leqq x<6\}$，$B=\{x\mid -3\leqq x<5\}$，$C=\{x\mid k-5\leqq x\leqq k+5\}$ (k は定数) とする。

(1) 次の集合を求めよ。

（ア） $A\cap B$　（イ） $A\cup B$　（ウ） $\overline{B}$　（エ） $A\cup\overline{B}$

(2) $A\subset C$ となる k の値の範囲を求めよ。

解答　(1) （ア） $A\cap B=\{x\mid -2\leqq x<5\}$　（イ） $A\cup B=\{x\mid -3\leqq x<6\}$

（ウ） $\overline{B}=\{x\mid x<-3,\ 5\leqq x\}$　（エ） $A\cup\overline{B}=\{x\mid x<-3,\ -2\leqq x\}$

(2) $1\leqq k\leqq3$

解説

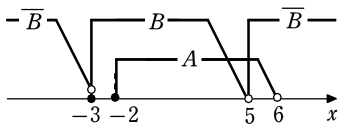
(1) 右の図から

（ア） $A\cap B=\{x\mid -2\leqq x<5\}$

（イ） $A\cup B=\{x\mid -3\leqq x<6\}$

（ウ） $\overline{B}=\{x\mid x<-3,\ 5\leqq x\}$

（エ） $A\cup\overline{B}=\{x\mid x<-3,\ -2\leqq x\}$



(2) $A\subset C$ となるための条件は

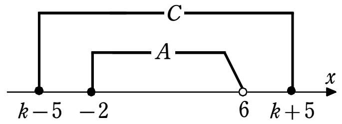
$k-5\leqq-2$　…… ①

$6\leqq k+5$　…… ②

が同時に成り立つことである。

① から　$k\leqq3$　　② から　$1\leqq k$

共通範囲を求めて　$1\leqq k\leqq3$



５．次の命題の真偽を調べよ。ただし，文字はすべて実数とする。

(1) $x^2+x-2=0 \Longrightarrow x=1$　　(2) $x^2-6x+9=0 \Longrightarrow x=3$

(3) $ab=0 \Longrightarrow a^2+b^2=0$

(4) $a+b$ と ab はともに整数 $\Longrightarrow$ a と b はともに整数

(5) $|x|>2$ ならば $|x|>1$

解答　(1) 偽　(2) 真　(3) 偽　(4) 偽　(5) 真

解説

(1) $x=-2$ とすると，$x^2+x-2=0$ であるが，$x=1$ ではない。

よって　偽

(2) $x^2-6x+9=0$ ならば　$(x-3)^2=0$　　したがって　$x=3$

よって　真

(3) $a=0$，$b=1$ とすると，$ab=0$ であるが　$a^2+b^2=1\ (\neq0)$

よって　偽

(4) $a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$ とすると，$a+b=0$ (整数)，$ab=-2$ (整数) であるが，a と b はともに整数ではない。

よって　偽

(5) $P=\{x\mid |x|>2\}$，$Q=\{x\mid |x|>1\}$ とおく。

$|x|>2$ から　$x<-2$ または $2<x$

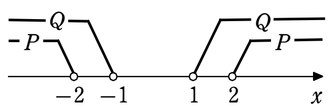
$|x|>1$ から　$x<-1$ または $1<x$

よって　$P=\{x\mid x<-2$ または $2<x\}$，

$Q=\{x\mid x<-1$ または $1<x\}$

ゆえに，P，Q は右の図のようになり　$P\subset Q$

したがって，与えられた命題は真である。



６．a，b，x，y，z は実数とする。次の $\boxed{\quad}$ に，下の(ア)〜(エ)のうち，最も適するものを入れよ。

（ア） 必要条件である　　（イ） 十分条件である

（ウ） 必要十分条件である　　（エ） 必要条件でも十分条件でもない

(1) $xy=yz=zx=0$ は $x=y=z=0$ であるための $\boxed{\quad}$。

(2) $a>2$ は $a^2\neq1$ であるための $\boxed{\quad}$。

(3) $a>b$ は $a^2>b^2$ であるための $\boxed{\quad}$。

解答　(1) （ア）　(2) （イ）　(3) （エ）

解説

ヒント　「pであることはqであるための○○条件」の調べ方は

●$p\Longrightarrow q$　が成り立てば十分条件

●$q\Longrightarrow p$　が成り立てば必要条件

●両方が成り立てば必要十分条件

十分

pであることはqであるための…

必要

(1) $xy=yz=zx=0 \Longrightarrow x=y=z=0$ は偽。

反例：$x=y=0$，$z=1$

$x=y=z=0 \Longrightarrow xy=yz=zx=0$ は真。

よって　（ア）

十分×

$xy=yz=zx=0$ は $x=y=z=0$ であるための

必要○

(2) $a>2 \Longrightarrow a^2\neq1$ は真。

（2より大きい数ならば、どの数を２乗しても１にならない）

$a^2\neq1 \Longrightarrow a>2$ は偽。反例：$a=0$

（２乗して１にならない数は必ず２より大きい→ウソ）

よって　（イ）

十分○

$a>2$ は $a^2\neq1$ であるための

必要×

(3) $a>b \Longrightarrow a^2>b^2$ は偽。

反例：$a=0$，$b=-1$

$a^2>b^2 \Longrightarrow a>b$ も偽。

反例：$a=-1$，$b=0$

よって　（エ）

十分×

$a>b$ は $a^2>b^2$ であるための

必要×

参考　<u>「Ａであること」は「Ｂである」ための○○条件について、Ｂが自分であると考えて、Ｂにとって Ａの環境は（絶対に）必要なのか、十分（つまり、絶対でなくてもいい）なのか考える。</u>

★「日本人であること」は「静岡県民であるため」の必要条件である。

十分×

日本人は静岡県民であるための

必要○

これは、「自分が静岡県民である」とすると、日本人でなければ絶対に静岡県民になれないね、と考えることができるので、「日本人であること」は「静岡県民であるため」の必要条件である。

★「浜松市民であること」は「静岡県民であるため」の十分条件である。

十分○

浜松市民は 静岡県民であるための

必要×

これは、「自分が静岡県人である」とすると、浜松市民でなければ絶対に静岡県民になれないのか、いや、磐田市民も静岡県民なんだから、絶対に浜松市民でなければダメだってことはないよね、と考えることができるので、「浜松市民であること」は「静岡県民であるため」の十分条件である。

7．実数 x に対し $x^2=4$ であるための (1) 必要条件であるが十分条件でないもの (2) 十分条件であるが必要条件でないもの (3) 必要十分条件であるもの を，下の ①～③ からそれぞれ選べ。

① $x=2$　　② $x=-2$ または $x=2$　　③ $|x|>0$

解答 (1) ③　(2) ①　(3) ②

解説

① $x=2 \Longrightarrow x^2=4$ は　真

$x^2=4 \Longrightarrow x=2$ は　偽 (反例：$x=-2$)

② $x=-2$ または $x=2 \Longrightarrow x^2=4$ は　真

$x^2=4 \Longrightarrow x=-2$ または $x=2$ は　真

③ $|x|>0 \Longrightarrow x^2=4$ は　偽 (反例：$x=1$)

$x^2=4 \Longrightarrow |x|>0$ は　真

ゆえに　(1) ③　(2) ①　(3) ②

8．m，n は整数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1) m，n はともに奇数

(2) m，n のうち，少なくとも一方は 5 の倍数

解答 (1) m，n のうち，少なくとも一方は偶数

(2) m，n はともに 5 の倍数でない

解説

(1) 条件は「m は奇数 かつ n は奇数」であるから，その否定は

「m，n のうち，少なくとも一方は偶数」

(2) 条件は「m は 5 の倍数 または n は 5 の倍数」であるから，その否定は

「m，n はともに 5 の倍数でない」

9．m，n は整数とする。次のことを証明せよ。

「mn が偶数ならば，m，n のうち少なくとも 1 つは偶数である。」

解答 略

解説

対偶は　「m，n がともに奇数ならば，mn は奇数である。」

m，n がともに奇数ならば，$m=2a+1$，$n=2b+1$ (a，b は整数) とおける。

このとき　$mn=(2a+1)(2b+1)=4ab+2a+2b+1$

$=2(2ab+a+b)+1$

よって，mn は奇数である。

したがって，対偶は真であるから，もとの命題も真である。

10. $\sqrt{2}$ は無理数である。$2-\sqrt{2}$ が無理数であることを背理法で証明せよ。

解答 略

解説

$2-\sqrt{2}$ が無理数でないと仮定すると，$2-\sqrt{2}$ は有理数である。

$2-\sqrt{2}=r$ とすると　$\sqrt{2}=2-r$

r が有理数ならば $2-r$ も有理数であるから，この等式は $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。よって，$2-\sqrt{2}$ は無理数である。

11. $\sqrt{3}$ は無理数である。$\dfrac{7+a\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=b+9\sqrt{3}$ を満たす有理数 a，b の値を求めよ。

解答 $a=8$，$b=-10$

解説

与式の左辺を変形して

$$\frac{7+a\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{(7+a\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=(14-3a)+(2a-7)\sqrt{3}$$

ゆえに　$(14-3a)+(2a-7)\sqrt{3}=b+9\sqrt{3}$

$14-3a$，$2a-7$，b，9 は有理数であり，$\sqrt{3}$ は無理数である。

よって　$14-3a=b$，$2a-7=9$

これを解いて　$a=8$，$b=-10$

別解 与式の分母を払うと

$$7+a\sqrt{3}=(b+9\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$$

右辺を展開して整理すると

$$7+a\sqrt{3}=(2b+27)+(b+18)\sqrt{3}$$

7，a，$2b+27$，$b+18$ は有理数であり，$\sqrt{3}$ は無理数である。

ゆえに　$7=2b+27$，$a=b+18$

よって　$a=8$，$b=-10$

12. 命題「$x+y \leqq 4$ ならば $x \leqq 2$ または $y \leqq 2$ である」の逆，対偶，裏を述べよ。

解答 逆「$x \leqq 2$ または $y \leqq 2$ ならば $x+y \leqq 4$ である」

対偶「$x>2$ かつ $y>2$ ならば $x+y>4$ である」

裏「$x+y>4$ ならば $x>2$ かつ $y>2$ である」

解説

逆「$x \leqq 2$ または $y \leqq 2$ ならば $x+y \leqq 4$ である」

対偶「$x>2$ かつ $y>2$ ならば $x+y>4$ である」

裏「$x+y>4$ ならば $x>2$ かつ $y>2$ である」

13. x，y は実数とする。次の各条件を「かつ」，「または」を用いてそれぞれ表せ。また，その否定も「かつ」，「または」を用いてそれぞれ表せ。

(1) $(x+5)(3y-1)=0$　　(2) $(x-2)^2+(y+7)^2=0$

解答 (1) $x=-5$ または $y=\dfrac{1}{3}$，否定：$x \fallingdotseq -5$ かつ $y \fallingdotseq \dfrac{1}{3}$

(2) $x=2$ かつ $y=-7$，否定：$x \fallingdotseq 2$ または $y \fallingdotseq -7$

解説

(1) 与式から　$x+5=0$ または $3y-1=0$

すなわち　$x=-5$ または $y=\dfrac{1}{3}$

また，この否定は　$x \fallingdotseq -5$ かつ $y \fallingdotseq \dfrac{1}{3}$

(2) 与式から　$(x-2)^2=0$ かつ $(y+7)^2=0$

すなわち　$x=2$ かつ $y=-7$

また，この 否定は　$x \fallingdotseq 2$ または $y \fallingdotseq -7$