

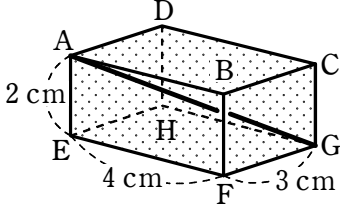
第4章「三平方の定理」3 三平方の定理と空間図形

＜直方体の対角線＞

三平方の定理を用いて、空間図形における線分の長さを求めよう。

【例題 12】 右の図のような直方体
ABCD－EFGH において、線分
AG の長さを求めなさい。

【考え方】 線分 AG を辺とする直角三角形を見つ
ける。たとえば、底面の対角線 EG を
引き、△AEG について考える。



【解答】 △EFG は直角三角形であるから、三平方の定理により

$$EG^2 = EF^2 + FG^2 \quad \dots\dots ①$$

△AEG も直角三角形である
から、三平方の定理により

$$AG^2 = AE^2 + EG^2 \quad \dots\dots ②$$

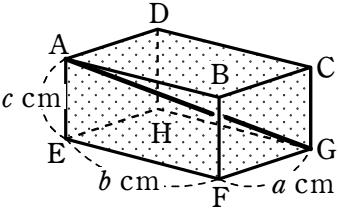
①, ② から 代入

$$AG^2 = AE^2 + EF^2 + FG^2$$
$$= 2^2 + 4^2 + 3^2 = 4 + 16 + 9 = 29$$
$$AG = \pm \sqrt{29} \quad AG > 0 \text{ であるから} \quad AG = \sqrt{29} \text{ cm} \quad \text{答}$$

AE は底面EFGH に対して垂直より、
AE と EG は垂直

例題 12 の直方体で、線分 AG をこの直方体の対角線という。線分 BH, CE, DF も
この直方体の対角線で、長さはすべて等しい。

【参考】(直方体の対角線の長さ)



対角線 AG の長さ
 $AG^2 = a^2 + b^2 + c^2$
(対角線の長さ)² = (縦)² + (横)² + (高さ)²

【練習 22】 縦の長さ、横の長さ、高さがそれぞれ次のような直方体の対角線の
長さを求めなさい。 まずは簡単な図を書いて考えること

- (1) 2 cm, 5 cm, 6 cm
- (2) 4 cm, 8 cm, 8 cm
- (3) a cm, b cm, c cm
- (4) a cm, a cm, a cm

【解答】 直方体を ABCD－EFGH として、縦を GF, 横を EF, 高さを AE とする。

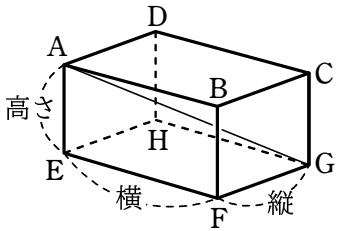
(1) △EFG は直角三角形であるから

$$EG^2 = EF^2 + FG^2 \quad \dots\dots ①$$

△AEG も直角三角形であるから 代入

$$AG^2 = AE^2 + EG^2 \quad \dots\dots ②$$

①, ② から $AG^2 = AE^2 + EF^2 + FG^2$

$$= 6^2 + 5^2 + 2^2 = 36 + 25 + 4 = 65$$


$AG = \pm \sqrt{65} \quad AG > 0 \text{ であるから} \quad AG = \sqrt{65} \text{ cm}$
よって、対角線の長さは $\sqrt{65} \text{ cm}$

(2) (1) と同様にして $AG^2 = AE^2 + EF^2 + FG^2 = 8^2 + 8^2 + 4^2 = 64 + 64 + 16 = 144$

$AG = \pm \sqrt{144} = \pm 12 \quad AG > 0 \text{ であるから} \quad AG = 12 \text{ cm}$
よって、対角線の長さは 12 cm

(3) (1) と同様にして $AG^2 = AE^2 + EF^2 + FG^2 = c^2 + b^2 + a^2$ アルファベット順にする
にはならない

$AG = \pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad AG > 0 \text{ であるから} \quad AG = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \text{ cm}$
よって、対角線の長さは $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \text{ cm}$

(4) (1) と同様にして $AG^2 = AE^2 + EF^2 + FG^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$

$AG = \pm \sqrt{3a^2} = \pm \sqrt{3} a \quad AG > 0 \text{ であるから} \quad AG = \sqrt{3} a \text{ cm}$
よって、対角線の長さは $\sqrt{3} a \text{ cm}$

＜空間図形への応用＞

空間における立体の体積などを求めることを考えよう。

底面が正方形で、側面がすべて二等辺三角形である四角錐を正四角錐といいます
例題 13 底面が1辺6 cm の正方形 ABCD で、他の辺が7 cm である
正四角錐 O－ABCD がある。この正四角錐の体積を求めなさい。

【考え方】 $(\text{角錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$
であるから、正四角錐の体積を求めるには高さがわかればよい。

参考 Oから底面ABCDに下ろした垂線の足をHとする。4つの直角三角形△OAH, △OBH, △OCH, △ODHはすべて斜辺が等しく、またOHが共通なので合同である。
 $OA=OB=OC=OD$
ゆえにAH=BH=CH=DHとなるので、正方形ABCDにおいてこのようなHは対角線の交点である。

解答 底面の対角線の交点をHとすると、OHと面ABCDは垂直になるから、線分OHの長さは、正四角錐の高さである。
底面ABCDは正方形であるから
 $AC=AB \times \sqrt{2} = 6 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ (cm)
よって

$AH = \frac{1}{2}AC = 3\sqrt{2}$ (cm)

△OAHは直角三角形であるから、三平方の定理により $AH^2 + OH^2 = OA^2$

$(3\sqrt{2})^2 + OH^2 = 7^2$

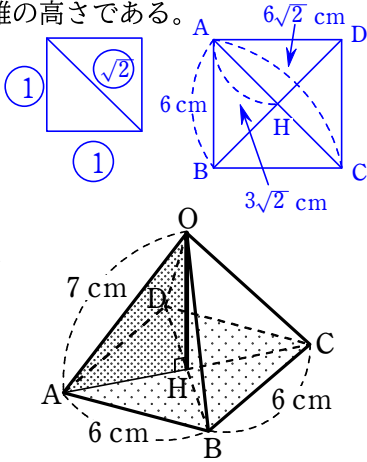
$18 + OH^2 = 49$

$OH^2 = 49 - 18 = 31$

$OH = \pm \sqrt{31}$ $OH > 0$ であるから $OH = \sqrt{31}$ cm

よって、求める体積は

$\frac{1}{3} \times (\text{四角形ABCD}) \times OH = \frac{1}{3} \times 6^2 \times \sqrt{31} = 12\sqrt{31}$ (cm³) ㊟



練習 23 例題 13 の正四角錐の側面積を求めなさい。

解答 側面は4つの合同な二等辺三角形からつくられている。
まず、側面の1つ △OAB の面積を求める。
頂点 O から辺 AB に引いた垂線の足を G とする。
△OAB は二等辺三角形であるから、
点 G は辺 AB の中点である。

よって $AG = \frac{1}{2}AB = 3$ (cm)
直角三角形 OAG において三平方の定理から $1:2:\sqrt{3}$ ではない

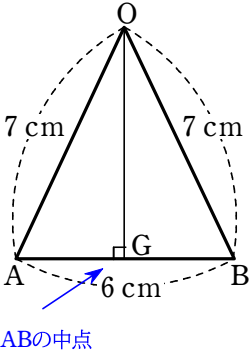
$AG^2 + OG^2 = OA^2$ より $3^2 + OG^2 = 7^2$

$OG^2 = 7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40$

$OG = \pm \sqrt{40} = \pm 2\sqrt{10}$ $OG > 0$ であるから $OG = 2\sqrt{10}$ cm

よって $\triangle OAB = \frac{1}{2} \times AB \times OG = \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{10} = 6\sqrt{10}$ (cm²)

したがって、求める正四角錐の側面積△OABが4個分より $6\sqrt{10} \times 4 = 24\sqrt{10}$ (cm²)



練習 24 次のような立体の体積を求めなさい。

- (1) 1 辺の長さがすべて 8 cm の正四角錐
- (2) 底面の直径と母線の長さがともに 6 cm の円錐

解答

それぞれ、図のように点を定める。

- (1) 底面の対角線の交点を H とすると、OH と

面 ABCD は垂直になるから、線分 OH の長さは、正四角錐の高さである。

底面 ABCD は正方形であるから

$$AC = \sqrt{2} AB = 8\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$\text{よって } AH = 8\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

△OAH は直角三角形であるから三平方の定理より $AH^2 + OH^2 = OA^2$

$$(4\sqrt{2})^2 + OH^2 = 8^2 \quad \text{より} \quad OH^2 = 8^2 - (4\sqrt{2})^2 = 64 - 32 = 32$$

$$OH = \pm \sqrt{32} = \pm 4\sqrt{2} \quad \text{より} \quad OH > 0 \text{ であるから } OH = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

よって、正四角錐の体積は

$$\frac{1}{3} \times (\text{四角形 ABCD}) \times OH = \frac{1}{3} \times 8^2 \times 4\sqrt{2} = \frac{256\sqrt{2}}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

- (2) 右の図において、△OAB は正三角形である。

底面の円の中心を H とすると、OH と底面は垂直になるから、線分 OH の長さは、円錐の高さである。

△OAH は 30°, 60°, 90° の直角三角形であるから

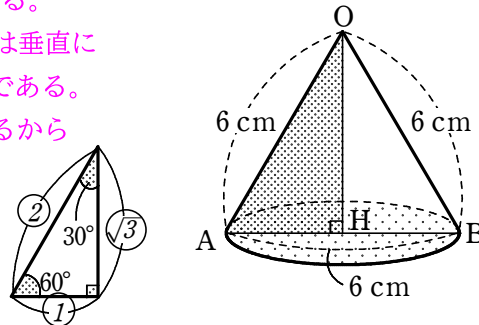
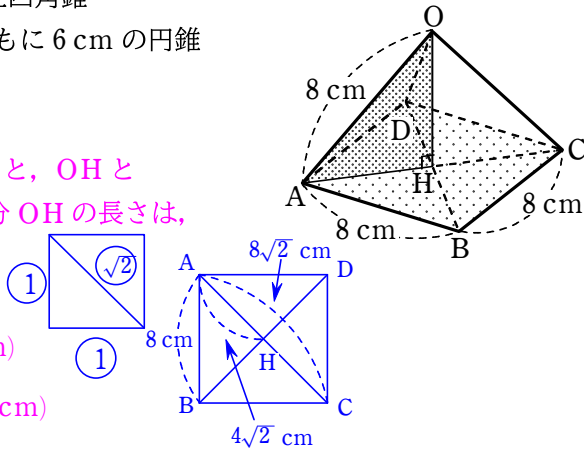
$$OH = \sqrt{3} AH = \sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

よって、円錐の体積は 1:2:√3 の比で

$$\frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times OH \quad \text{高さ OH が求められる}$$

(気がつきましたか?)

$$= \frac{1}{3} \times (\pi \times 3^2) \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$



例題 14 1 辺の長さが 4 cm の正四面体 ABCD において、辺 AB, AC の中点を

それぞれ M, N とするとき、△DMN の面積を求めなさい。

求めたい三角形の形状が分かれば、そこからは立体で考えなくてもよい

解答

△ABD は正三角形であるから、

DM ⊥ AB で

$$DM : AD = \sqrt{3} : 2 \quad \text{よって} \quad DM = AD \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$DN : AD = \sqrt{3} : 2$$

同様に $DN = 2\sqrt{3} \text{ cm}$

また、△ABC において、中点

連結定理により

MN は BC と平行で長さが半分

$$MN = \frac{1}{2} BC = 2 \text{ (cm)}$$

改めて△DMNの図を書こう

△DMN は二等辺三角形である

から、D から辺 MN に垂線 DH

を引くと、H は辺 MN の中点で

$$MH = 1 \text{ cm}$$

直角三角形 DMH において、三平方の

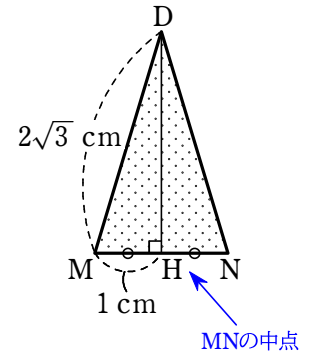
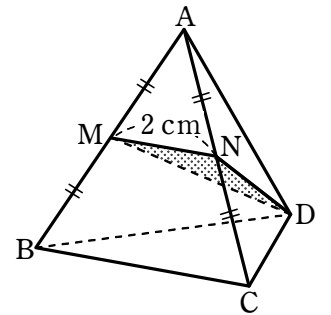
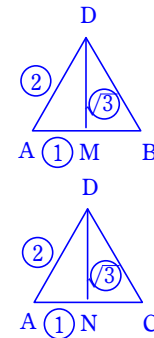
定理により $MH^2 + DH^2 = DM^2$

$$1^2 + DH^2 = (2\sqrt{3})^2 \quad \text{より}$$

$$DH^2 = 12 - 1 = 11 \quad \text{ゆえに} \quad DH = \pm \sqrt{11}$$

$$DH > 0 \text{ であるから } DH = \sqrt{11} \text{ cm}$$

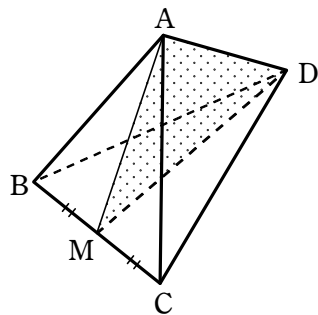
$$\text{よって} \quad \triangle DMN = \frac{1}{2} \times MH \times DH = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{11} = \sqrt{11} \text{ (cm}^2\text{)} \quad \text{答}$$



練習 25 右の図は、 $AB=AC=DB=DC=8\text{ cm}$ 、

$BC=AD=4\text{ cm}$ の四面体 $ABCD$ である。辺 BC の中点を M とするとき、次のものを求めなさい。

- (1) $\triangle AMD$ の面積
- (2) 四面体 $ABCD$ の体積



解答

- (1) $\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形で、 M は辺 BC の中点であるから

$BM=2\text{ cm}$, $AM \perp BC$

よって、 $\triangle ABM$ は直角三角形であるから三平方の定理から

$$BM^2 + AM^2 = AB^2 \quad \text{より} \quad 2^2 + AM^2 = 8^2$$

$$AM^2 = 64 - 4 = 60 \quad \text{ゆえに} \quad AM = \pm \sqrt{60} = \pm 2\sqrt{15}$$

$$AM > 0 \quad \text{より} \quad AM = 2\sqrt{15}\text{ cm}$$

$\triangle DBC$ において、同様に $DM = 2\sqrt{15}\text{ cm}$

$\triangle MAD$ は $AM=DM$ の二等辺三角形であるから

点 M から辺 AD に垂線 MH を引くと、 H は辺 MN の中点で

$$AH = 2\text{ cm}$$

直角三角形 MAH において、三平方の

定理により $AH^2 + MH^2 = MA^2$

$$2^2 + MH^2 = (2\sqrt{15})^2 \quad \text{より}$$

$$MH^2 = 60 - 4 = 56 \quad \text{ゆえに} \quad MH = \pm \sqrt{56} = \pm 2\sqrt{14}$$

$$MH > 0 \quad \text{であるから} \quad MH = 2\sqrt{14}\text{ cm}$$

よって

$$\triangle AMD = \frac{1}{2} \times AD \times MH = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{14} = 4\sqrt{14} \text{ (cm}^2\text{)} \quad \text{答}$$

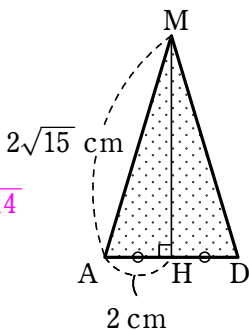
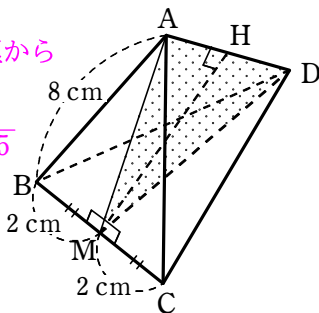
- (2) (1) より $AM \perp BC$ であり、 $\triangle DBC$ においても同様に $DM \perp BC$ であるから辺 BC と $\triangle AMD$ は垂直である。

四面体 $BAMD$ の体積は

$$\frac{1}{3} \times \triangle AMD \times BM = \frac{1}{3} \times 4\sqrt{14} \times 2 = \frac{8}{3}\sqrt{14} \text{ (cm}^3\text{)}$$

$\triangle AMD$ をはさんで同じ立体が2つある

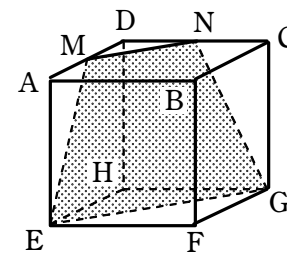
$$\text{よって四面体 } ABCD \text{ の体積は } \frac{8}{3}\sqrt{14} \times 2 = \frac{16}{3}\sqrt{14} \text{ (cm}^3\text{)}$$



例題 15

1 辺の長さが 8 cm の立方体 $ABCD-EFGH$

の辺 AD 、 CD の中点をそれぞれ M 、 N とするとき、四角形 $MEGN$ の面積を求めなさい。



解答

$$MN = MD \times \sqrt{2} = 4 \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)},$$

$$EG = EF \times \sqrt{2} = 8 \times \sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

また、直角三角形 MAE において、

三平方の定理により

$$AM^2 + AE^2 = ME^2$$

$$ME^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80$$

$$ME = \pm \sqrt{80} = \pm 4\sqrt{5}$$

$$ME > 0 \quad \text{であるから} \quad ME = 4\sqrt{5}\text{ cm}$$

$$\text{同様に} \quad NG = 4\sqrt{5}\text{ cm}$$

$$\text{よって} \quad ME = NG \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{また} \quad MN \parallel EG \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$MN \parallel AC$ であり、 $AC \parallel EG$ であるから、 $MN \parallel EG$

上と同じ図形より $ME = NG$

①、② から、四角形 $MEGN$ は等脚台形である。 高さ MP を求めにいく

M 、 N から辺 EG に引いた垂線の足を、それぞれ P 、 Q とす

ると、 $PQ = 4\sqrt{2}\text{ cm}$ 、 $EP = GQ$ であるから

EG から PQ を除いた部分を2等分

$$EP = (8\sqrt{2} - 4\sqrt{2}) \times \frac{1}{2} = 4\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

直角三角形 MEP において、三平方の定理により $EP^2 + MP^2 = ME^2$

$$\text{よって} \quad (2\sqrt{2})^2 + MP^2 = (4\sqrt{5})^2 \quad \text{より} \quad MP^2 = 80 - 8 = 72$$

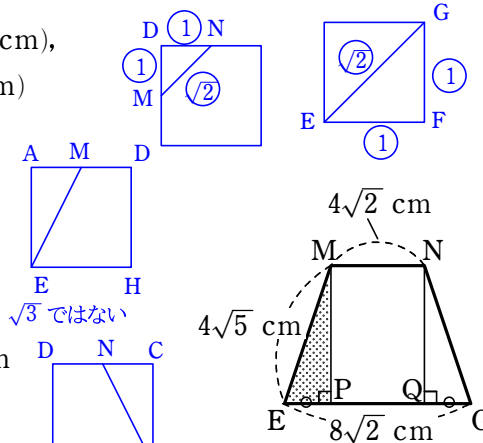
$$MP = \pm \sqrt{72} = \pm 6\sqrt{2} \quad MP > 0 \quad \text{であるから} \quad MP = 6\sqrt{2}\text{ cm}$$

よって、求める面積は

$$\frac{1}{2} \times (MN + EG) \times MP = \frac{1}{2} \times (4\sqrt{2} + 8\sqrt{2}) \times 6\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 12\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} = 72 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\frac{1}{2} \times (\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高さ}$$

答



練習 26 例題 15 において、辺 AE, GC の中点をそれぞれ I, J とするとき、
四角形 DIFJ の面積を求めなさい。

【解答】

直角三角形 AID において、三平方の定理により

$$AD^2 + AI^2 = DI^2 \quad \text{より}$$

$$DI^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80$$

$$DI = \pm \sqrt{80} = \pm 4\sqrt{5}$$

$$DI > 0 \text{ であるから } DI = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

同様に 全部同じ長さ

$$IF = FJ = JD = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

よって、四角形 DIFJ の 4 つの辺は
すべて等しいので、四角形 DIFJ は
ひし形である。

対角線の長さ (DF と IJ) が等しくないので正方形ではない

△EFG は直角三角形であるから、DF と IJ が分かれば、ひし形の面積が求めら
れるので、まず DF を求める。DF は立方体の
対角線である。

$$HF^2 = EF^2 + EH^2 \quad \dots\dots ①$$

△DHF も直角三角形であるから、
三平方の定理により

$$DF^2 = HF^2 + DH^2 \quad \dots\dots ②$$

①、② から

$$DF^2 = EF^2 + EH^2 + DH^2$$

$$= 8^2 + 8^2 + 8^2$$

$$= 64 + 64 + 64 = 192$$

$$DF = \pm \sqrt{192} = \pm 8\sqrt{3} \quad DF > 0 \text{ であるから } DF = 8\sqrt{3} \text{ cm}$$

また 上から見れば、AC と IJ は重なって見えます

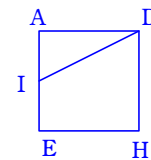
$$IJ = AC = AB \times \sqrt{2}$$

$$= 8 \times \sqrt{2}$$

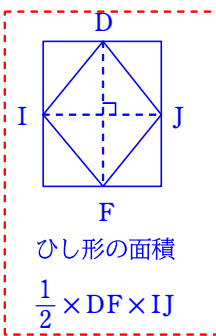
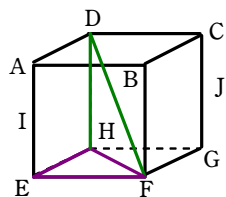
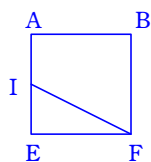
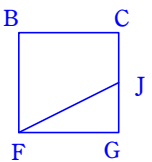
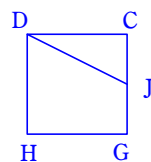
$$= 8\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

したがって、求める面積は

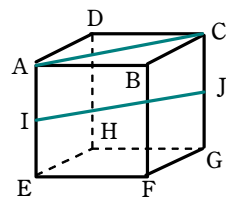
$$\frac{1}{2} \times DF \times IJ = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} \times 8\sqrt{2} = 32\sqrt{6} \text{ (cm}^2\text{)}$$



1:2:√3 ではない



この部分では対角線 DF の長さを求めている。DF は立方体の対角線
なので 例題 12 で習った (対角線)² = (縦)² + (横)² + (高さ)² の公式
を用いてもよい。



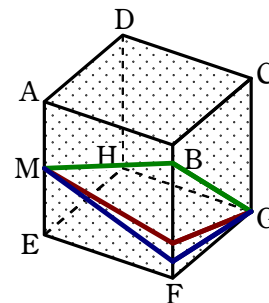
<最短距離>

展開図を利用して、立体の表面上の 2 点を結ぶ線を最も短くする問題を考えよう。

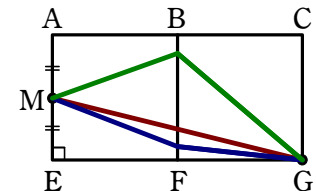
例題 16

右の図は、1 辺の長さが 4 cm の立方体
ABCD-EFGH であり、点 M は辺 AE の
中点である。辺 BF 上に点 P を、MP と
PG の長さの和が最小となるようにとる。
MP と PG の長さの和を求めなさい。

【参考】



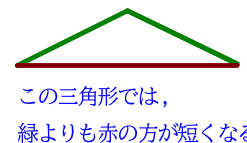
展開図



赤と青と緑の 3 つのうち、どれが一番短いか考える。このような最短経路の問題では
展開図を用いて考える。展開図において、青や緑よりも赤の方が短いことが分かる。
では、最も短くなるのはどんな経路なのか。どの経路も展開図において M から G に
向かうので、折れ線で行くよりも直線で行った方が短くなる。

ちなみに、折れ線よりも直線の方が短くなる理由は

「三角形において 1 辺の長さは残り 2 辺の和よりも短い」
という三角形の性質があるからである。



この三角形では、
緑よりも赤の方が短くなる

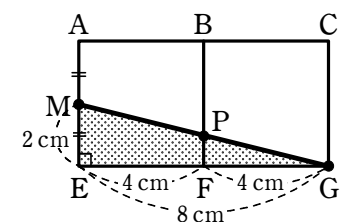
【解答】

右の図のような展開図の一部において、
MP と PG の長さの和が最小になるのは、
3 点 M, P, G が一直線上にあるとき、
すなわち線分 MG と BF の交点の位置に
点 P があるときである。直角三角形 MEG
において、三平方の定理により

$$EG^2 + ME^2 = MG^2 \quad \text{より} \quad MG^2 = 8^2 + 2^2 = 64 + 4 = 68$$

$$MG = \pm \sqrt{68} = \pm 2\sqrt{17} \quad MG > 0 \text{ であるから} \quad MG = 2\sqrt{17} \text{ cm}$$

よって、求める長さは $2\sqrt{17} \text{ cm}$ 答



練習 27 右の図は、1 辺の長さが 4 cm の正四面体 ABCD であり、点 M は辺 BD の中点である。
 辺 AB 上に点 P を、MP と PC の長さの和が最小となるようにとる。MP と PC の長さの和を求めなさい。

参考 経路がくっついている展開図 で考えましょう)

解答

右の図のような展開図の一部において、MP と PC の長さの和が最小になるのは、3 点 M, P, C が一直線上にあるとき、すなわち線分 MC と AB の交点の位置に点 P があるときである。
 120°が出てきたら、120°の反対側に 1 : 2 : $\sqrt{3}$ の直角三角形をつくること
 点 M から直線 BC へ垂線 MH を引く。

△MHB は、30°, 60°, 90°の直角三角形で、BM = 2 cm であるから

$$BH = \frac{1}{2} BM = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \text{ (cm)}$$

$$MH = \frac{\sqrt{3}}{2} BM = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3} \text{ (cm)}$$

直角三角形 MHC において三平方の定理より

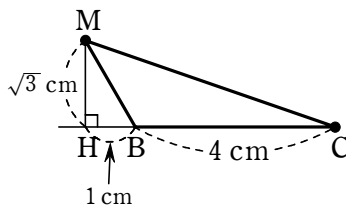
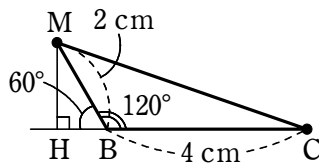
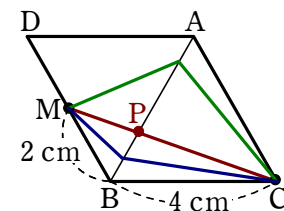
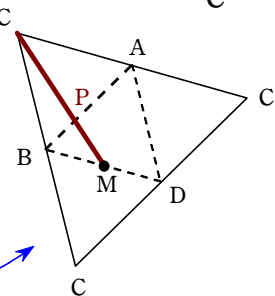
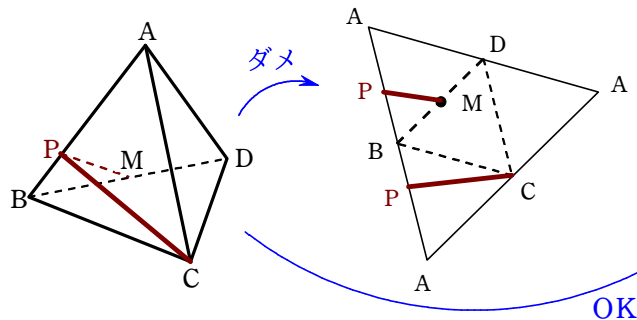
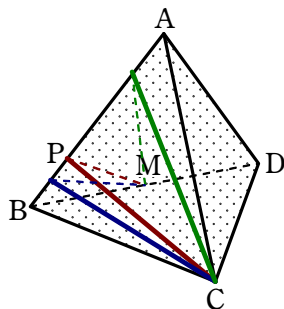
$$HC^2 + MH^2 = MC^2 \quad \text{より}$$

$$MC^2 = (1+4)^2 + (\sqrt{3})^2 = 5^2 + (\sqrt{3})^2 = 25 + 3 = 28$$

$$MC = \pm \sqrt{28} = \pm 2\sqrt{7}$$

MC > 0 であるから $MC = 2\sqrt{7} \text{ cm}$ よって、求める長さは $2\sqrt{7} \text{ cm}$

すべての面が正三角形



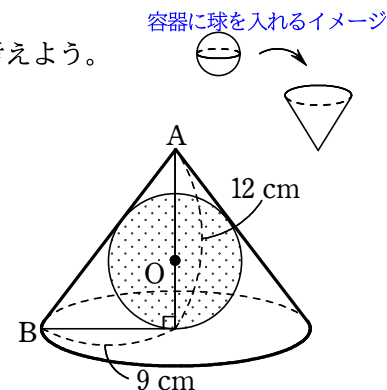
＜いろいろな問題への応用＞

三平方の定理を利用して、いろいろな立体の問題を考えよう。

例題 17 右の図のように、円錐に球 O が内接している。円錐の底面の半径が 9 cm、高さが 12 cm であるとき、球 O の半径を求めなさい。

【考え方】円錐を正面から見た図で考える。

円錐の頂点と球の中心を通るように、円錐を切断する
 「円錐と内接球」でなくて「三角形と内接円」で考える



解答 円錐の底面と球との接点を C、円錐の母線 AB と球との接点を D、球 O の半径を x cm とする。

直角三角形 ABC において、三平方の定理により

$$BC^2 + AC^2 = AB^2 \quad \text{より}$$

$$AB^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

$$AB = \pm \sqrt{225} = \pm 15 \quad 3:4:5 \text{ の直角三角形です}$$

$$AB > 0 \text{ であるから } AB = 15 \text{ cm}$$

△AOD ∽ △ABC であるから ∠A が共通な直角三角形より相似

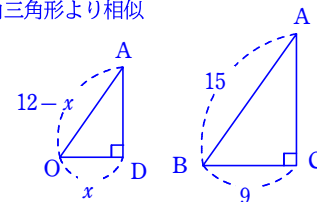
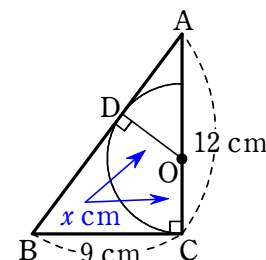
$$AO : AB = OD : BC$$

$$\text{よって } (12 - x) : 15 = x : 9$$

$$(12 - x) \times 9 = 15 \times x \quad \text{両辺 3 で割って}$$

$$(12 - x) \times 3 = 5 \times x \quad \text{より } 36 - 3x = 5x$$

$$\text{したがって } -8x = -36 \quad \text{より } x = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$$



$$\text{図 } \frac{9}{2} \text{ cm}$$

別解(AB = 15 cm までは同じ)

接線の長さは等しいので、BC = BD = 9 cm

ゆえに AD = AB - BD = 15 - 9 = 6 cm

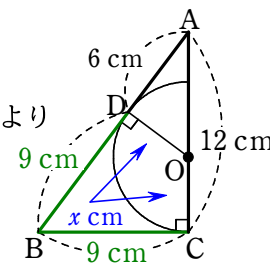
したがって直角三角形 AOD において、三平方の定理により

$$OD^2 + AD^2 = AO^2 \quad \text{よって}$$

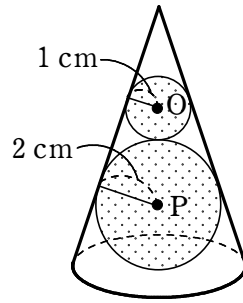
$$x^2 + 6^2 = (12 - x)^2 \quad (A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$x^2 + 36 = 144 - 24x + x^2$$

$$24x = 108 \quad \text{よって } x = \frac{108}{24} = \frac{9}{2} \quad \text{図 } \frac{9}{2} \text{ cm}$$



練習 28 右の図のように、円錐に2つの球 O, P が内接している。円錐の底面と球 P は接しており、さらに、球どうしも接している。球 O, P の半径がそれぞれ 1 cm と 2 cm であるとき、次のものを求めなさい。



(1) 円錐の高さ

(2) 円錐の体積

相似を上手に使いましょう

底面積が分かれば求められます。

まずは母線の長さを求めましょう。

底面の円の半径は相似や三平方で。

円錐の底面と球 P との接点を H とし、

円錐の母線 AC と球 O, P との接点を、

それぞれ Q, R とする。 O から H までは長さが分かるから、

(1) $OQ \parallel PR$ であるから A から O まで分かればよい

$AO : AP = OQ : PR$

$AO = x$ cm とすると

$x : (x+3) = 1 : 2$

$x \times 2 = (x+3) \times 1$

$2x = x+3$ より $x=3$ から

$AO = 3$ cm

このとき、円錐の高さ AH は

$AH = AP + PH = (3+3) + 2 = 8$ (cm)

(2) 直角三角形 AOQ において三平方の定理により

$OQ^2 + AQ^2 = AO^2$ より

$1^2 + OQ^2 = 3^2$ より $AQ^2 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$

$AQ = \pm \sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$ より $AQ > 0$ であるから $AQ = 2\sqrt{2}$ cm

$\triangle ACH \sim \triangle AOQ$ であるから $\angle A$ 共通

$CH : OQ = AH : AQ$ よって $CH : 1 = 8 : 2\sqrt{2}$

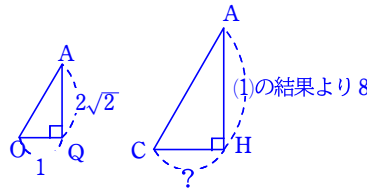
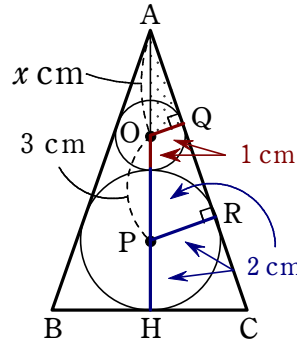
よって $CH \times 2\sqrt{2} = 1 \times 8$ 両辺 $2\sqrt{2}$ で割って

$CH = \frac{8}{2\sqrt{2}} = \frac{4 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ cm

底面の円の半径が $2\sqrt{2}$ と分かった

したがって、円錐の体積は $\frac{1}{3} \times \pi \times (2\sqrt{2})^2 \times 8 = \frac{1}{3} \times \pi \times 8 \times 8 = \frac{64}{3} \pi$ (cm³)

$\frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ AH})$



別解 ($AQ = 2\sqrt{2}$ cm までは同じ)

$OQ \parallel PR$ かつ $OQ = \frac{1}{2} PR$ であるから

中点連結定理より、Q は AR の中点である。

よって $QR = AQ = 2\sqrt{2}$ cm

$CH = r$ cm とする。

接線の長さは等しいので、 $CH = CR = r$ cm

ゆえに

$AC = AQ + QR + RC = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + r = r + 4\sqrt{2}$ cm

したがって直角三角形 AHC において、

三平方の定理により

$CH^2 + AH^2 = AC^2$ よって

$r^2 + 8^2 = (r + 4\sqrt{2})^2$ $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

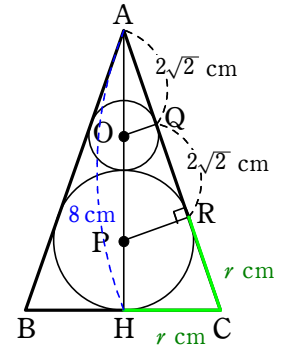
$r^2 + 64 = r^2 + 8\sqrt{2}r + 32$ より $-8\sqrt{2}r = -32$

よって $r = \frac{32}{8\sqrt{2}} = \frac{4 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

底面の円の半径が $2\sqrt{2}$ と分かった

したがって、円錐の体積は $\frac{1}{3} \times \pi \times (2\sqrt{2})^2 \times 8 = \frac{1}{3} \times \pi \times 8 \times 8 = \frac{64}{3} \pi$ (cm³)

$\frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ AH})$



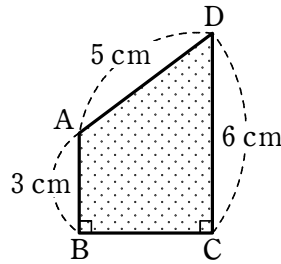
三平方の定理を利用して、回転体の体積を求めよう。

例題 18 右の図のような台形 ABCD を、辺 DC を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。

【考え方】体積を求めるには、辺 BC の長さが必要となる。

ここで三平方の定理を用いる。

回転体は円錐か円柱が球になる。それらの体積を求めるために必要な長さが、回転させる前のどの部分か考える。必要ならば垂線を引く。



解答 点 A から辺 CD に引いた垂線の足を E とする。
直角三角形 AED において、三平方の定理により

$$AE^2 + ED^2 = AD^2 \quad \text{より}$$

$$5^2 = AE^2 + 3^2 \quad \text{よって} \quad AE^2 = 25 - 9 = 16$$

$$AE = \pm \sqrt{16} = \pm 4$$

$$AE > 0 \text{ であるから } AE = 4 \text{ cm}$$

1 回転させてできる立体は、

底面の半径 4 cm、高さ 3 cm の円柱と、

底面の半径 4 cm、高さ 3 cm の円錐を合わせたものになる。

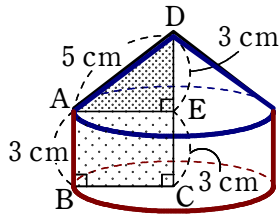
よって、求める体積は

$$\pi \times 4^2 \times 3 + \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 3 = 48\pi + 16\pi = 64\pi \text{ (cm}^3\text{)} \quad \text{答}$$

円柱
(底面積) × 高さ

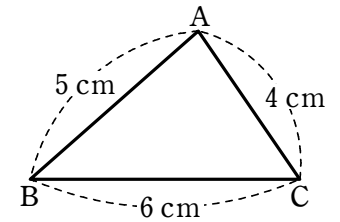
円錐
 $\frac{1}{3} \times$ (底面積) × 高さ

底面の半径が分からない
→ AE の長さを求める。



練習 29 右の図の △ABC を、辺 BC を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。

BC を回転軸として回転させると円錐が 2 つできるのは分かる。
しかしそれぞれの円錐の底面の半径や高さが分からない。
→ 頂点 A から BC に垂線を引いて、それぞれの長さを求める。



解答

点 A から辺 BC に引いた垂線の足を H とし、BH = x cm とおく。

直角三角形 ABH において $BH^2 + AH^2 = AB^2$

$$x^2 + AH^2 = 5^2 \quad \text{よって} \quad AH^2 = 5^2 - x^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

直角三角形 ACH において $CH^2 + AH^2 = AC^2$

$$(6-x)^2 + AH^2 = 4^2 \quad \text{よって} \quad AH^2 = 4^2 - (6-x)^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } 5^2 - x^2 = 4^2 - (6-x)^2$$

$$25 - x^2 = 16 - (36 - 12x + x^2)$$

$$25 - x^2 = 16 - 36 + 12x - x^2$$

$$25 = 16 - 36 + 12x \quad \text{ゆえに} \quad 25 = -20 + 12x$$

$$\text{より} \quad -12x = -45 \quad \text{したがって} \quad x = \frac{45}{12} = \frac{15}{4}$$

$$\text{これを} \textcircled{1} \text{ に代入して } AH^2 = 5^2 - \left(\frac{15}{4}\right)^2 = 25 - \frac{225}{16} = \frac{400 - 225}{16} = \frac{175}{16}$$

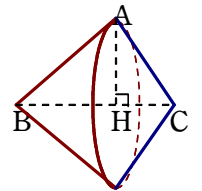
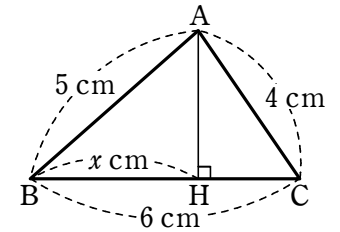
$$AH = \pm \sqrt{\frac{175}{16}} = \pm \frac{5\sqrt{7}}{4} \quad AH > 0 \text{ であるから } AH = \frac{5\sqrt{7}}{4} \text{ cm}$$

1 回転させてできる立体は、底面の半径 $\frac{5\sqrt{7}}{4}$ cm、高さ BH の円錐と、

底面の半径 $\frac{5\sqrt{7}}{4}$ cm、高さ CH の円錐

を組み合わせたものになる。よって、求める立体の体積は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{5\sqrt{7}}{4}\right)^2 \times BH + \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{5\sqrt{7}}{4}\right)^2 \times CH \\ &= \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{5\sqrt{7}}{4}\right)^2 \times (BH + CH) \\ & \quad \quad \quad BH + CH = BC = 6 \\ &= \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{5\sqrt{7}}{4}\right)^2 \times 6 = \frac{1}{3} \times \pi \times \frac{175}{16} \times 6 = \frac{175}{8} \pi \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$



ここで BH や CH の長さを
求めていないのは
後で因数分解できるからです。

$$BH = x = \frac{15}{4},$$

$$CH = 6 - \frac{15}{4} = \frac{9}{4}$$

として計算しても構いません。

探究

等面四面体の体積



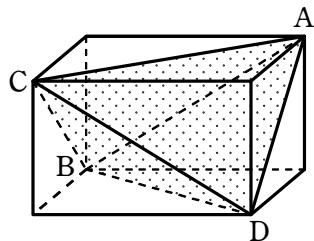
先生

130 ページの練習 25 の四面体 ABCD のように、4 つの面が合同な四面体を **等面四面体** といいます。
正四面体も等面四面体の 1 つです。



たいちさん

調べてみたところ、等面四面体は直方体への埋め込みができることがわかりました。
四面体 ABCD は、右のように直方体に埋め込むことができます。



四面体 ABCD は直方体から 4 つの三角錐を除いたものになっているのですね。
ですから、直方体の辺の長さがわかれば四面体の体積がわかります。



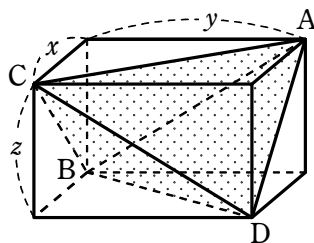
けいこさん

右の図のように、直方体の辺の長さを定めると、三平方の定理により、次の関係が成り立ちます。

$$x^2 + y^2 = AC^2$$

$$y^2 + z^2 = CD^2$$

$$z^2 + x^2 = BC^2$$



AC, CD, BC の長さはわかっているので x, y, z の値を求めることができますね。
 x, y, z の値を求め、四面体 ABCD の体積を求めてみましょう。



発展

中線定理

三平方の定理により、次の **中線定理** が成り立つ。

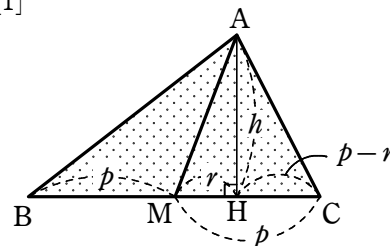
中線定理

定理 $\triangle ABC$ の辺 BC の中点を M とすると

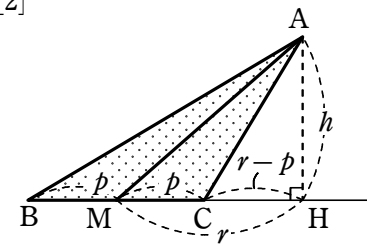
$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

証明 $AB > AC$ のとき、頂点 A から直線 BC に引いた垂線の足を H, $AH = h$, $BM = CM = p$, $MH = r$ とする。

[1]



[2]



上の図の [1], [2] どちらの場合でも、次のようになる。
直角三角形 ABH, ACH において、三平方の定理により

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \quad \dots\dots ①$$

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 \quad \dots\dots ②$$

$$\begin{aligned} ①, ② \text{ から } AB^2 + AC^2 &= (AH^2 + BH^2) + (AH^2 + CH^2) \\ &= \{h^2 + (p+r)^2\} + \{h^2 + (p-r)^2\} \\ &= 2(h^2 + p^2 + r^2) \quad (p-r)^2 = (r-p)^2 \end{aligned}$$

一方、直角三角形 AMH において、三平方の定理により

$$AM^2 = AH^2 + MH^2 = h^2 + r^2$$

$$\text{また、} BM^2 = p^2 \text{ であるから } AM^2 + BM^2 = h^2 + p^2 + r^2$$

$$\text{よって } AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

$AB \leq AC$ のときも、同様にして証明される。 終

練習 3 辺の長さが 4, 6, 8 である三角形において、3 つの中線の長さを

求めなさい。

コラム

フェルマーの最終定理と三平方の定理

17 世紀のフランスの数学者フェルマーは、古代ギリシャの数学者ディオファントスが記した「算術」という本を研究していました。フェルマーは本を読んで気がついたことを余白に書き込んでいました。書き込みのうちの 1 つが、次の定理です。

3 以上の自然数 n について

$$x^n + y^n = z^n$$

を満たす自然数 x, y, z は存在しない

フェルマーは同時に

「私はこの定理の驚くべき証明を見つけたが、
この余白はそれを書くには狭すぎる」

と書き残していました。

フェルマーはこの他にも数多くの書き込みを残し、それらは正しいかどうかの決着がつけられていましたが、この定理だけは、だれも証明することも正しくない例を挙げることもできませんでした。
そのため、この定理は **フェルマーの最終定理** と呼ばれるようになりました。

数多くの数学者がフェルマーの最終定理の証明に挑みましたが、350 年もの間解決されず、1994 年になり、イギリスの数学者ワイルズによって証明されました。その証明には、日本人数学者の研究成果も利用されています。

フェルマーの最終定理は 3 以上の自然数 n についてでしたが、 n が 2 のときはどうなるのでしょうか。

フェルマーの最終定理の n を 2 とすると

$$x^2 + y^2 = z^2$$

となり、三平方の定理 (ピタゴラスの定理) の等式と同じ形になります。

三平方の定理 $a^2 + b^2 = c^2$ を満たす自然数の組 (a, b, c) を **ピタゴラス数** といいます。

ピタゴラス数は無数に存在し、有名なものとしては、

$$(3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17) \dots\dots (*)$$

などが挙げられます。

$$(6, 8, 10), (10, 24, 26), (16, 30, 34)$$

など、ピタゴラス数の正の整数倍もピタゴラス数です。

(*) のように公約数が 1 のみであるものを、互いに素であるピタゴラス数 といいます。

互いに素であるピタゴラス数 (a, b, c) は、自然数 m, n を用いて、以下の式で表されます。

自然数 m, n が

$$m > n, \quad m \text{ と } n \text{ の公約数が } 1 \text{ のみ}, \quad m - n \text{ は奇数}$$

を満たすとき

$$(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$$

$$\text{または } (2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$$

また、互いに素であるピタゴラス数 (a, b, c) について、次のような性質が成り立ちます。

- ① a, b のうち少なくとも一方は 4 の倍数

② a, b のうち少なくとも一方は 3 の倍数

③ a, b, c のうち少なくとも 1 つは 5 の倍数

互いに素であるピタゴラス数を求めてみましょう。
また、それらが上の①，②，③の性質を満たしているか調べてみましょう。



先生