

第2回定期考査 (数と式) (月 日)

1. $A = x - 3x^2 - 2 + 2x^3$, $B = 2x - 2x^2 + x^3 + 1$ であるとき, 次の計算せよ。ただし, 答えは降べきの順に整理すること。
- $$-2\{7A + 3(B - 2A)\} + 6B$$

2. 次の式を展開せよ。

(1) $(2a - b)^3$

(2) $(2x - y + z)^2$

(3) $(a + b - 2)(a + b + 3)$

(4) $(x - y)^2(x + y)^2(x^2 + y^2)^2$

3. 次の式を因数分解せよ。

(1) $a^3b + a^2b - 6ab$

(2) $16x^3y - 2y$

(3) $6x^2 + 13x + 5$

(4) $2x^4 + x^2 - 3$

(5) $2x^2 + xy - 6y^2 - 4x - y + 2$

Class _____ No. _____ Name _____

4. $1.\dot{5}\dot{4}$ を分数で表せ。

5. $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$ の分母を有理化せよ。

6. $\frac{1}{3 - \sqrt{5}}$ の整数部分を a , 小数部分を b とする。 a , b の値をそれぞれ求めよ。

7. $a = 1$ のとき, $|a - 4| + |1 + 2a|$ の値をそれぞれ求めよ。

8. 次の各問いに答えよ。

(1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ を簡単にせよ。

(2) $\sqrt{12-4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$ を簡単にせよ。

9. 次の方程式，不等式を解け。

(1) $|3x+1|<5$

(2) $|x+3|=2x$

(3) $2|x+1|-|x-3|>2x$

10. 次の の中に適するものを下の㉗～㉜の中から 1 つずつ選べ。ただし，文字はすべて実数とする。

- ㉗ 必要十分条件条件 ㉘ 必要条件であるが十分条件でない
㉙ 十分条件であるが必要条件でない ㉜ 必要条件でも十分条件でもない

(1) $a>2, b>2$ は， $a+b>4, ab>4$ であるための 。

(2) $|x|\geq 1$ は， $x>1$ であるための 。

(3) $(x-1)^2+(y-1)^2=0$ は $x=y=1$ であるための 。

(4) $\triangle ABC$ の 3 辺の長さを a, b, c とするとき， $(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$ は $\triangle ABC$ が直角二等辺三角形であるための 。

11. 命題「 $x+y\geq 2$ ならば， $x\geq 1$ かつ $y\geq 1$ 」の逆，対偶をつくり，その真偽を言え。ただし，偽の場合は反例をあげよ。

12. a, b, c を整数とする。 $a^2+b^2=c^2$ ならば， a, b, c のうち少なくとも 1 つは 2 の倍数であることを，背理法を用いて証明せよ。

1. $A = x - 3x^2 - 2 + 2x^3$, $B = 2x - 2x^2 + x^3 + 1$ であるとき, 次の計算せよ。ただし, 答えは降べきの順に整理すること。

$$-2\{7A + 3(B - 2A)\} + 6B$$

$$-2(7A + 3B - 6A) + 6B$$

$$= -2(A + 3B) + 6B$$

$$= -2A - 6B + 6B$$

$$= -2A$$

$$A = 2x^3 - 3x^2 + x - 2$$

$$-4x^3 + 6x^2 - 2x + 4$$

2. 次の式を展開せよ。

(1) $(2a - b)^3 = 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$

(2) $(2x - y + z)^2 = 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$

(3) $(a + b - 2)(a + b + 3) = (a + b)^2 + (a + b) - 6$
 $= a^2 + 2ab + b^2 + a + b - 6$

(4) $(x - y)^2(x + y)^2(x^2 + y^2)^2$
 $= \{(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)\}^2$
 $= \{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)\}^2$
 $= (x^4 - y^4)^2$
 $= x^8 - 2x^4y^4 + y^8$

3. 次の式を因数分解せよ。

(1) $a^3b + a^2b - 6ab$

$$ab(a^2 + a - 6) = ab(a + 3)(a - 2)$$

(2) $16x^3y - 2y$

$$2y(8x^3 - 1) = 2y(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$$

(3) $6x^2 + 13x + 5$

$$(2x + 1)(3x + 5)$$

$$\begin{array}{r} 2 \times 5 \rightarrow 10 \\ 3 \times 1 \rightarrow 3 \\ \hline 13 \end{array}$$

(4) $2x^4 + x^2 - 3$

$$(x^2 - 1)(2x^2 + 3) = (x - 1)(x + 1)(2x^2 + 3)$$

$$\begin{array}{r} 1 \times 3 \rightarrow 3 \\ 2 \times 1 \rightarrow 2 \\ \hline 5 \end{array}$$

(5) $2x^2 + xy - 6y^2 - 4x - y + 2$

$$2x^2 + (y - 4)x - (6y^2 + y - 2)$$

$$= 2x^2 + (y - 4)x - (2y - 1)(3y + 2)$$

$$= (x + 2y - 1)(2x - 3y - 2)$$

$$\begin{array}{r} 1 \times 2y - 1 \rightarrow 2y - 2 \\ 2 \times (-3y + 2) \rightarrow -6y + 4 \\ \hline -4y + 2 \end{array}$$

4. $1.\dot{5}\dot{4}$ を分数で表せ。

$$1.\dot{5}\dot{4} = X$$

$$100X = 154.54$$

$$\Rightarrow X = 1.54$$

$$99X = 153$$

$$X = \frac{17}{11}$$

5. $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$ の分母を有理化せよ。

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{(2 + 2\sqrt{6} + 3) - 5}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{30}}{12}$$

6. $\frac{1}{3 - \sqrt{5}}$ の整数部分を a , 小数部分を b とする。 a, b の値をそれぞれ求めよ。

$$\frac{1}{3 - \sqrt{5}} \times \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}$$

$$= \frac{3 + \sqrt{5}}{4 - 5}$$

$$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$$

$$5 < 3 + \sqrt{5} < 6$$

$$\frac{5}{4} < \frac{3 + \sqrt{5}}{4} < \frac{6}{4}$$

$$a + b = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$$

$$b = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} - a$$

$$1/5 = 0.2$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \end{cases} \quad (82)$$

7. $a = 1$ のとき, $|a - 4| + |1 + 2a|$ の値をそれぞれ求めよ。

$$Q = |a|$$

$$<5式> = |1 - 4| + |1 + 2|$$

$$= | -3 | + | 3 |$$

$$= 3 + 3$$

$$= 6$$

8. 次の各問いに答えよ。

(1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ を簡単にせよ。

$$\begin{aligned} & \sqrt{(3+1)+2\sqrt{3 \times 1}} \\ &= \sqrt{3+1+2\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3+1} \end{aligned}$$

(2) $\sqrt{8-4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$ を簡単にせよ。

$$\begin{aligned} & (1) \text{より } \sqrt{12-4(\sqrt{3}+1)} \\ &= \sqrt{12-4\sqrt{3}-4} \\ &= \sqrt{8-4\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{8-2\sqrt{12}} \end{aligned}$$

9. 次の方程式、不等式を解け。

(1) $|3x+1| < 5$

$$\begin{aligned} & -5 < 3x+1 < 5 \\ & -6 < 3x < 4 \\ & -2 < x < \frac{4}{3} \end{aligned}$$

(2) $|x+3| = 2x$

(i) $x+3 \geq 0$ かつ $x \geq -3$ かつ

$$|x+3| = x+3 \text{ かつ}$$

$$\begin{aligned} & \text{よって } x+3 = 2x \\ & x = 3 \end{aligned}$$

これは $x \geq -3$ と満たす

(ii) $x+3 < 0$ かつ $x < -3$ かつ

$$|x+3| = -(x+3)$$

$$\begin{aligned} & \text{よって } -(x+3) = 2x \\ & -x-3 = 2x \\ & -3x = 3 \\ & x = -1 \end{aligned}$$

$x < -3$ かつ 不成立

(i), (ii) より

$$x = 3$$

(3) $2|x+1| - |x-3| > 2x$

(i) $x < -1$ かつ

$$-2(x+1) - (x-3) > 2x$$

$$-x-5 > 2x$$

$$x < -\frac{5}{3}$$

$$x < -1 \text{ かつ } x < -\frac{5}{3}$$

(ii) $-1 \leq x < 3$ かつ

$$2(x+1) + (x-3) > 2x$$

$$3x-1 > 2x$$

$$x > 1$$

$$-1 \leq x < 3 \text{ かつ } x > 1$$

$$1 < x < 3$$

(iii) $x \geq 3$ かつ

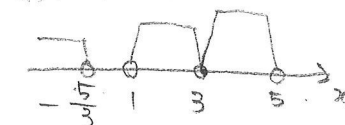
$$2(x+1) - (x-3) > 2x$$

$$x+5 > 2x$$

$$x < 5$$

$$x \geq 3 \text{ かつ } 3 \leq x < 5$$

(i) ~ (iii) より



よって

$$x < -\frac{5}{3}, 1 < x < 5$$

10. 次の $\square$ の中に適するものを下の㉠~㉥の中から1つずつ選べ。ただし、文字はすべて実数とする。

- ㉠ 必要十分条件 ㉡ 必要条件であるが十分条件でない
㉢ 十分条件であるが必要条件でない ㉣ 必要条件でも十分条件でもない

(1) $a > 2, b > 2$ は、 $a+b > 4, ab > 4$ であるための $\square$ 。

$$\begin{aligned} & P \Rightarrow Q \text{ 真の十分条件} \\ & Q \Rightarrow P \text{ 偽 (} a=5, b=1 \text{)} \end{aligned}$$

㉡

(2) $|x| \geq 1$ は、 $x > 1$ であるための $\square$ 。

$$\begin{aligned} & P \Rightarrow Q \text{ 偽 (} x=-2 \text{)} \\ & Q \Rightarrow P \text{ 真の必要条件} \end{aligned}$$

㉢

(3) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$ は $x=y=1$ であるための $\square$ 。

$$\begin{aligned} & P \Rightarrow Q \text{ 真の十分条件} \\ & Q \Rightarrow P \text{ 真の必要条件} \end{aligned}$$

㉠

(4) $\triangle ABC$ の3辺の長さを a, b, c とするとき、 $(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) = 0$ は $\triangle ABC$ が直角二等辺三角形であるための $\square$ 。

$$\begin{aligned} & P \Rightarrow Q \text{ 偽 (} a=b=c=1 \text{)} \\ & Q \Rightarrow P \text{ 偽 (} a=\sqrt{2}, b=c=1 \text{)} \end{aligned}$$

㉣

11. 命題「 $x+y \geq 2$ ならば、 $x \geq 1$ かつ $y \geq 1$ 」の逆、対偶をつくり、その真偽を言え。ただし、偽の場合は反例をあげよ。

$$\text{逆 } x \geq 1 \text{ かつ } y \geq 1 \text{ ならば } x+y \geq 2 \text{ 真}$$

$$\text{対偶 } x < 1 \text{ かつ } y < 1 \text{ ならば } x+y < 2 \text{ 真}$$

$$\text{偽 (} x=0, y=3 \text{)}$$

㉣ (各1点)

12. ㉦

㉦ ㉠, ㉡より $a^2+b^2=c^2$ であることは証明済み。

よって a, b, c は整数と仮定 $a^2+b^2=c^2$ ならば

a, b, c のうち b, c の1つは2の倍数である

㉣

13. a, b, c を整数とする。 $a^2+b^2=c^2$ ならば、 a, b, c のうち少なくとも1つは2の倍数であることを、背理法を用いて証明せよ。

a, b, c がすべて2の倍数でないことを仮定する。

$$\text{つまり } a=2x+1, b=2y+1, c=2z+1 \text{ と仮定}$$

(ただし x, y, z は整数)

よって

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= a^2+b^2 \\ &= (2x+1)^2 + (2y+1)^2 \\ &= 4x^2+4x+1+4y^2+4y+1 \\ &= 2(2x^2+2x+2y^2+2y+1) \end{aligned}$$

x, y は整数より $2x^2+2x+2y^2+2y+1$ も整数と仮定 (左辺は偶数である)

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= c^2 \\ &= (2z+1)^2 \\ &= 4z^2+4z+1 \\ &= 2(z^2+2z)+1 \end{aligned}$$

z は整数より z^2+2z も整数と仮定 (右辺は奇数である)