

1. 次の式を展開せよ。

- (1) $(a+b-c)^2$
- (2) $(x^2+x+2)(x^2+x-3)$
- (3) $(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^2$
- (4) $(a-b)^3(a+b)^3(a^2+b^2)^3$

2. $(a^4-2a^3b-3a^2b^2-b^4)(a^3+4a^2b-ab^2+3b^3)$ を展開したときの、 a^4b^3 および a^2b^5 の係数を求めよ。

3. 多項式 $3x^2-2xy-y^2+ax+6y-8$ が2つの1次式の積に因数分解できるように、定数 a の値を定め、因数分解せよ。

4. 次の式を因数分解せよ。

- (1) $54x^3+16y^3$
- (2) $x^3+3x^2y+zx^2+2xy^2+3xyz+2zy^2$
- (3) $2x^2+5xy+2y^2+5x+y-3$
- (4) x^3+x^2+2x+8
- (5) $4a^4-17a^2b^2+4b^4$
- (6) x^4+x^2+1
- (7) x^6-1
- (8) $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)-144$
- (9) $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$

1. 次の式を展開せよ。

- (1) $(a+b-c)^2$
- (2) $(x^2+x+2)(x^2+x-3)$
- (3) $(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^2$
- (4) $(a-b)^3(a+b)^3(a^2+b^2)^3$

【解答】 (1) $a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$

(2) x^4+2x^3-x-6

(3) $x^7+x^5+x^4+x^3+x^2+1$

(4) $a^{12}-3a^8b^4+3a^4b^8-b^{12}$

(1) $(a+b-c)^2=\{a+(b-c)\}^2$
 $=a^2+2a(b-c)+(b-c)^2$
 $=a^2+2ab-2ac+(b^2-2bc+c^2)$
 $=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$

(2) $(x^2+x+2)(x^2+x-3)=\{(x^2+x)+2\}\{(x^2+x)-3\}$
 $=(x^2+x)^2-(x^2+x)-6$
 $=(x^4+2x^3+x^2)-x^2-x-6$
 $=x^4+2x^3-x-6$

(3) $(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^2=(x+1)(x^2-x+1)\times(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
 $=(x^3+1)\{(x^2+1)^2-x^2\}$
 $=(x^3+1)(x^4+x^2+1)$
 $=x^3(x^4+x^2+1)+(x^4+x^2+1)$
 $=x^7+x^5+x^4+x^3+x^2+1$

(4) $(a-b)^3(a+b)^3(a^2+b^2)^3=\{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)\}^3$
 $=\{(a^2-b^2)(a^2+b^2)\}^3$
 $=(a^4-b^4)^3$
 $=a^{12}-3a^8b^4+3a^4b^8-b^{12}$

2. $(a^4-2a^3b-3a^2b^2-b^4)(a^3+4a^2b-ab^2+3b^3)$ を展開したときの、 a^4b^3 および a^2b^5 の係数を求めよ。

【解答】 a^4b^3 の係数は -7 、 a^2b^5 の係数は -13

展開して a^4b^3 になる項は、 a^4 と $3b^3$ 、 $-2a^3b$ と $-ab^2$ 、 $-3a^2b^2$ と $4a^2b$ の組み合わせである。

$a^4\cdot 3b^3+(-2a^3b)\cdot (-ab^2)+(-3a^2b^2)\cdot 4a^2b=(3+2-12)a^4b^3$
 $=-7a^4b^3$

よって、 a^4b^3 の係数は -7

展開して a^2b^5 になる項は、 $-3a^2b^2$ と $3b^3$ 、 $-b^4$ と $4a^2b$ の組み合わせである。

$(-3a^2b^2)\cdot 3b^3+(-b^4)\cdot 4a^2b=(-9-4)a^2b^5=-13a^2b^5$

よって、 a^2b^5 の係数は -13

3. 多項式 $3x^2-2xy-y^2+ax+6y-8$ が2つの1次式の積に因数分解できるように、定数 a の値を定め、因数分解せよ。

【解答】 $a=2$ のとき $(x-y+2)(3x+y-4)$; $a=10$ のとき $(x-y+4)(3x+y-2)$

$3x^2-2xy-y^2=(x-y)(3x+y)$

であるから、与えられた多項式が 因数分解できるための条件は、次の恒等式が成り立つことである。

$3x^2-2xy-y^2+ax+6y-8=(x-y+b)(3x+y+c) \cdots \cdots \text{①}$

①の右边を展開して整理すると

$3x^2-2xy-y^2+(3b+c)x+(b-c)y+bc$

これと①の左边とで係数を比較して

$3b+c=a \cdots \cdots \text{②}, b-c=6 \cdots \cdots \text{③}, bc=-8 \cdots \cdots \text{④}$

③、④から c を消去して $b(b-6)=-8$

$b^2-6b+8=0$ から $b=2, 4$

$b=2$ のとき、③、②から $c=-4, a=2$

$b=4$ のとき、③、②から $c=-2, a=10$

よって、①から $a=2$ のとき $(x-y+2)(3x+y-4)$; または

$a=10$ のとき $(x-y+4)(3x+y-2)$

【別解】 多項式 $3x^2-2xy-y^2+ax+6y-8$ を x について整理すると

$3x^2-2xy-y^2+ax+6y-8=3x^2+(a-2y)x-(y^2-6y+8)$

となり、この式が因数分解できるためには、 x の多項式としてみたときの判別式 D が、 $D=(yの多項式)^2$ の形にならなくてはいけない。

$D=(a-2y)^2-4\cdot 3\cdot \{-(y^2-6y+8)\}$

$=a^2-4ay+4y^2+12y^2-72y+96$

$=16y^2-(72+4a)y+a^2+96$

$=16y^2-4(a+18)y+a^2+96$

より、上式が $(yの多項式)^2$ となるためには、上式を y の2次方程式としてみたときの判別式 D' が0になればよい。（重解をもつから）

$D'/4=\{2(a+18)\}^2-16(a^2+96)$

$=4\{(a+18)^2-4(a^2+96)\}$

$=4(-3a^2+36a-60)$

$=-12(a^2-12a+20)$

$=-12(a-2)(a-10)$

$D'=0$ から、 $a=2, 10$ <以下同じ>

4. 次の式を因数分解せよ。

- (1) $54x^3+16y^3$
- (2) $x^3+3x^2y+zx^2+2xy^2+3xyz+2zy^2$
- (3) $2x^2+5xy+2y^2+5x+y-3$
- (4) x^3+x^2+2x+8
- (5) $4a^4-17a^2b^2+4b^4$
- (6) x^4+x^2+1
- (7) x^6-1
- (8) $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)-144$
- (9) $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$

【解答】 (1) $2(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$

(2) $(x+y)(x+2y)(x+z)$

(3) $(x+2y+3)(2x+y-1)$

(4) $(x+2)(x^2-x+4)$

(5) $(a+2b)(a-2b)(2a+b)(2a-b)$

(6) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

(7) $(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

(8) $(x^2+x+6)(x-4)(x+5)$

(9) $(a+b)(b+c)(c+a)$

1) $54x^3+16y^3=2(27x^3+8y^3)$
 $=2\{(3x)^3+(2y)^3\}$
 $=2(3x+2y)\{(3x)^2-3x\cdot 2y+(2y)^2\}$
 $=2(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$

(2) $x^3+3x^2y+zx^2+2xy^2+3xyz+2zy^2=(x^2+3xy+2y^2)z+x^3+3x^2y+2xy^2$
 $=(x^2+3xy+2y^2)z+x(x^2+3xy+2y^2)$
 $=(x^2+3xy+2y^2)(z+x)$
 $=(x+y)(x+2y)(x+z)$

(3) $2x^2+5xy+2y^2+5x+y-3=2x^2+5(y+1)x+2y^2+y-3$

$=2x^2+5(y+1)x+(y-1)(2y+3) \cdots \cdots \text{[A]}$

$=\{x+(2y+3)\}\{2x+(y-1)\} \cdots \cdots \text{[B]}$

$=(x+2y+3)(2x+y-1)$

$\text{[A]} \quad \begin{array}{rcccl} 1 & & -1 & \longrightarrow & -2 \\ 2 & \times & 3 & \longrightarrow & 3 \\ \hline 2 & & -3 & & 1 \end{array}$

$\text{[B]} \quad \begin{array}{rcccl} 1 & & 2y+3 & \longrightarrow & 4y+6 \\ 2 & \times & y-1 & \longrightarrow & y-1 \\ \hline 2 & & (2y+3)(y-1) & & 5y+5 \end{array}$

(4) (与式) $=(x^3+8)+(x^2+2x)$
 $=(x+2)(x^2-2x+4)+x(x+2)$
 $=(x+2)\{(x^2-2x+4)+x\}$
 $=(x+2)(x^2-x+4)$

(5) $4a^4-17a^2b^2+4b^4=4(a^2)^2-17a^2b^2+4(b^2)^2$
 $=(a^2-4b^2)(4a^2-b^2)$
 $=(a+2b)(a-2b)(2a+b)(2a-b)$

(6) $x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2$
 $=(x^2+1)^2-x^2$
 $=\{(x^2+1)+x\}\{(x^2+1)-x\}$
 $=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

(7) $x^6-1=(x^3)^2-1^2$
 $=(x^3+1)(x^3-1)$
 $=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

【別解】 $x^6-1=(x^2)^3-1^3$
 $=(x^2-1)\{(x^2)^2+x^2+1\}$
 $=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

(8) $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)-144=(x-3)(x+4)\times(x-1)(x+2)-144$
 $=\{(x^2+x)-12\}\{(x^2+x)-2\}-144$
 $=(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24-144$
 $=(x^2+x)^2-14(x^2+x)-120$
 $=\{(x^2+x)+6\}\{(x^2+x)-20\}$
 $=(x^2+x+6)(x-4)(x+5)$

【別解】 x^2+x-12 と x^2+x-2 の和を2で割った式は

$\{(x^2+x-12)+(x^2+x-2)\}\div 2=x^2+x-7$

この式を利用すると

$(x^2+x-12)(x^2+x-2)-144=\{(x^2+x-7)-5\}\{(x^2+x-7)+5\}-144$
 $=(x^2+x-7)^2-169$
 $=\{(x^2+x-7)+13\}\{(x^2+x-7)-13\}$
 $=(x^2+x+6)(x^2+x-20)$
 $=(x^2+x+6)(x-4)(x+5)$

(9) (与式) $=(b+c)^2a+b(c^2+2ca+a^2)+c(a^2+2ab+b^2)-4abc$
 $=(b+c)a^2+\{(b+c)^2+2bc+2bc-4bc\}a+bc^2+cb^2$
 $=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$
 $=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}=(b+c)(a+b)(a+c)=(a+b)(b+c)(c+a)$