数学演習（数と式･１次不等式）Ｈ２１．９．８　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１．$x=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x+y$，xy　　(2) $3x^2-5xy+3y^2$

２．(1) $(2+\sqrt{3}+\sqrt{7})(2+\sqrt{3}-\sqrt{7})$ を計算せよ。

(2) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ の分母を有理化せよ。

３．$1+\sqrt{5}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，次の値を求めよ。

(1) a，b の値　　(2) $b+\dfrac{1}{b}$，$b^3+\dfrac{1}{b^3}$ の値

４．2 重根号をはずして，次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{9+4\sqrt{2}}$　　(2) $\sqrt{3-\sqrt{5}}$

５．$a=2-\sqrt{3}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) a^2-4a+1 の値を求めよ。

(2) $x^3-6x^2+5x+1=(x-2)(x^2-4x+1)+P$ を満たす整式 P を求めよ。

(3) a^3-6a^2+5a+1 の値を求めよ。

６．$x+y+z=0$，$xy+yz+zx=-10$，$xyz=4\sqrt{3}$ のとき $x^2+y^2+z^2$，$x^3+y^3+z^3$ の値を，それぞれ求めよ。

7．次の連立不等式を解け。　$3x-1 \leqq x \leqq 2x+1$

8．次の方程式を解け。　$2x+|x+1|+|x-1|=6$

9．(1)　不等式 $6x+8(4-x)>5$ を満たす 2 桁の自然数 x をすべて求めよ。

(2)　あるテーマパークの入場料は 1 人 400 円で，35 人以上であれば 15 % の団体割引になる。35 人に満たない場合，何人以上であれば，35 人の団体割引として入場した方が得になるか。

(3)　不等式 $5(x-1)<2(2x+a)$ を満たす x のうちで，最大の整数が 6 であるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

10．(1)　p，q を定数とする x の不等式 $px \leqq x+q$ を解け。ただし，$p \fallingdotseq 1$ とする。

(2)　x の不等式 $2x+a<\dfrac{x-3a}{2}$ の解が $x<1$ に含まれるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

１．$x=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x+y$，xy　　(2) $3x^2-5xy+3y^2$

解答 (1) $x+y=-6$，$xy=1$　(2) 97

(1) $x+y=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

$=\dfrac{(1-\sqrt{2})^2}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}+\dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}$

$=-(3-2\sqrt{2})-(3+2\sqrt{2})$

$=-6$

$xy=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

$=1$

(2) (1) より，$x+y=-6$，$xy=1$ であるから

$3x^2-5xy+3y^2=3(x^2+y^2)-5xy$

$=3\{(x+y)^2-2xy\}-5xy$

$=3(x+y)^2-6xy-5xy$

$=3(x+y)^2-11xy$

$=3(-6)^2-11\cdot1$

$=97$

２．(1) $(2+\sqrt{3}+\sqrt{7})(2+\sqrt{3}-\sqrt{7})$ を計算せよ。

(2) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ の分母を有理化せよ。

解答 (1) $4\sqrt{3}$　(2) $\dfrac{3+2\sqrt{3}-\sqrt{21}}{12}$

(1) (与式)$=\{(2+\sqrt{3})+\sqrt{7}\}\{(2+\sqrt{3})-\sqrt{7}\}$

$=(2+\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2$

$=(4+4\sqrt{3}+3)-7$

$=4\sqrt{3}$

(2) (与式)$=\dfrac{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\{(2+\sqrt{3})+\sqrt{7}\}\{(2+\sqrt{3})-\sqrt{7}\}}$

$=\dfrac{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{(2+\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2}$

$=\dfrac{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{4\sqrt{3}}$

$=\dfrac{(2+\sqrt{3}-\sqrt{7})\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$

$=\dfrac{3+2\sqrt{3}-\sqrt{21}}{12}$

３．$1+\sqrt{5}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，次の値を求めよ。

(1) a，b の値　　(2) $b+\dfrac{1}{b}$，$b^3+\dfrac{1}{b^3}$ の値

解答 (1) $a=3$，$b=\sqrt{5}-2$　(2) $b+\dfrac{1}{b}=2\sqrt{5}$，$b^3+\dfrac{1}{b^3}=34\sqrt{5}$

(1) $2<\sqrt{5}<3$ であるから，$\sqrt{5}$ の整数部分は　2

ゆえに，$1+\sqrt{5}$ の整数部分は　$a=1+2=3$

小数部分は　$b=(1+\sqrt{5})-a$

$=(1+\sqrt{5})-3$

$=\sqrt{5}-2$

(2) (1) から

$b+\dfrac{1}{b}=\sqrt{5}-2+\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$

$=\sqrt{5}-2+\dfrac{\sqrt{5}+2}{5-4}$

$=2\sqrt{5}$

また　$\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^3=b^3+3b^2\cdot\dfrac{1}{b}+3b\left(\dfrac{1}{b}\right)^2+\left(\dfrac{1}{b}\right)^3$

$=b^3+\dfrac{1}{b^3}+3b\cdot\dfrac{1}{b}\left(b+\dfrac{1}{b}\right)$

であるから

$b^3+\dfrac{1}{b^3}=\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^3-3b\cdot\dfrac{1}{b}\left(b+\dfrac{1}{b}\right)$

$=(2\sqrt{5})^3-3\cdot2\sqrt{5}$

$=34\sqrt{5}$

４．2 重根号をはずして，次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{9+4\sqrt{2}}$　　(2) $\sqrt{3-\sqrt{5}}$

解答 (1) $2\sqrt{2}+1$　(2) $\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$

(1) (与式)$=\sqrt{9+2\sqrt{8}}$

$=\sqrt{(8+1)+2\sqrt{8\cdot1}}$

$=\sqrt{8}+\sqrt{1}$

$=2\sqrt{2}+1$

(2) (与式)$=\sqrt{\dfrac{6-2\sqrt{5}}{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{(5+1)-2\sqrt{5\cdot1}}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$

５．$a=2-\sqrt{3}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) a^2-4a+1 の値を求めよ。

(2) $x^3-6x^2+5x+1=(x-2)(x^2-4x+1)+P$ を満たす整式 P を求めよ。

(3) a^3-6a^2+5a+1 の値を求めよ。

解答 (1) 0　(2) $-4x+3$　(3) $-5+4\sqrt{3}$

(1) $a-2=-\sqrt{3}$ であるから　$(a-2)^2=(-\sqrt{3})^2$

ゆえに　$a^2-4a+4=3$

よって　$a^2-4a+1=0$

別解 $a^2-4a+1=(2-\sqrt{3})^2-4(2-\sqrt{3})+1$

$=4-4\sqrt{3}+3-8+4\sqrt{3}+1=0$

(2) $P=x^3-6x^2+5x+1-(x-2)(x^2-4x+1)$

$=x^3-6x^2+5x+1-(x^3-6x^2+9x-2)$

$=-4x+3$

(3) (1)，(2) の結果から　$a^3-6a^2+5a+1=(a-2)(a^2-4a+1)-4a+3$

$=-\sqrt{3}\cdot0-4(2-\sqrt{3})+3$

$=-5+4\sqrt{3}$

６．$x+y+z=0$，$xy+yz+zx=-10$，$xyz=4\sqrt{3}$ のとき $x^2+y^2+z^2$，$x^3+y^3+z^3$ の値を，それぞれ求めよ。

解答 $x^2+y^2+z^2=20$，$x^3+y^3+z^3=12\sqrt{3}$

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$=0^2-2(-10)$

$=20$

また，$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ より

$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)\{x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\}+3xyz$

$=0+3\cdot4\sqrt{3}$

$=12\sqrt{3}$

7. 次の連立不等式を解け。　$3x-1 \leqq x \leqq 2x+1$

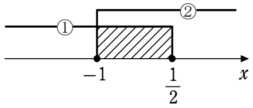
解答　$-1 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$

$3x-1 \leqq x$ から　$2x \leqq 1$

ゆえに　$x \leqq \frac{1}{2}$ ……①

$x \leqq 2x+1$ から　$-x \leqq 1$

ゆえに　$x \geqq -1$ ……②



① と ② の共通範囲を求めて　$-1 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$

8. 次の方程式を解け。　$2x+|x+1|+|x-1|=6$

解答　$x=\frac{3}{2}$

$\begin{cases} x+1 \geqq 0 \text{ すなわち } x \geqq -1 \text{ のとき} & |x+1|=x+1 \\ x+1<0 \text{ すなわち } x<-1 \text{ のとき} & |x+1|=-(x+1) \end{cases}$

$\begin{cases} x-1 \geqq 0 \text{ すなわち } x \geqq 1 \text{ のとき} & |x-1|=x-1 \\ x-1<0 \text{ すなわち } x<1 \text{ のとき} & |x-1|=-(x-1) \end{cases}$

$x \geqq 1$ のとき

$2x+(x+1)+(x-1)=6$

これを解いて　$x=\frac{3}{2}$　これは $x \geqq 1$ を満たす。

$-1 \leqq x<1$ のとき

$2x+(x+1)-(x-1)=6$

これを解いて　$x=2$　これは $-1 \leqq x<1$ を満たさない。

$x<-1$ のとき

$2x-(x+1)-(x-1)=6$

整理して　$0=6$　これを満たす x は存在しない。

以上により，方程式の解は　$x=\frac{3}{2}$

9. (1)　不等式 $6x+8(4-x)>5$ を満たす 2 桁の自然数 x をすべて求めよ。

(2)　あるテーマパークの入場料は 1 人 400 円で，35 人以上であれば 15 % の団体割引になる。35 人に満たない場合，何人以上であれば，35 人の団体割引として入場した方が得になるか。

(3)　不等式 $5(x-1)<2(2x+a)$ を満たす x のうちで，最大の整数が 6 であるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

解答　(1)　$x=10,\ 11,\ 12,\ 13$　(2)　30 人以上　(3)　$\frac{1}{2}<a \leqq 1$

(1)　$6x+8(4-x)>5$ から　$-2x>-27$

ゆえに　$x<\frac{27}{2}=13.5$

x は 2 桁の自然数であるから　$10 \leqq x \leqq 13$

よって　$x=10,\ 11,\ 12,\ 13$

(2)　x 人入場するとする。

正規の入場料を払う場合の金額は　$400x$ 円

35 人未満の場合に 35 人の団体割引として払う場合の金額は

$400 \times 35 \times (1-0.15)=11900$

団体割引の方が得になるとき　$400x>11900$

ゆえに　$x>\frac{11900}{400}=29.75$

x は整数であるから　$x \geqq 30$

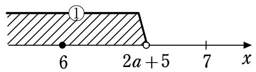
よって　30 人以上

(3)　$5(x-1)<2(2x+a)$ から　$x<2a+5$　……①

① を満たす x のうちで最大の整数が 6 となるのは

$6<2a+5 \leqq 7$

のときである。



ゆえに　$1<2a \leqq 2$

よって　$\frac{1}{2}<a \leqq 1$

10. (1)　p，q を定数とする x の不等式 $px \leqq x+q$ を解け。ただし，$p \neq 1$ とする。

(2)　x の不等式 $2x+a<\frac{x-3a}{2}$ の解が $x<1$ に含まれるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

解答　(1)　$p>1$ のとき　$x \leqq \frac{q}{p-1}$；$p<1$ のとき　$x \geqq \frac{q}{p-1}$；

(2)　$a \geqq -\frac{3}{5}$

(1)　$px \leqq x+q$ を変形して　$(p-1)x \leqq q$

$p>1$ ならば　$p-1>0$　より　$x \leqq \frac{q}{p-1}$，

$p<1$ ならば　$p-1<0$　より　$x \geqq \frac{q}{p-1}$

以上から　$p>1$ のとき　$x \leqq \frac{q}{p-1}$

$p<1$ のとき　$x \geqq \frac{q}{p-1}$

2)　$2x+a<\frac{x-3a}{2}$ の両辺に 2 を掛けて整理すると

$3x<-5a$　よって　$x<-\frac{5}{3}a$

これが $x<1$ に含まれる条件は　$-\frac{5}{3}a \leqq 1$

ゆえに　$a \geqq -\frac{3}{5}$