数学演習（集合･命題）Ｈ２８．６．２７　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 次の集合を，要素を書き並べて表せ。

(1) $\{x \mid x$ は整数，$-3<x<4\}$　　(2) $\{3n-2 \mid n$ は 1 以上 5 以下の整数$\}$

$\boxed{2}$ 次の 2 つの集合の関係を，$\subset$，$\supset$，$=$ を使って表せ。

(1) $A=\{2n \mid n$ は整数で，$1\leqq n\leqq 4\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

(2) $C=\{2n+1 \mid n$ は 5 以下の自然数$\}$，$D=\{4n-1 \mid n=1,\ 2,\ 3\}$

(3) $P=\{x \mid -1\leqq x\leqq 3,\ x$ は実数$\}$，$Q=\{x \mid x<4,\ x$ は実数$\}$

$\boxed{3}$ 次の集合の部分集合をすべてあげよ。　$\{0,\ 1\}$

$\boxed{4}$ 次の 2 つの集合 A，B について，$A\cap B$ と $A\cup B$ を求めよ。

(1) $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$，$B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

(2) $A=\{x \mid 4\leqq x\leqq 8,\ x$ は実数$\}$，$B=\{x \mid 0<x<5,\ x$ は実数$\}$

$\boxed{5}$ 全体集合 U の部分集合 A，B について，$A\subset B$ のとき，次の $\boxed{}$ の中に適する文字や記号を入れよ。

(1) $A\cap B=\boxed{}$　　(2) $A\cup B=\boxed{}$　　(3) $A\cap\overline{B}=\boxed{}$

$\boxed{6}$ 全体集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ の部分集合 A，B を $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ とする。次の集合を求めよ。

(1) $A\cap B$　　(2) $\overline{A}$　　(3) $\overline{B}$

(4) $\overline{A}\cap B$　　(5) $A\cap\overline{B}$　　(6) $\overline{A}\cup\overline{B}$

$\boxed{7}$ 全体集合を 1 桁の自然数全体の集合とし，その部分集合 A，B について，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,\ 5,\ 6,\ 8\}$，$\overline{A}\cap B=\{9\}$，$\overline{A}\cup B=\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ であるとき，A と B を求めよ。

$\boxed{8}$ $A=\{1,\ 3,\ 3a-2\}$，$B=\{-5,\ a+2,\ a^2-2a+1\}$，$A\cap B=\{1,\ 4\}$ のとき，定数 a の値と和集合 $A\cup B$ を求めよ。

$\boxed{9}$ x は実数，n は自然数とする。次の条件 p，q について，命題 $p\Longrightarrow q$ の真偽を，集合を用いて調べよ。

(1) $p:-3\leqq x$，$q:-1\leqq x\leqq 1$

(2) $p:|x|<2$，$q:|x-1|<3$

(3) $p:n$ は 18 の正の約数，$q:n$ は 36 の正の約数

$\boxed{10}$ a，b，c は実数とする。次の命題の真偽を調べ，偽のときは反例を 1 つ示せ。

(1) $a=0\Longrightarrow ab=0$　　(2) $a^2=3a\Longrightarrow a=3$

(3) $ac=bc\Longrightarrow a=b$

$\boxed{11}$ a，b は実数，n は自然数とする。次の命題の真偽を調べ，偽のときは反例を 1 つ示せ。

(1) n は 4 の倍数 $\Longrightarrow$ n は 2 の倍数

(2) $a+b$ と ab はともに整数 $\Longrightarrow$ a と b はともに整数

$\boxed{12}$ a，b，c は実数とする。次の条件の中で，$a>b$ と同値な条件を選べ。

① $a^2>b^2$　　② $a-c>b-c$　　③ $ac>bc$

$\boxed{13}$ x, y は実数とする。次の $\boxed{}$ に,「必要条件であるが十分条件でない」,「十分条件であるが必要条件でない」,「必要十分条件である」のうち,適するものを入れよ。

(1) $x=y=2$ は $2x-y=2y-x=2$ であるための $\boxed{}$ 。

(2) $x=-2$ は $x^2=4$ であるための $\boxed{}$ 。

(3) $\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{PQR}$ は,$\triangle\mathrm{ABC}\equiv\triangle\mathrm{PQR}$ であるための $\boxed{}$ 。

(4) $|x|=0$ は $x=0$ であるための $\boxed{}$ 。

(5) $xy\neq 0$ は $x\neq 0$ であるための $\boxed{}$ 。

$\boxed{14}$ x, y, z は実数とする。次の $\boxed{}$ の中は,「必要条件であるが十分条件ではない」,「十分条件であるが必要条件ではない」,「必要十分条件である」,「必要条件でも十分条件でもない」のうち,それぞれどれが適するか。

(1) $(x-y)(y-z)=0$ は $x=y=z$ であるための $\boxed{}$ 。

(2) $xy=0$ かつ $x\neq 0$ は,$y=0$ であるための $\boxed{}$ 。

(3) $x=y=0$ は,$xy=0$ かつ $x+y=0$ であるための $\boxed{}$ 。

(4) $\angle\mathrm{A}<90^\circ$ は $\triangle\mathrm{ABC}$ が鋭角三角形であるための $\boxed{}$ 。

(5) $\triangle\mathrm{ABC}$ の3辺 BC, CA, AB の長さを,それぞれ a, b, c とする。
$(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$ は $\triangle\mathrm{ABC}$ が直角二等辺三角形であるための $\boxed{}$ 。

$\boxed{15}$ n は自然数,x は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また,その逆・対偶・裏を述べ,それらの真偽を調べよ。 $x\neq 2 \Longrightarrow x^2-3x+2\neq 0$

$\boxed{16}$ n は整数とする。$n(n+2)$ が4の倍数ならば n は偶数であることを,対偶を利用して証明せよ。

$\boxed{17}$ $\sqrt{2}$ は無理数である。$\sqrt{3}+\sqrt{6}$ が無理数であることを背理法で証明せよ。

$\boxed{18}$ $(p+\sqrt{2})(q+3\sqrt{2})=8+7\sqrt{2}$ を満たす有理数 p, q $(p<q)$ の値を求めよ。

数学演習（集合･命題）H２８．６．２７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1　次の集合を，要素を書き並べて表せ。

(1)　$\{x \mid x$ は整数，$-3<x<4\}$　　(2)　$\{3n-2 \mid n$ は 1 以上 5 以下の整数$\}$

解答　(1)　$\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$　　(2)　$\{1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13\}$

解説

(1)　$\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

(2)　$\{3\cdot1-2,\ 3\cdot2-2,\ 3\cdot3-2,\ 3\cdot4-2,\ 3\cdot5-2\}$

すなわち　$\{1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13\}$

2　次の 2 つの集合の関係を，$\subset$，$\supset$，$=$ を使って表せ。

(1)　$A=\{2n \mid n$ は整数で，$1 \leqq n \leqq 4\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

(2)　$C=\{2n+1 \mid n$ は 5 以下の自然数$\}$，$D=\{4n-1 \mid n=1,\ 2,\ 3\}$

(3)　$P=\{x \mid -1 \leqq x \leqq 3,\ x$ は実数$\}$，$Q=\{x \mid x<4,\ x$ は実数$\}$

解答　(1)　$A=B$　　(2)　$C \supset D$　　(3)　$P \subset Q$

解説

(1)　$A=\{2\cdot1,\ 2\cdot2,\ 2\cdot3,\ 2\cdot4\}$

$=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

よって　$A=B$

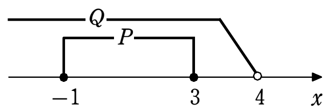
(2)　$C=\{2\cdot1+1,\ 2\cdot2+1,\ 2\cdot3+1,\ 2\cdot4+1,\ 2\cdot5+1\}$

$=\{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$

$D=\{4\cdot1-1,\ 4\cdot2-1,\ 4\cdot3-1\}=\{3,\ 7,\ 11\}$

よって　$C \supset D$

(3)　下の数直線から　$P \subset Q$



3　次の集合の部分集合をすべてあげよ。　$\{0,\ 1\}$

解答　$\{0,\ 1\}$，$\{0\}$，$\{1\}$，ϕ

解説

部分集合の要素の個数は，2 個から 0 個まで 3 つの場合がある。

2 個のとき　$\{0,\ 1\}$

1 個のとき　$\{0\}$，$\{1\}$

0 個のとき　ϕ

4　次の 2 つの集合 A，B について，$A \cap B$ と $A \cup B$ を求めよ。

(1)　$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$，$B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

(2)　$A=\{x \mid 4 \leqq x \leqq 8,\ x$ は実数$\}$，$B=\{x \mid 0<x<5,\ x$ は実数$\}$

解答　(1)　$A \cap B=\{2,\ 4\}$，$A \cup B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

(2)　$A \cap B=\{x \mid 4 \leqq x<5,\ x$ は実数$\}$，$A \cup B=\{x \mid 0<x \leqq 8,\ x$ は実数$\}$

解説

(1)　$A \cap B=\{2,\ 4\}$，$A \cup B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

(2)　$A \cap B=\{x \mid 4 \leqq x<5,\ x$ は実数$\}$，$A \cup B=\{x \mid 0<x \leqq 8,\ x$ は実数$\}$

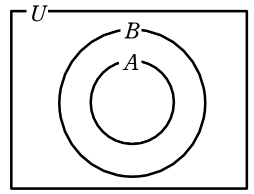
5　全体集合 U の部分集合 A，B について，$A \subset B$ のとき，次の $\boxed{}$ の中に適する文字や記号を入れよ。

(1)　$A \cap B=\boxed{}$　　(2)　$A \cup B=\boxed{}$　　(3)　$A \cap \overline{B}=\boxed{}$

解答　(1)　A　　(2)　B　　(3)　ϕ

解説

$A \subset B$ から，右の図のようになる。



(1)　$A \cap B=A$

(2)　$A \cup B=B$

(3)　$A \cap \overline{B}=\phi$

6　全体集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ の部分集合 A，B を $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ とする。次の集合を求めよ。

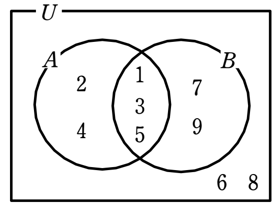
(1)　$A \cap B$　　(2)　$\overline{A}$　　(3)　$\overline{B}$

(4)　$\overline{A} \cap B$　　(5)　$A \cap \overline{B}$　　(6)　$\overline{A} \cup \overline{B}$

解答　(1)　$\{1,\ 3,\ 5\}$　　(2)　$\{6,\ 7,\ 8,\ 9\}$　　(3)　$\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$　　(4)　$\{7,\ 9\}$

(5)　$\{2,\ 4\}$　　(6)　$\{2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

解説



(1)　$A \cap B=\{1,\ 3,\ 5\}$

(2)　$\overline{A}=\{6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

(3)　$\overline{B}=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

(4)　$\overline{A} \cap B=\{7,\ 9\}$

(5)　$A \cap \overline{B}=\{2,\ 4\}$

(6)　$\overline{A} \cup \overline{B}=\{2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

別解　$\overline{A} \cup \overline{B}=\overline{A \cap B}$ であるから，(1) より

$\overline{A} \cup \overline{B}=\{2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

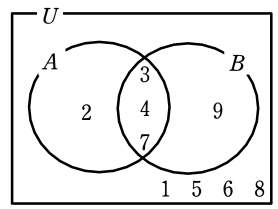
7　全体集合を 1 桁の自然数全体の集合とし，その部分集合 A，B について，$\overline{A} \cap \overline{B}=\{1,\ 5,\ 6,\ 8\}$，$\overline{A} \cap B=\{9\}$，$\overline{A} \cup B=\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ であるとき，A と B を求めよ。

解答　$A=\{2,\ 3,\ 4,\ 7\}$，$B=\{3,\ 4,\ 7,\ 9\}$

解説

全体集合を U とし，$\overline{A} \cap \overline{B}$，$\overline{A} \cap B$，$\overline{A} \cup B$，$U$ の要素を図に書き込んでいくと，右のようになる。

よって　$A=\{2,\ 3,\ 4,\ 7\}$，$B=\{3,\ 4,\ 7,\ 9\}$



8　$A=\{1,\ 3,\ 3a-2\}$，$B=\{-5,\ a+2,\ a^2-2a+1\}$，$A \cap B=\{1,\ 4\}$ のとき，定数 a の値と和集合 $A \cup B$ を求めよ。

解答　$a=2$，$A \cup B=\{-5,\ 1,\ 3,\ 4\}$

解説

$A \cap B=\{1,\ 4\}$ となるから　$4 \in A$

よって　$3a-2=4$　これを解いて　$a=2$

このとき　$A=\{1,\ 3,\ 4\}$，$B=\{-5,\ 1,\ 4\}$

よって，$A \cap B=\{1,\ 4\}$ となり，条件を満たす。

また　$A \cup B=\{-5,\ 1,\ 3,\ 4\}$

9　x は実数，n は自然数とする。次の条件 p，q について，命題 $p \Longrightarrow q$ の真偽を，集合を用いて調べよ。

(1)　$p:-3 \leqq x$，$q:-1 \leqq x \leqq 1$

(2)　$p:|x|<2$，$q:|x-1|<3$

(3)　$p:n$ は 18 の正の約数，$q:n$ は 36 の正の約数

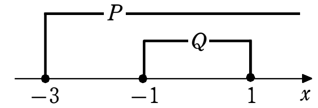
解答　(1)　偽　　(2)　真　　(3)　真

解説

(1)　$P=\{x \mid -3 \leqq x\}$，$Q=\{x \mid -1 \leqq x \leqq 1\}$ とする。

P，Q は右の図のようになり，$P \subset Q$ は成り立たない。

よって，命題は偽である。

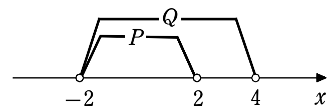


(2)　$P=\{x \mid |x|<2\}$，$Q=\{x \mid |x-1|<3\}$ とする。

$P=\{x \mid -2<x<2\}$，$Q=\{x \mid -2<x<4\}$ であるから，P，Q は右の図のようになり

$P \subset Q$

よって，命題は真である。



(3)　$P=\{n \mid n$ は 18 の正の約数$\}$，$Q=\{n \mid n$ は 36 の正の約数$\}$ とする。

$P=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$，$Q=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36\}$

であるから　$P \subset Q$

よって，命題は真である。

10　a，b，c は実数とする。次の命題の真偽を調べ，偽のときは反例を 1 つ示せ。

(1)　$a=0 \Longrightarrow ab=0$　　(2)　$a^2=3a \Longrightarrow a=3$

(3)　$ac=bc \Longrightarrow a=b$

解答　(1)　真　　(2)　偽　　(3)　偽

解説

(1)　$a=0$ のとき　$ab=0 \times b=0$

よって，この命題は真である。

(2)　$a=0$ は，$a^2=3a$ を満たすが，$a=3$ を満たさない。

よって，この命題は偽である。

(3)　$a=1$，$b=2$，$c=0$ は，$ac=bc$ を満たすが，$a=b$ を満たさない。

よって，この命題は偽である。

11　a，b は実数，n は自然数とする。次の命題の真偽を調べ，偽のときは反例を 1 つ示せ。

(1)　n は 4 の倍数 $\Longrightarrow$ n は 2 の倍数

(2)　$a+b$ と ab はともに整数 $\Longrightarrow$ a と b はともに整数

解答　(1)　真　　(2)　偽（反例：$a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$）

解説

(1)　n が 4 の倍数であるとき，$n=4k$（k は自然数）とおける。

このとき，$n=2\cdot2k$ であり，$2k$ は自然数であるから，n は 2 の倍数である。

よって　真

(2)　$a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$ とすると，$a+b=0$（整数），$ab=-2$（整数）であるが，a と b はともに整数ではない。

よって　偽（反例：$a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$）

12　a，b，c は実数とする。次の条件の中で，$a>b$ と同値な条件を選べ。

①　$a^2>b^2$　　②　$a-c>b-c$　　③　$ac>bc$

解答　②

解説

① 「$a>b \Longrightarrow a^2>b^2$」は偽である。

反例：$a=1$，$b=-2$

よって，$a>b$ と $a^2>b^2$ は同値ではない。

② $a>b$ の両辺から c を引くと

$$a-c>b-c$$

また，$a-c>b-c$ の両辺に c を加えると $a>b$ となるから，

「$a>b \Longleftrightarrow a-c>b-c$」は真である。

よって，$a>b$ と $a-c>b-c$ は同値である。

③ 「$a>b \Longrightarrow ac>bc$」は偽である。

反例：$a=2$，$b=1$，$c=-1$

よって，$a>b$ と $ac>bc$ は同値でない。

したがって，$a>b$ と同値な条件は　②

13 x，y は実数とする。次の $\boxed{}$ に，「必要条件であるが十分条件でない」，「十分条件であるが必要条件でない」，「必要十分条件である」のうち，適するものを入れよ。

(1) $x=y=2$ は $2x-y=2y-x=2$ であるための $\boxed{}$。

(2) $x=-2$ は $x^2=4$ であるための $\boxed{}$。

(3) $\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{PQR}$ は，$\triangle\mathrm{ABC}\equiv\triangle\mathrm{PQR}$ であるための $\boxed{}$。

(4) $|x|=0$ は $x=0$ であるための $\boxed{}$。

(5) $xy\neq 0$ は $x\neq 0$ であるための $\boxed{}$。

解答 (1) 必要十分条件である　(2) 十分条件であるが必要条件でない　(3) 必要条件であるが十分条件でない　(4) 必要十分条件である　(5) 十分条件であるが必要条件でない

解説

(1) 「$x=y=2 \Longrightarrow 2x-y=2y-x=2$」について，$x=y=2$ のとき

$$2x-y=2\cdot2-2=4-2=2$$
$$2y-x=2\cdot2-2=4-2=2$$

すなわち，$2x-y=2y-x=2$ が成り立つから，この命題は真。

「$2x-y=2y-x=2 \Longrightarrow x=y=2$」について，$2x-y=2y-x=2$ のとき

$\begin{cases}2x-y=2\\2y-x=2\end{cases}$ を解いて　$x=2$，$y=2$

すなわち，$x=y=2$ が成り立つから，この命題は真。

よって，必要十分条件である。

(2) 「$x=-2 \Longrightarrow x^2=4$」は真。

「$x^2=4 \Longrightarrow x=-2$」は偽。(反例：$x=2$)

よって，十分条件であるが必要条件でない。

(3) 「$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{PQR} \Longrightarrow \triangle\mathrm{ABC}\equiv\triangle\mathrm{PQR}$」は偽。(反例：1 辺の長さ 1 の正三角形 ABC，1 辺の長さ 2 の正三角形 PQR)

「$\triangle\mathrm{ABC}\equiv\triangle\mathrm{PQR} \Longrightarrow \triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{PQR}$」は真。

よって，必要条件であるが十分条件でない。

(4) 「$|x|=0 \Longrightarrow x=0$」は真。

「$x=0 \Longrightarrow |x|=0$」も真。

よって，必要十分条件である。

(5) 「$xy\neq 0 \Longrightarrow x\neq 0$」は真。

「$x\neq 0 \Longrightarrow xy\neq 0$」は偽。(反例：$x=1$，$y=0$)

よって，十分条件であるが必要条件でない。

14 x，y，z は実数とする。次の $\boxed{}$ の中は，「必要条件であるが十分条件ではない」，「十分条件であるが必要条件ではない」，「必要十分条件である」，「必要条件でも十分条件でもない」のうち，それぞれどれが適するか。

(1) $(x-y)(y-z)=0$ は $x=y=z$ であるための $\boxed{}$。

(2) $xy=0$ かつ $x\neq 0$ は，$y=0$ であるための $\boxed{}$。

(3) $x=y=0$ は，$xy=0$ かつ $x+y=0$ であるための $\boxed{}$。

(4) $\angle\mathrm{A}<90^\circ$ は $\triangle\mathrm{ABC}$ が鋭角三角形であるための $\boxed{}$。

(5) $\triangle\mathrm{ABC}$ の 3 辺 BC，CA，AB の長さを，それぞれ a，b，c とする。

$(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$ は $\triangle\mathrm{ABC}$ が直角二等辺三角形であるための $\boxed{}$。

解答 (1) 必要条件であるが十分条件ではない　(2) 十分条件であるが必要条件ではない　(3) 必要十分条件である　(4) 必要条件であるが十分条件ではない　(5) 必要条件でも十分条件でもない

解説

(1) 「$(x-y)(y-z)=0 \Longrightarrow x=y=z$」は偽。(反例：$x=y=1$，$z=0$)

「$x=y=z \Longrightarrow (x-y)(y-z)=0$」は真。

したがって，必要条件であるが十分条件ではない。

(2) 「$xy=0$ かつ $x\neq 0 \Longrightarrow y=0$」は真。

「$y=0 \Longrightarrow xy=0$ かつ $x\neq 0$」は偽。(反例：$x=0$，$y=0$)

したがって，十分条件であるが必要条件ではない。

(3) 「$x=y=0 \Longrightarrow xy=0$ かつ $x+y=0$」は真。

$xy=0$ かつ $x+y=0$ とする。

$x+y=0$ から　$y=-x$

これを $xy=0$ に代入すると　$-x^2=0$　よって　$x=0$

$x+y=0$ に代入して　$0+y=0$　ゆえに　$y=0$

よって，「$xy=0$ かつ $x+y=0 \Longrightarrow x=y=0$」は真。

したがって，必要十分条件である。

(4) 「$\angle\mathrm{A}<90^\circ \Longrightarrow \triangle\mathrm{ABC}$ は鋭角三角形」は偽。

(反例：$\angle\mathrm{A}=60^\circ$，$\angle\mathrm{B}=100^\circ$，$\angle\mathrm{C}=20^\circ$ の三角形)

「$\triangle\mathrm{ABC}$ は鋭角三角形 $\Longrightarrow \angle\mathrm{A}<90^\circ$」は真。

したがって，必要条件であるが十分条件ではない。

(5) 「$(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0 \Longrightarrow \triangle\mathrm{ABC}$ は直角二等辺三角形」は偽。

(反例：$a=1$，$b=1$，$c=1$ の正三角形)

「$\triangle\mathrm{ABC}$ は直角二等辺三角形 $\Longrightarrow (a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$」は偽。

(反例：$a=\sqrt{2}$，$b=1$，$c=1$ の直角二等辺三角形)

したがって，必要条件でも十分条件でもない。

15 n は自然数，x は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また，その逆・対偶・裏を述べ，それらの真偽を調べよ。　$x\neq 2 \Longrightarrow x^2-3x+2\neq 0$

解答 偽；逆：$x^2-3x+2\neq 0 \Longrightarrow x\neq 2$ (真)，

対偶：$x^2-3x+2=0 \Longrightarrow x=2$ (偽)，裏：$x=2 \Longrightarrow x^2-3x+2=0$ (真)

解説

$x^2-3x+2=0$ とすると　$(x-1)(x-2)=0$　ゆえに　$x=1$ または $x=2$

$x=1$ のとき，$x\neq 2$ であるが $x^2-3x+2=0$ である。よって，与えられた命題は偽である。

逆：$x^2-3x+2\neq 0 \Longrightarrow x\neq 2$

$x^2-3x+2\neq 0$ とすると　$x\neq 1$ かつ $x\neq 2$

よって，逆は真である。

対偶：$x^2-3x+2=0 \Longrightarrow x=2$

$x=1$ のとき，$x^2-3x+2=0$ であるが $x\neq 2$ である。

よって，対偶は偽である。

裏：$x=2 \Longrightarrow x^2-3x+2=0$

$x=2$ のとき　$x^2-3x+2=0$　よって，裏は真である。

16 n は整数とする。$n(n+2)$ が 4 の倍数ならば n は偶数であることを，対偶を利用して証明せよ。

解答 略

解説

対偶は　「n が奇数ならば $n(n+2)$ は 4 の倍数でない」 …… ①

n が奇数ならば，k を整数として，$n=2k+1$ と表され

$$n(n+2)=(2k+1)(2k+3)=4k^2+8k+3=4(k^2+2k)+3$$

よって，$n(n+2)$ は 4 の倍数でない。

したがって，① は真であるから，与えられた命題も真である。

17 $\sqrt{2}$ は無理数である。$\sqrt{3}+\sqrt{6}$ が無理数であることを背理法で証明せよ。

解答 略

解説

$\sqrt{3}+\sqrt{6}$ が無理数でないと仮定すると，$\sqrt{3}+\sqrt{6}$ は有理数である。

$\sqrt{3}+\sqrt{6}=r$ として両辺を 2 乗すると　$9+6\sqrt{2}=r^2$

したがって　$\sqrt{2}=\dfrac{r^2-9}{6}$

r が有理数ならば $\dfrac{r^2-9}{6}$ も有理数であるから，この等式は $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。よって，$\sqrt{3}+\sqrt{6}$ は無理数である。

18 $(p+\sqrt{2})(q+3\sqrt{2})=8+7\sqrt{2}$ を満たす有理数 p，q $(p<q)$ の値を求めよ。

解答 $p=\dfrac{1}{3}$，$q=6$

解説

等式から　$(pq-2)+(3p+q-7)\sqrt{2}=0$

p，q は有理数であるから，$pq-2$，$3p+q-7$ は有理数である。また，$\sqrt{2}$ は無理数である。

よって　$pq-2=0$ …… ①　$3p+q-7=0$ …… ②

② から　$q=-3p+7$ …… ③

③ を ① に代入すると　$p(-3p+7)-2=0$

よって　$3p^2-7p+2=0$　ゆえに　$(p-2)(3p-1)=0$

したがって　$p=2$，$\dfrac{1}{3}$

③ から　$p=2$ のとき $q=1$，$p=\dfrac{1}{3}$ のとき $q=6$

このうち，$p<q$ を満たすのは　$p=\dfrac{1}{3}$，$q=6$