１．$x-y=2$，$xy=\sqrt{2}$ とする。

(1) x^2+y^2 の値を求めよ。

(2) x^3-y^3 の値を求めよ。

(3) $(x^2+y^3)(x^3-y^2)$ の値を求めよ。

２．２次方程式 $x^2-2x-1=0$ ……①がある。

(1) 方程式①を解け。

(2) 方程式①の解のうち，小さい方を p，大きい方を q とする。$\dfrac{p}{q}$ の値を求めよ。また，$\left|\dfrac{q}{p}\right|$ の値を求めよ。

(3) (2)のとき，$\left|\dfrac{p}{q}\right|^3+\left|\dfrac{q}{p}\right|^3$ を計算せよ。

３．$a>0$ とし，$x=2a+1$ ，$P=\sqrt{x^2-8x+16}$，$Q=\sqrt{x^2+2x+1}$ とする。

(1) $x^2-8x+16$ を $(pa+q)^2$（p，q は実数）の形で表せ。

(2) $a=2$ のとき，P の値を求めよ。また，$a=\sqrt{2}$ のとき，P の値を求めよ。

(3) $P+Q=7$ を満たす a の値を求めよ。

４．$\alpha=\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)^2-3\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$ とする。

(1) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ の分母を有理化し，簡単にせよ。

(2) α の小数部分を p とするとき，$p+\dfrac{2}{p}$，$p^2+\dfrac{4}{p^2}$ の値をそれぞれ求めよ。

＜注＞ 例えば，$2<\sqrt{5}<3$ であるから，$\sqrt{5}$ の整数部分は２で，小数部分は $\sqrt{5}-2$ である。

(3) (2)の p に対して，不等式 $\left(p-p^2+\dfrac{2}{p}-\dfrac{4}{p^2}\right)n>\dfrac{p^3}{2}+\dfrac{4}{p^3}-24$ を満たす自然数 n の個数を求めよ。

数学演習１　　　　（　　）組（　　）番　名前（ こたえ ）

$x-y=2$，$xy=\sqrt{2}$ とする。

(1) x^2+y^2 の値を求めよ。

(2) x^3-y^3 の値を求めよ。

(3) $(x^2+y^3)(x^3-y^2)$ の値を求めよ。

(1) $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy = 2^2+2\sqrt{2} = \underline{4+2\sqrt{2}}$ 5

(2)

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=2^3+3\cdot\sqrt{2}\cdot 2 = \underline{8+6\sqrt{2}}$ 5

(3)

$(x^2+y^3)(x^3-y^2)=P$ とおくと

$P=x^5-x^2y^2+x^3y^3-y^5$

$=(x^5-y^5)+x^2y^2(xy-1)$

$=(x^5-y^5)+(\sqrt{2})^2(\sqrt{2}-1) = (x^5-y^5)+2(\sqrt{2}-1)$

となる。一方，x^5-y^5 について (1)(2)より

$(x^2+y^2)(x^3-y^3)=(4+2\sqrt{2})(8+6\sqrt{2})$

$x^5-x^2y^3+x^3y^2-y^5=32+24\sqrt{2}+16\sqrt{2}+24$

$(x^5-y^5)+x^2y^2(x-y)=56+40\sqrt{2}$

$(x^5-y^5)+(\sqrt{2})^2\times 2=56+40\sqrt{2}$

∴ $x^5-y^5=56+40\sqrt{2}-(\sqrt{2})^2\times 2$

$=52+40\sqrt{2}$

∴ 以上より

$P=(52+40\sqrt{2})+2(\sqrt{2}-1)$

$=\underline{50+42\sqrt{2}}$ 15

２次方程式 $x^2-2x-1=0$ …①がある。

(1) 方程式①を解け。

(2) 方程式①の解のうち，小さいほうを p，大きいほうを q とする。$\dfrac{p}{q}$ の値を求めよ。

また，$\left|\dfrac{q}{p}\right|$ の値を求めよ。

(3) (2)のとき，$\left|\dfrac{p}{q}\right|^3+\left|\dfrac{q}{p}\right|^3$ を計算せよ。

(1) $x^2-2x-1=0$

∴ $x=1\pm\sqrt{1+1}$

$=\underline{1\pm\sqrt{2}}$ 5

(2) $p=1-\sqrt{2}$，$q=1+\sqrt{2}$ となる。

$\dfrac{p}{q}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{(1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=\dfrac{1-2\sqrt{2}+2}{1-2}$

$=\underline{-3+2\sqrt{2}}$ 5

また，

$\dfrac{q}{p}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\dfrac{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=\dfrac{1+2\sqrt{2}+2}{1-2}$

$=-3-2\sqrt{2}$

よって $-3-2\sqrt{2}<0$ であるから

$\left|\dfrac{q}{p}\right|=|-3-2\sqrt{2}|=-(-3-2\sqrt{2})$

$=\underline{3+2\sqrt{2}}$ 5

(3)

$\left|\dfrac{p}{q}\right|$ について，$-3+2\sqrt{2}<0$ であるので

$\left|\dfrac{p}{q}\right|=|-3+2\sqrt{2}|=-(-3+2\sqrt{2})$

$=3-2\sqrt{2}$

ここで

$\left|\dfrac{p}{q}\right|+\left|\dfrac{q}{p}\right|=(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})$

$=6$

$\left|\dfrac{p}{q}\right|\times\left|\dfrac{q}{p}\right|=\dfrac{\cancel{|p|}}{\cancel{|q|}}\times\dfrac{\cancel{|q|}}{\cancel{|p|}}=1$

よって

$\left|\dfrac{p}{q}\right|^3+\left|\dfrac{q}{p}\right|^3$

$=\left(\left|\dfrac{p}{q}\right|+\left|\dfrac{q}{p}\right|\right)^3-3\left|\dfrac{p}{q}\right|\left|\dfrac{q}{p}\right|\left(\left|\dfrac{p}{q}\right|+\left|\dfrac{q}{p}\right|\right)$

$=6^3-3\cdot 1\cdot 6$

$=216-18$

$=\underline{198}$ 10

$a>0$ とし，$x=2a+1$，$P=\sqrt{x^2-8x+16}$，$Q=\sqrt{x^2+2x+1}$ とする。

(1) $x^2-8x+16=(\boxed{(ア)}a-\boxed{(イ)})^2$ となるような $\boxed{(ア)}$，$\boxed{(イ)}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) $a=2$ のとき，P の値を求めよ。また，$a=\sqrt{2}$ のとき，P の値を求めよ。

(3) $P+Q=7$ を満たす a の値を求めよ。

(1) $x^2-8x+16$

$=(x-4)^2$

$=\{(2a+1)-4\}^2$

$=(2a-3)^2$ //

5

(2)

$P=\sqrt{x^2-8x+16}$

$=\sqrt{(2a-3)^2}$

$=|2a-3|$

$a=2$ の時

$P=|2\cdot 2-3|$

$=|4-3|=|1|=1$ //

5

$a=\sqrt{2}$ の時

$P=|2\sqrt{2}-3|$

$2\sqrt{2}-3<0$ であるので

$P=-(2\sqrt{2}-3)$

$=3-2\sqrt{2}$ //

5

(3) (2)より

$P=|2a-3|$

また $Q=\sqrt{x^2+2x+1}$

$=\sqrt{(x+1)^2}$

$=|x+1|=|(2a+1)+1|$

$=|2a+2|$

ゆえに $P+Q=|2a-3|+|2a+2|$

今．

$|2a-3|=\begin{cases}2a-3 & (a\geqq\frac{3}{2})\\ -(2a-3) & (a<\frac{3}{2})\end{cases}$

$|2a+2|=\begin{cases}2a+2 & (a\geqq-1)\\ -(2a+2) & (a<-1)\end{cases}$

であるが．$a>0$ であるから．$0<a<\frac{3}{2}$，$a\geqq\frac{3}{2}$ の2つに場合分け

• $0<a<\frac{3}{2}$ の時．

$|2a-3|=-(2a-3)$．$|2a+2|=2a+2$ より

$P+Q=-(2a-3)+(2a+2)=5$

となり．a の値がいくつであっても $P+Q=7$ にはならない．

• $a\geqq\frac{3}{2}$ の時

$|2a-3|=2a-3$．$|2a+2|=2a+2$ より

$P+Q=(2a-3)+(2a+2)=4a-1$

よって $4a-1=7$ ∴ $a=2$ ($a\geqq\frac{3}{2}$ に適する)

以上より $a=2$ //

10

$\alpha=\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)^2-3\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$ とする。

(1) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ の分母を有理化し，簡単にせよ。

(2) α の小数部分を p とするとき，$p+\dfrac{2}{p}$，$p^2+\dfrac{4}{p^2}$ の値をそれぞれ求めよ。

〈注〉 例えば，$2<\sqrt{5}<3$ であるから，$\sqrt{5}$ の整数部分は2，小数部分は $\sqrt{5}-2$ である。

(3) (2)の p に対して，不等式 $\left(p-p^2+\dfrac{2}{p}-\dfrac{4}{p^2}\right)n>\dfrac{p^3}{2}+\dfrac{4}{p^3}-24$ を満たす自然数 n の個数を求めよ。

(1) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$=\dfrac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1}$

$=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$ //

5

(2)

$\alpha=(2+\sqrt{3})^2-3(2+\sqrt{3})$

$=4+4\sqrt{3}+3-6-3\sqrt{3}$

$=1+\sqrt{3}$.

$1<\sqrt{3}<2$ より

$\sqrt{3}$ の整数部分は 1

小数部分は $\sqrt{3}-1$

よって α の整数部分は 2

小数部分は $\sqrt{3}-1$

となるので

$p=\sqrt{3}-1$

ここで $\dfrac{2}{p}=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1}$

$=\sqrt{3}+1$

よって $p+\dfrac{2}{p}=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)=2\sqrt{3}$ //

5

$p^2+\dfrac{4}{p^2}=\left(p+\dfrac{2}{p}\right)^2-2\cdot p\cdot\dfrac{2}{p}$

$=(2\sqrt{3})^2-4=12-4=8$ //

5

(3)

$p-p^2+\dfrac{2}{p}-\dfrac{4}{p^2}=\left(p+\dfrac{2}{p}\right)-\left(p^2+\dfrac{4}{p^2}\right)=2\sqrt{3}-8.$

$\dfrac{p^3}{2}+\dfrac{4}{p^3}-24=\dfrac{1}{2}\left(p^3+\dfrac{8}{p^3}\right)-24$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(p+\dfrac{2}{p}\right)^3-3\cdot p\cdot\dfrac{2}{p}\left(p+\dfrac{2}{p}\right)\right\}-24$

$=\dfrac{1}{2}\left\{(2\sqrt{3})^3-3\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}\right\}-24$

$=\dfrac{1}{2}(24\sqrt{3}-12\sqrt{3})-24=6\sqrt{3}-24$

∴

$(2\sqrt{3}-8)n>6\sqrt{3}-24$

ここで $2\sqrt{3}-8<0$ であり．両辺 $2\sqrt{3}-8$ で割ると

$n<\dfrac{6\sqrt{3}-24}{2\sqrt{3}-8}$

$=\dfrac{3\sqrt{3}-12}{\sqrt{3}-4}=\dfrac{(3\sqrt{3}-12)(\sqrt{3}+4)}{3-16}$

$=\dfrac{3(\sqrt{3}-4)(\sqrt{3}+4)}{-13}$

$=\dfrac{3(3-16)}{-13}=3.$

$n<3$ であり またnは自然数であるから．

これらを満たすnは $n=1,2$ の 2個 //

10