数学演習（因数分解・平方根・１次不等式）Ｈ２５．５．１７

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．$a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$ を因数分解せよ。

２．項を適当に組み合わせて共通因数を作り，x^3+x^2+2x+8 を因数分解せよ。

３．次の式を因数分解せよ。　$2x^2+3xy-2y^2+7x-y+3$

４．次の式を因数分解せよ。　$(x+y+z)(x+3y+z)-8y^2$

５．次の式を因数分解せよ。　$2ab^2-3ab-2a+b-2$

６．次の式を因数分解せよ。　$x^4-7x^2y^2+y^4$

７．次の式を因数分解せよ。　$(a^2-1)(b^2-1)-4ab$

８．$x=2+\sqrt{3}$，$y=2-\sqrt{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　x^3+y^3　　　(2)　$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$

９．　$a=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$ のとき $a+\dfrac{1}{a}$，$a^2+\dfrac{1}{a^2}$，$a^4-\dfrac{1}{a^4}$ の値を求めよ。

10. 次の式を，2 重根号をはずして簡単にせよ。 $\sqrt{\dfrac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}-1}+\dfrac{\sqrt{6}+3}{\sqrt{6}+1}}$

11. 次の方程式を解け。

(1) $|2x-1|=3$

(2) $2x+|x+1|+|x-1|=6$

12. 次の不等式を解け。

(1) $|x-3|>2$

(2) $3|1-x|\leqq 2$

13. 次の不等式を解け。

(1) $|2x-4|\geqq x+1$

(2) $|2x-3|<x$

14. 次の式の根号をはずし簡単にせよ。

(1) $\sqrt{(a-1)^2}-\sqrt{(a-3)^2}$ (ただし $1<a<3$)

(2) $\sqrt{a^2+4a+4}+\sqrt{a^2}$

15. 次の式を，分母を有理化して簡単にせよ。 $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

１．$a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$ を因数分解せよ。

解答　$(a+b)(b+c)(c+a)$

解説

(与式)$=(b+c)^2a+b(c^2+2ca+a^2)+c(a^2+2ab+b^2)-4abc$

$=(b+c)a^2+\{(b+c)^2+2bc+2bc-4bc\}a+bc^2+cb^2$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$

$=(b+c)\times a^2+(b+c)\times(b+c)a+(b+c)\times bc$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$　　←$x^2+(b+c)x+bc=(x+b)(x+c)$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$=(a+b)(b+c)(c+a)$

２．項を適当に組み合わせて共通因数を作り，x^3+x^2+2x+8 を因数分解せよ。

解答　$(x+2)(x^2-x+4)$

解説

(与式)$=(x^3+8)+(x^2+2x)$

$=(x+2)(x^2-2x+4)+x(x+2)$

$=(x+2)\{(x^2-2x+4)+x\}$

$=(x+2)(x^2-x+4)$

３．次の式を因数分解せよ。　$2x^2+3xy-2y^2+7x-y+3$

解答　$(x+2y+3)(2x-y+1)$

解説

$2x^2+3xy-2y^2+7x-y+3$　　←xについて降べきの順

$=2x^2+(3y+7)x-(2y^2+y-3)$

$=2x^2+(3y+7)x-(y-1)(2y+3)$

$=(x+2y+3)(2x-y+1)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -1 & \longrightarrow & -2 \\ 2 & & 3 & \longrightarrow & 3 \\ \hline 2 & & -3 & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 2y+3 & \longrightarrow & 4y+6 \\ 2 & & -(y-1) & \longrightarrow & -y+1 \\ \hline 2 & & -(y-1)(2y+3) & & 3y+7 \end{array}$$

４．次の式を因数分解せよ。　$(x+y+z)(x+3y+z)-8y^2$

解答　$(x+5y+z)(x-y+z)$

解説

$(x+y+z)(x+3y+z)-8y^2=\{(x+z)+y\}\{(x+z)+3y\}-8y^2$

$=(A+y)(A+3y)-8y^2$

$=A^2+4yA+3y^2-8y^2$

$=A^2+4yA-5y^2$

$=(A+5y)(A-y)$

$=\{(x+z)+5y\}\{(x+z)-y\}$

$=(x+5y+z)(x-y+z)$

５．次の式を因数分解せよ。　$2ab^2-3ab-2a+b-2$

解答　$(b-2)(2ab+a+1)$

解説

$2ab^2-3ab-2a+b-2=(2b^2-3b-2)a+b-2$　　←aの方が次数が低い

$=(b-2)(2b+1)a+(b-2)$

$=(b-2)\times(2b+1)a+(b-2)\times 1$　　←$(b-2)$でくくる

$=(b-2)\{(2b+1)a+1\}$　　←中かっこの中を展開

$=(b-2)(2ab+a+1)$

６．次の式を因数分解せよ。　$x^4-7x^2y^2+y^4$

解答　$(x^2+3xy+y^2)(x^2-3xy+y^2)$

解説

$x^4-7x^2y^2+y^4=(x^4+2x^2y^2+y^4)-9x^2y^2$　　←無理矢理、微調整

$=(x^2+y^2)^2-(3xy)^2$

$=\{(x^2+y^2)+3xy\}\{(x^2+y^2)-3xy\}$

$=(x^2+3xy+y^2)(x^2-3xy+y^2)$

７．次の式を因数分解せよ。　$(a^2-1)(b^2-1)-4ab$

解答　$(ab+a+b-1)(ab-a-b-1)$

解説

$(a^2-1)(b^2-1)-4ab$

$=a^2b^2-a^2-b^2+1-4ab$

$=(b^2-1)a^2-4ba-(b^2-1)$　　←aについて降べきの順

$=(b+1)(b-1)a^2-4ba-(b+1)(b-1)$

ここで、たすき掛けより

$$\begin{array}{ccccc} b+1 & \times & b-1 & \longrightarrow & (b-1)^2 \\ b-1 & & -(b+1) & \longrightarrow & -(b+1)^2 \\ \hline (b+1)(b-1) & & -(b+1)(b-1) & & -4b \end{array}$$

(与式)

$=\{(b+1)a+(b-1)\}\{(b-1)a-(b+1)\}$

$=(ab+a+b-1)(ab-a-b-1)$

別解　$(a^2-1)(b^2-1)-4ab=a^2b^2-a^2-b^2+1-4ab$　　←$4ab$を分ける

$=a^2b^2-a^2-b^2+1+(-2ab)+(-2ab)$

$=(a^2b^2-2ab+1)-(a^2+b^2+2ab)$　　←２乗－２乗を目標

$=(ab-1)^2-(a+b)^2$

$=\{(ab-1)+(a+b)\}\{(ab-1)-(a+b)\}$

$=(ab-1+a+b)(ab-1-a-b)$

$=(ab+a+b-1)(ab-a-b-1)$

別解は、もし気がつけばこの方法でもいい。

基本は、文字の次数を調べて、降べきの順に並べる。

８．$x=2+\sqrt{3}$，$y=2-\sqrt{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　x^3+y^3　　　(2)　$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$

解答　(1)　52　　(2)　14

解説

問題文で問われていなくても、$x+y$とxyを先に計算しておき、x^3+y^3を変形して$x+y$とxyで表す。

$x+y=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$

$xy=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$

(1)　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=4^3-3\cdot 1\cdot 4=52$

別解　$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$=(x+y)\{(x+y)^2-3xy\}$

$=4(4^2-3\cdot 1)=52$

(2)　$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{y^2}{xy}+\dfrac{x^2}{xy}=\dfrac{y^2+x^2}{xy}$

$=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}$

$=\dfrac{4^2-2\cdot 1}{1}=14$

９．$a=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$ のとき $a+\dfrac{1}{a}$，$a^2+\dfrac{1}{a^2}$，$a^4-\dfrac{1}{a^4}$ の値を求めよ。

解答　$a+\dfrac{1}{a}=\sqrt{7}$，$a^2+\dfrac{1}{a^2}=5$，$a^4-\dfrac{1}{a^4}=5\sqrt{21}$

解説

$\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\dfrac{2(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$

よって　$a+\dfrac{1}{a}=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}=\sqrt{7}$

$a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

ゆえに　$a^2+\dfrac{1}{a^2}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-2=7-2=5$

$a^4-\dfrac{1}{a^4}=\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)\left(a^2-\dfrac{1}{a^2}\right)$

$=\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(a-\dfrac{1}{a}\right)=5\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}=5\sqrt{21}$

参考

$a^n+\dfrac{1}{a^n}$　という形の式は、上記のように変形してから代入する

10．次の式を，２重根号をはずして簡単にせよ。　$\sqrt{\dfrac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}-1}+\dfrac{\sqrt{6}+3}{\sqrt{6}+1}}$

解答　$\dfrac{\sqrt{30}+2\sqrt{5}}{5}$

解説

$\sqrt{\dfrac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}-1}+\dfrac{\sqrt{6}+3}{\sqrt{6}+1}}=\sqrt{\dfrac{(\sqrt{6}+1)^2+(\sqrt{6}+3)(\sqrt{6}-1)}{(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)}}$　　←根号内を通分

$=\sqrt{\dfrac{(7+2\sqrt{6})+(3+2\sqrt{6})}{6-1}}=\sqrt{\dfrac{10+4\sqrt{6}}{5}}$

$$=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{4\cdot6}}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{24}}}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{4}}{\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{4})\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\sqrt{30}+2\sqrt{5}}{5}$$

11. 次の方程式を解け。

(1) $|2x-1|=3$　　(2) $2x+|x+1|+|x-1|=6$

解答 (1) $x=2,\ -1$　(2) $x=\dfrac{3}{2}$

解説

(1) $|2x-1|=3$ から　$2x-1=\pm3$　$\leftarrow |A|=c$ ならば $A=\pm c$

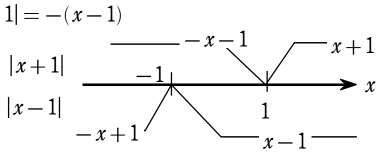
ゆえに　$2x=4,\ -2$

よって　$x=2,\ -1$

(2) $\begin{cases} x+1\geqq0 \text{ すなわち } x\geqq-1 \text{ のとき} & |x+1|=x+1 \\ x+1<0 \text{ すなわち } x<-1 \text{ のとき} & |x+1|=-(x+1) \end{cases}$

$\begin{cases} x-1\geqq0 \text{ すなわち } x\geqq1 \text{ のとき} & |x-1|=x-1 \\ x-1<0 \text{ すなわち } x<1 \text{ のとき} & |x-1|=-(x-1) \end{cases}$

となる。ゆえに、3つの場合で考える。



● $x\geqq1$ のとき

$2x+(x+1)+(x-1)=6$

これを解いて　$x=\dfrac{3}{2}$　これは $x\geqq1$ を満たす。

● $-1\leqq x<1$ のとき

$2x+(x+1)-(x-1)=6$

これを解いて　$x=2$　これは $-1\leqq x<1$ を満たさない。

● $x<-1$ のとき

$2x-(x+1)-(x-1)=6$

整理して　$0=6$　これを満たす x は存在しない。

以上により，方程式の解は　$x=\dfrac{3}{2}$

12. 次の不等式を解け。

(1) $|x-3|>2$　　(2) $3|1-x|\leqq2$

解答 (1) $x<1,\ 5<x$　(2) $\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq\dfrac{5}{3}$

解説

(1) $|x-3|>2$ から　$x-3<-2,\ 2<x-3$　←　公式より

ゆえに　$x<1,\ 5<x$

(2) 両辺3で割ると　$|1-x|\leqq\dfrac{2}{3}$

よって　$-\dfrac{2}{3}\leqq1-x\leqq\dfrac{2}{3}$　←公式より

各辺に -1 を加えて

$-1-\dfrac{2}{3}\leqq-x\leqq-1+\dfrac{2}{3}$

つまり

$-\dfrac{5}{3}\leqq-x\leqq-\dfrac{1}{3}$

すべてに(-1)をかけて　$\dfrac{5}{3}\geqq x\geqq\dfrac{1}{3}$　つまり　$\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq\dfrac{5}{3}$

13. 次の不等式を解け。

(1) $|2x-4|\geqq x+1$　　(2) $|2x-3|<x$

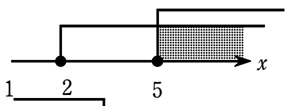
解答 (1) $x\leqq1,\ 5\leqq x$　(2) $1<x<3$

解説

(1) ● $2x-4\geqq0$ すなわち $x\geqq2$ のとき　$2x-4\geqq x+1$

これを解いて　$x\geqq5$

$x\geqq2$との共通範囲より　$x\geqq5$ …… ①

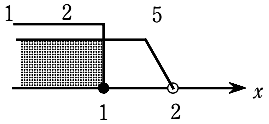


● $2x-4<0$ すなわち $x<2$ のとき　$-(2x-4)\geqq x+1$

すなわち　$-2x+4\geqq x+1$

これを解いて　$x\leqq1$

$x<2$との共通範囲より　$x\leqq1$ …… ②



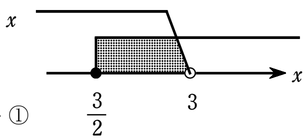
以上より，不等式の解は ① と ② を合わせた範囲であるから

$x\leqq1,\ 5\leqq x$

(2) ● $2x-3\geqq0$ すなわち $x\geqq\dfrac{3}{2}$ のとき　$2x-3<x$

ゆえに　$x<3$

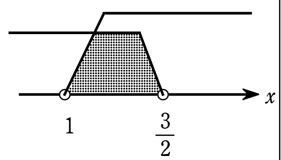
これと $x\geqq\dfrac{3}{2}$ との共通範囲は　$\dfrac{3}{2}\leqq x<3$ …… ①



● $2x-3<0$ すなわち $x<\dfrac{3}{2}$ のとき　$-(2x-3)<x$

ゆえに　$x>1$

これと $x<\dfrac{3}{2}$ との共通範囲は　$1<x<\dfrac{3}{2}$ …… ②



以上より，不等式の解は ① と ② を合わせた範囲であるから

$1<x<3$

14. 次の式の根号をはずし簡単にせよ。

(1) $\sqrt{(a-1)^2}-\sqrt{(a-3)^2}$（ただし $1<a<3$）　(2) $\sqrt{a^2+4a+4}+\sqrt{a^2}$

解答 (1) $2a-4$

(2) $a<-2$ のとき $-2a-2$，$-2\leqq a<0$ のとき 2，$0\leqq a$ のとき $2a+2$

解説

(1) $\sqrt{(a-1)^2}-\sqrt{(a-3)^2}=|a-1|-|a-3|$

$1<a<3$ のとき　$1<a$ かつ $a<3$，つまり　$a-1>0,\ a-3<0$ であるから

$|a-1|=a-1$　（そのままはずれる）

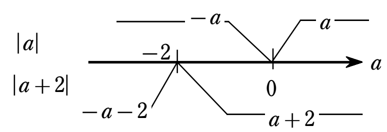
$|a-3|=-(a-3)$　（中身が(-1)倍されて外に出る）

ゆえに(与式)$=(a-1)-\{-(a-3)\}=(a-1)+(a-3)=2a-4$

(2) $\sqrt{a^2+4a+4}+\sqrt{a^2}=\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{a^2}=|a+2|+|a|$

このように、根号の形ではなく絶対値で与えられた表し、

以下は場合分けをして絶対値をはずす



● $a<-2$ のとき

$a+2<0,\ a<0$ であるから

(与式)$=-(a+2)-a=-2a-2$

● $-2\leqq a<0$ のとき

$a+2\geqq0,\ a<0$ であるから

(与式)$=(a+2)-a=2$

● $0\leqq a$ のとき　$a+2>0,\ a\geqq0$ であるから

(与式)$=(a+2)+a=2a+2$

よって，$a<-2$ のとき $-2a-2$，$-2\leqq a<0$ のとき 2，$0\leqq a$ のとき $2a+2$

15. 次の式を，分母を有理化して簡単にせよ。　$\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

解答 $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{15}}{3}$

解説

$$(\text{与式})=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}}{\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}}$$

$$=\frac{\{(\sqrt{2}+\sqrt{5})-\sqrt{3}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{5})+\sqrt{3}\}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}{2\sqrt{6}}=\frac{2+\sqrt{10}}{\sqrt{6}}$$

$$=\frac{(2+\sqrt{10})\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2}=\frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{15}}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{15}}{3}$$