

第4章「三平方の定理」2 三平方の定理と平面図形

＜三角形の面積＞

正三角形や二等辺三角形では、辺の長さがわかると、簡単に面積を求めることができる。 なさい。

例1 1 辺の長さが 2 cm の正三角形 ABC の面積を求める。

右の図のように、点 A から辺 BC に引いた垂線の足を H とする

と、H は辺 BC の中点で 二等辺三角形の頂点から下ろした

BH = 1 cm 垂線は底辺の中点になる。

となる。(左右の三角形が合同になるから)

AH = h cm とすると、直角三角形

ABH において、三平方の定理により

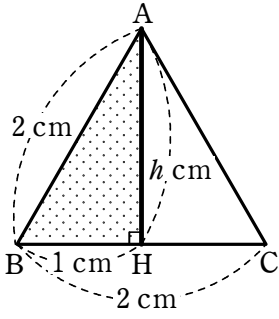
$1^2 + h^2 = 2^2$ よって $1 + h^2 = 4$

$h^2 = 3$ したがって $h = \pm\sqrt{3}$

$h > 0$ であるから $h = \sqrt{3}$

よって、正三角形 ABC の面積は、 $\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$ より、

$\sqrt{3} \text{ cm}^2$ である。



練習8 1 辺の長さが a cm である正三角形の高さと面積を、a を用いて表し

解答

正三角形 ABC において、点 A から辺 BC に引いた

垂線の足を H とすると $BH = \frac{1}{2}a \text{ cm}$

AH = h cm とすると、直角三角形 ABH において、

三平方の定理により $\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h^2 = a^2$

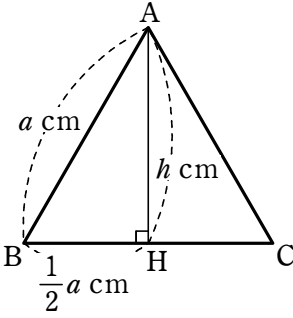
$h^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2$

よって $h = \pm\sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$h > 0, a > 0$ であるから $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

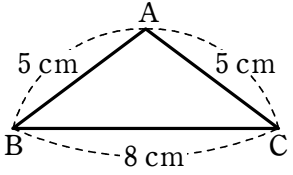
よって、正三角形の高さは $\frac{\sqrt{3}}{2}a \text{ cm}$

また、正三角形の面積は $\frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \text{ (cm}^2\text{)}$



練習7 AB = AC = 5 cm, BC = 8 cm の

二等辺三角形の面積を求めなさい。



解答 点 A から辺 BC に引いた垂線の足を H とすると、

H は辺 BC の中点で BH = 4 cm

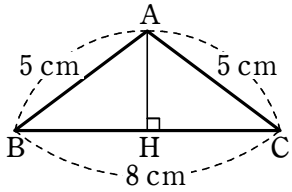
直角三角形 ABH において、三平方の定理により

$4^2 + AH^2 = 5^2$ より $AH^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$

AH = ±3 AH > 0 であるから AH = 3 cm

よって、△ABC の面積は $\frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12 \text{ (cm}^2\text{)}$

△ABH は 3 : 4 : 5 の直角三角形です



<対角線の長さ>

三平方の定理を用いて、正方形や長方形の対角線の長さを求めよう。

例2 1辺の長さが1 cm の正方形の対角線の長さを求める。

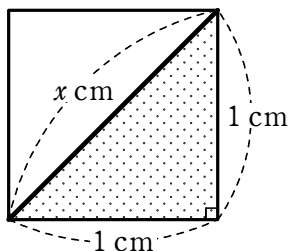
対角線の長さを x cm とすると、三平方

の定理により $1^2 + 1^2 = x^2$

$$x^2 = 2 \quad \text{よって} \quad x = \pm\sqrt{2}$$

$x > 0$ であるから $x = \sqrt{2}$

よって、対角線の長さは $\sqrt{2}$ cm である。



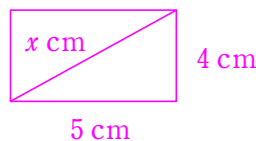
練習9 縦の長さが4 cm、横の長さが5 cm である長方形の対角線の長さを求めなさい。

解答

対角線の長さを x cm とすると $x^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41$

$x = \pm\sqrt{41}$ であり $x > 0$ であるから $x = \sqrt{41}$

よって、対角線の長さは $\sqrt{41}$ cm



練習10 縦の長さが a cm、横の長さが b cm である長方形の対角線の長さを、 a 、 b を用いて表しなさい。

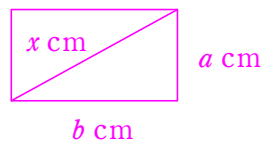
解答

対角線の長さを x cm とすると $x^2 = a^2 + b^2$

$x = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$ であり $x > 0$ であるから $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

よって、対角線の長さは $\sqrt{a^2 + b^2}$ cm

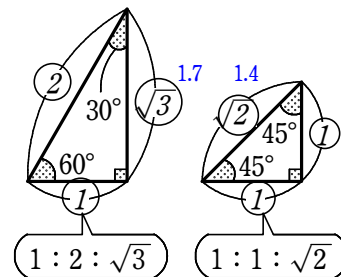
$\sqrt{a^2 + b^2}$ は $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$ や $a + b$ と同じではない



<特別な直角三角形の辺の比>

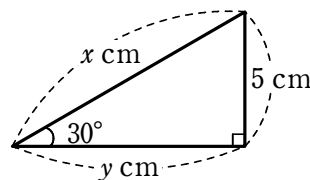
前のページの例1と、上の例2から、 30° 、 60° 、 90° の角をもつ直角三角形と、 45° 、 45° 、 90° の角をもつ直角二等辺三角形の辺の比は、右の図のようになることがわかる。

$\sqrt{3}$ は1.7くらいであるから、 $1:2:\sqrt{3}$ は比較的とがった直角三角形になる

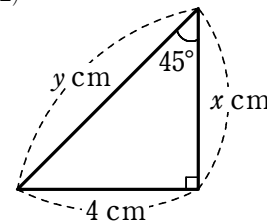


練習11 次の図において、 x 、 y の値を求めなさい。

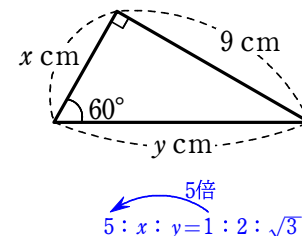
(1)



(2)



(3)



解答

(1) $5:x:y=1:2:\sqrt{3}$ が成り立っている。

$5:x=1:2$ から $1 \times x = 2 \times 5$ よって $x=10$

$5:y=1:\sqrt{3}$ から $1 \times y = 5 \times \sqrt{3}$ よって $y=5\sqrt{3}$

(2) $4:x:y=1:1:\sqrt{2}$ が成り立っている。

$4:x=1:1$ から $x=4$

$4:y=1:\sqrt{2}$ から $1 \times y = 4 \times \sqrt{2}$ よって $y=4\sqrt{2}$

(3) $x:y:9=1:2:\sqrt{3}$ が成り立っている。

$x:9=1:\sqrt{3}$ から $x \times \sqrt{3} = 9 \times 1$

$$\text{両辺 } \sqrt{3} \text{ で割って } x = \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$$

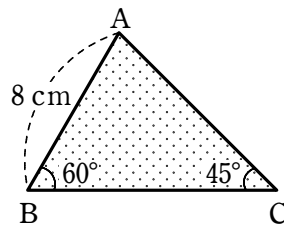
$x:y=1:2$ から $y \times 1 = x \times 2$

$y=2x$ であり、 $x=3\sqrt{3}$ であるから $y=2 \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

【例題 4】 右の図のような $\triangle ABC$ の面積

を求めなさい。

【考え方】 点 A から辺 BC に垂線を引き、特別な直角三角形の辺の比を利用する。



【解答】 点 A から辺 BC に引いた垂線の足を H とする。

直角三角形 ABH において、

$$BH : AB : AH = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

であるから

$$AH = AB \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$BH = AB \times \frac{1}{2} = 8 \times \frac{1}{2} = 4 \text{ (cm)}$$

直角三角形 AHC において、

$AH : HC = 1 : 1$ であるから

$$HC = AH = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

よって $BC = (4 + 4\sqrt{3}) \text{ cm}$

以上から、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times (4 + 4\sqrt{3}) \times 4\sqrt{3}$$

$$= (2 + 2\sqrt{3}) \times 4\sqrt{3}$$

$$= 8\sqrt{3} + 24$$

$$= 24 + 8\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)} \quad \text{答}$$

$$AH : AB = \sqrt{3} : 2$$

$$2AH = \sqrt{3} AB \quad \text{両辺2で割る}$$

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB$$

$$BH : AB = 1 : 2$$

$$2BH = 1AB$$

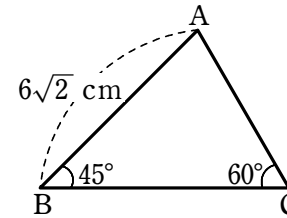
$$BH = \frac{1}{2} AB$$

②を①にしたいので、 $\frac{1}{2}$ 倍

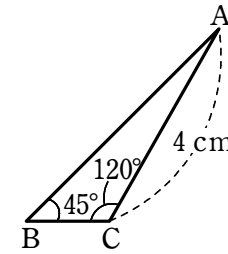
ルートの数は右側に書いた方がよい

【練習 12】 次の図において、 $\triangle ABC$ の面積を求めなさい。

(1)



(2)



【解答】 (1) 点 A から辺 BC に引いた垂線の足を H とする。

直角三角形 ABH において、

$AH : BH : AB = 1 : 1 : \sqrt{2}$ であるから

$$AH = 6\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 6 \text{ (cm)}$$

$$BH = AH = 6 \text{ cm}$$

直角三角形 AHC において、

$HC : AH = 1 : \sqrt{3}$ である

$$\text{から } HC = 6 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

よって $BC = (6 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}$

したがって、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} \times (6 + 2\sqrt{3}) \times 6 = (3 + \sqrt{3}) \times 6 = 18 + 6\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

(2) 点 A から辺 BC の延長に引いた垂線の足を H とする。

$$\angle ACH = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

直角三角形 ACH において、 $CH : AC : AH = 1 : 2 : \sqrt{3}$

$$\text{であるから } CH = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \text{ (cm)}$$

$$AH = CH \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

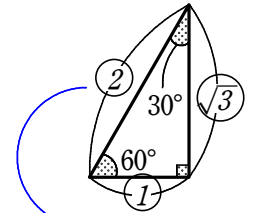
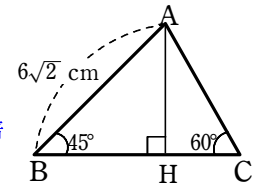
直角三角形 ABH において、 $AH : BH = 1 : 1$ であるから

$$BH = AH = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

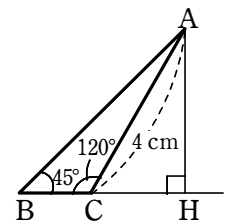
よって $BC = (2\sqrt{3} - 2) \text{ cm}$

したがって、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3} - 2) \times 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1) \times 2\sqrt{3} = 6 - 2\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$



②を①にしたいので、 $\frac{1}{2}$ 倍



<座標平面上の2点間の距離>

三平方の定理を用いて、座標平面上の2点間の距離を求めよう。

距離→最短距離のことなので、2点を結ぶ線分の長さになる

例3 座標平面上の2点A(6, 4), B(1, -2)間の距離を求める。

右の図のように、ABを斜辺とし、他の2辺が
x軸、y軸に平行であるような直角三角形ABC
をつくると (大きい座標)-(小さい座標)=(長さ)

$$BC=6-1=5$$

$$AC=4-(-2)=6$$

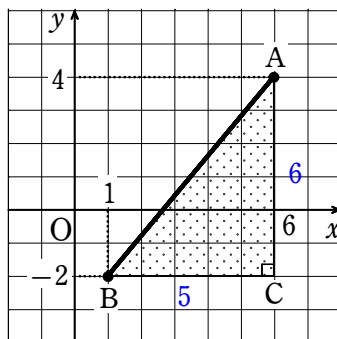
三平方の定理により

$$AB^2=5^2+6^2=61$$

$$AB=\pm\sqrt{61}$$

$AB>0$ であるから $AB=\sqrt{61}$

よって、2点A, B間の距離は $\sqrt{61}$ である。



分からないときは簡単な図を書きましょう。正確な図でなくてもいいです。

練習13 次の2点間の距離を求めなさい。

(1) A(0, 3), B(6, 7)

(2) A(-5, 8), B(7, 3)

(3) O(0, 0), A(2, -5)

(4) A(1, -3), B(-4, 2)

解答

座標平面上の直角三角形を考える。

(1) 右の図のように、直角三角形ABCをつくると

$$AC=6-0=6$$

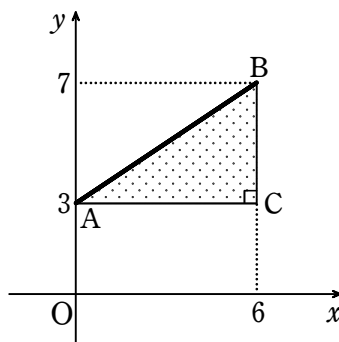
$$BC=7-3=4$$

三平方の定理により

$$AB^2=6^2+4^2=52$$

$AB>0$ であるから $AB=2\sqrt{13}$

よって、2点A, B間の距離は $2\sqrt{13}$



(2) 右の図のように、直角三角形ABCをつくると

$$BC=7-(-5)=12$$

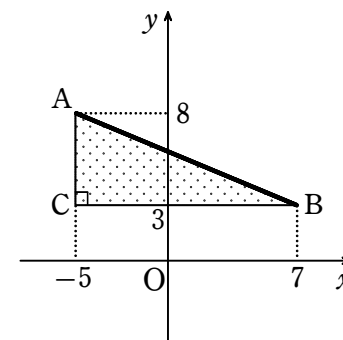
$$AC=8-3=5$$

三平方の定理により

$$AB^2=12^2+5^2=169$$

$AB>0$ であるから $AB=13$

よって、2点A, B間の距離は 13



(3) 右の図のように、直角三角形OABをつくると

$$AB=2-0=2$$

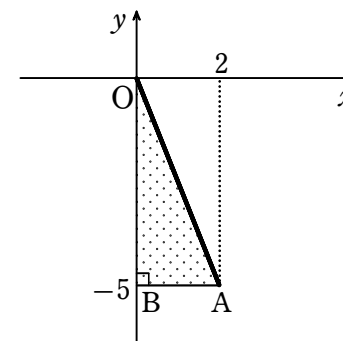
$$OB=0-(-5)=5$$

三平方の定理により

$$OA^2=2^2+5^2=29$$

$OA>0$ であるから $OA=\sqrt{29}$

よって、2点O, A間の距離は $\sqrt{29}$



(4) 右の図のように、直角三角形ABCをつくると

$$AC=1-(-4)=5$$

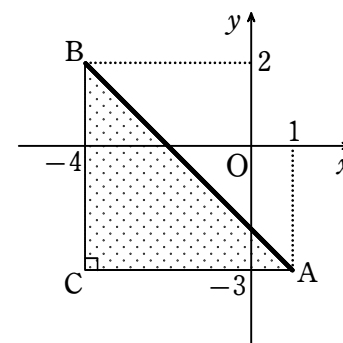
$$BC=2-(-3)=5$$

三平方の定理により

$$AB^2=5^2+5^2=50$$

$AB>0$ であるから $AB=5\sqrt{2}$

よって、2点A, B間の距離は $5\sqrt{2}$



練習 14 3点 A(-3, 3), B(5, 4), C(-1, 0) について、次の問いに答えなさい。

- 線分 AB, BC, CA の長さをそれぞれ求めなさい。
- $\triangle ABC$ はどのような形の三角形か答えなさい。

解答

各線分を斜辺とする直角三角形をつくって考える。

(1) 線分 AB について

$$5 - (-3) = 8, 4 - 3 = 1$$

$$\text{三平方の定理により } AB^2 = 8^2 + 1^2 = 65$$

$$AB > 0 \text{ であるから } AB = \sqrt{65}$$

線分 BC について

$$5 - (-1) = 6, 4 - 0 = 4$$

$$\text{三平方の定理により } BC^2 = 6^2 + 4^2 = 52$$

$$BC > 0 \text{ であるから } BC = 2\sqrt{13}$$

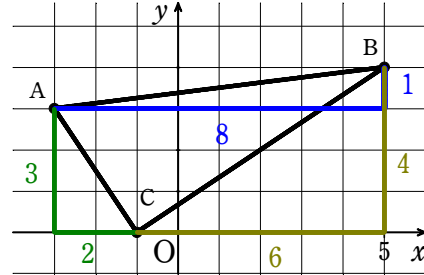
線分 CA について

$$-1 - (-3) = 2, 3 - 0 = 3$$

$$\text{三平方の定理により } CA^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

$$CA > 0 \text{ であるから } CA = \sqrt{13}$$

(2) $52 + 13 = 65$, すなわち $BC^2 + CA^2 = AB^2$ であるから, $\triangle ABC$ は, 辺 AB を斜辺とする直角三角形である。

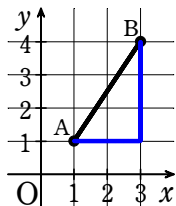


参考

一般に, 2点 A(x_1 , y_1), B(x_2 , y_2) 間の距離は,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \sqrt{(x \text{ 座標の差})^2 + (y \text{ 座標の差})^2}$$

で表される。



x_1 と x_2 のどちらが大きいかわからなくても,
2乗しているので結局正になる。

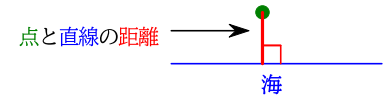
$$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$AB = \sqrt{(1-3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

<三平方の定理と円>

円を含む図形には, いろいろなところに直角が現れることが多い。

直角を見つけて三平方の定理を適用し, 円の弦や接線の長さを求めることを考えよう。



例題 5 O を中心とする半径 6 cm の円において, 中心からの距離が 4 cm であるような弦 AB の長さを求めなさい。

$\triangle OAB$ は $OA = OB$ の
二等辺三角形

【考え方】 円の中心から弦に垂線を引くと, 垂線は弦を 2 等分する。

解答 中心 O から, 弦 AB に垂線 OH を引くと, H は弦 AB の中点であるから

$$AB = 2AH$$

直角三角形 OAH において, 三平方の定理により

$$AH^2 + 4^2 = 6^2$$

$$AH^2 = 6^2 - 4^2$$

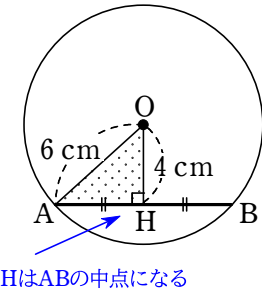
$$AH^2 = 20$$

$$AH = \pm \sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5}$$

$$AH > 0 \text{ であるから } AH = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

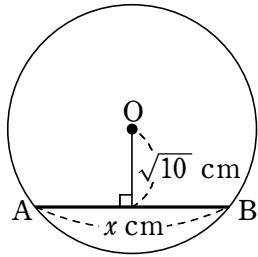
長さを倍にすることを忘れない

$$\text{よって } AB = 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5} \text{ (cm)} \quad \text{答}$$

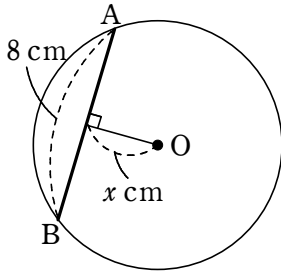


練習 15 次の図において、円 O の半径が 5 cm のとき、 x の値を求めなさい。

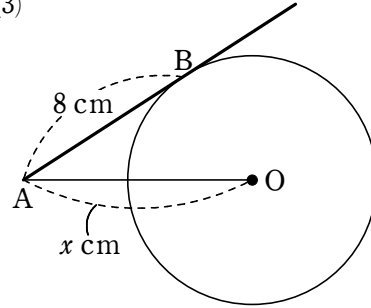
(1)



(2)



(3)



点 B は円 O の接点

【解答】

三平方の定理を適用する。

(1) 中心 O から、弦 AB に引いた垂線の足を H とする。

直角三角形 OAH において

$$AH^2 + (\sqrt{10})^2 = 5^2 \text{ より}$$

$$AH^2 = 5^2 - (\sqrt{10})^2 = 25 - 10 = 15$$

$$AH > 0 \text{ であるから } AH = \sqrt{15} \text{ cm}$$

$$\text{よって } x = 2 \times \sqrt{15} = 2\sqrt{15}$$

(2) 中心 O から、弦 AB に引いた垂線の足を H とすると

$$AH = 8 \times \frac{1}{2} = 4 \text{ (cm)}$$

直角三角形 OAH において

$$4^2 + x^2 = 5^2 \text{ より } x^2 = 5^2 - 4^2 = 9$$

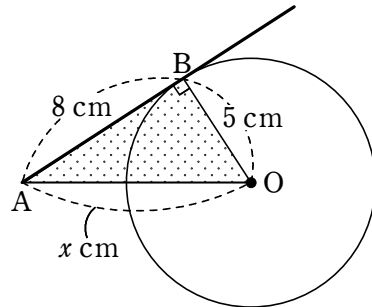
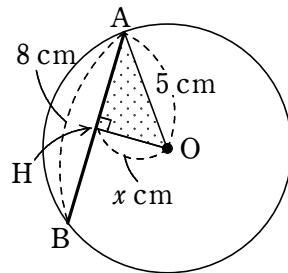
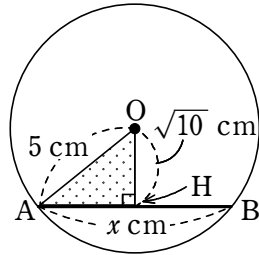
$$x > 0 \text{ であるから } x = 3$$

(3) 円の接線は、接点を通る半径に垂直であるから、

$\triangle OAB$ は $\angle B = 90^\circ$ の直角三角形である。

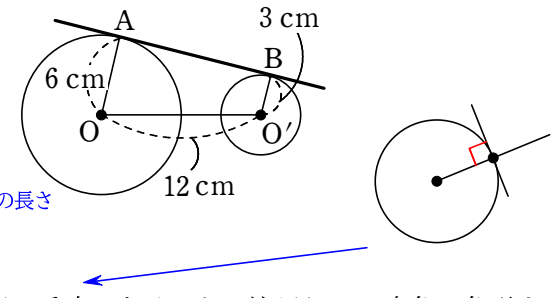
$$\text{よって } x^2 = 8^2 + 5^2 = 89$$

$$x > 0 \text{ であるから } x = \sqrt{89}$$



例題 6 右の図において、A, B は 2 つの円 O, O' の共通接線の接点である。

円 O, O' の半径がそれぞれ 6 cm, 3 cm, 中心間の距離が 12 cm であるとき、線分 AB の長さを求めなさい。



【考え方】円の接線は、接点を通る半径に垂直であることに注目して、直角三角形や長方形をつくる。

【解答】

O' から、線分 OA に垂線 O'H を引くと

$$OH = 6 - 3 = 3 \text{ (cm)}$$

直角三角形 OO'H において、三平方の定理により

$$O'H^2 + 3^2 = 12^2$$

$$O'H^2 = 12^2 - 3^2$$

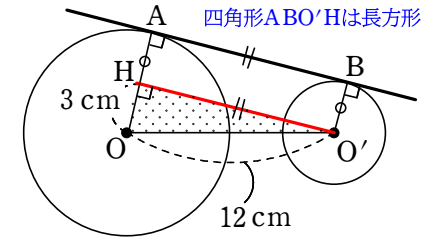
$$O'H^2 = 144 - 9$$

$$O'H^2 = 135$$

$$O'H = \pm \sqrt{135} = \pm 3\sqrt{15}$$

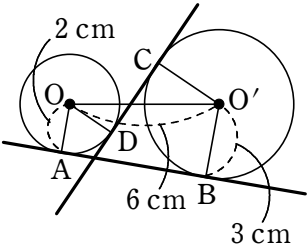
$$O'H > 0 \text{ であるから } O'H = 3\sqrt{15} \text{ cm}$$

$$AB = O'H \text{ であるから } AB = 3\sqrt{15} \text{ cm} \quad \text{答}$$



練習 16 右の図において、A、B、C、Dは、
2つの円 O、O' の共通接線の接点である。
円 O、O' の半径がそれぞれ 2 cm、3 cm、
中心間の距離が 6 cm であるとき、線分 AB と
CD の長さをそれぞれ求めなさい。

2点 O O' を結んだ線分の長さ



解答 O から、線分 O'B に垂線 OH を引くと
O'H = 3 - 2 = 1 (cm)
直角三角形 OO'H において

$$OH^2 + 1^2 = 6^2$$

$$OH^2 = 6^2 - 1^2 = 35$$

OH > 0 であるから OH = $\sqrt{35}$ cm

よって AB = $\sqrt{35}$ cm

O から、直線 O'C に垂線 OH' を引くと

$$O'H' = 3 + 2 = 5 \text{ (cm)}$$

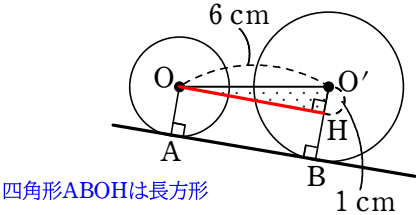
直角三角形 OO'H' において

$$OH'^2 + 5^2 = 6^2$$

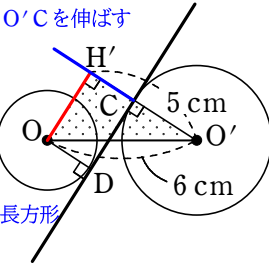
$$OH'^2 = 6^2 - 5^2 = 11$$

OH' > 0 であるから OH' = $\sqrt{11}$ cm

よって CD = $\sqrt{11}$ cm



四角形ABOHは長方形

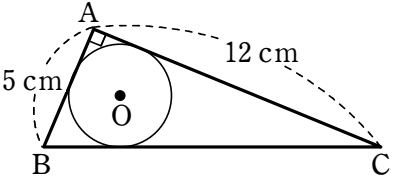


四角形ODCH'は長方形

三平方の定理を用いて、三角形の内接円について考えよう。

内接円...三角形の内部で3辺に接する円。角の二等分線の交点を中心になる。

例題 7 右の図において、円 O は
 $\angle A = 90^\circ$ の直角三角形
ABC に内接している。
このとき、内接円 O の半径
を求めなさい。

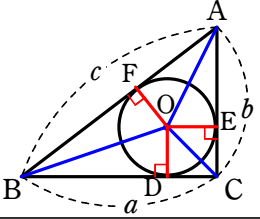


【考え方】

面積の関係

$$\triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA = \triangle ABC$$

を利用する。 どの三角形も半径が高さになる



直角三角形の2辺が分かっているので、残りの辺の長さも出る

解答 直角三角形 ABC において、三平方の定理により

$$BC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$$

$$BC = \pm \sqrt{169} = \pm 13$$

BC > 0 であるから

$$BC = 13 \text{ cm}$$

円 O の半径を r cm とすると、

直角三角形 ABC の面積について

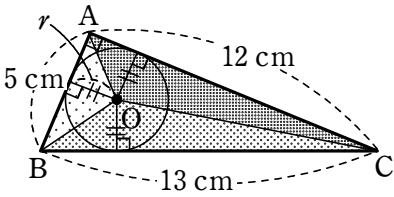
$$\frac{1}{2} \times 5 \times r + \frac{1}{2} \times 13 \times r + \frac{1}{2} \times 12 \times r = \frac{1}{2} \times 5 \times 12$$

$$\triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA = \triangle ABC$$

$$\frac{5}{2}r + \frac{13}{2}r + \frac{12}{2}r = \frac{60}{2}$$

$$\frac{30}{2}r = 30 \quad 15r = 30 \quad \text{よって} \quad r = 2$$

答 2 cm



練習 17 右の図において、円 O は $\triangle ABC$ に内

接している。次の問いに答えなさい。

- (1) 点 A から辺 BC に引いた垂線の足を H とするとき、線分 AH の長さを求めなさい。
- (2) 内接円 O の半径を求めなさい。

解答

- (1) $BH = x$ cm とする。

直角三角形 ABH において $BH^2 + AH^2 = AB^2$

$$\text{よって } AH^2 = 10^2 - x^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

直角三角形 ACH において $CH^2 + AH^2 = AC^2$

$$AH^2 = 14^2 - (12 - x)^2 \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad (A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } 10^2 - x^2 = 14^2 - (12 - x)^2$$

$$100 - x^2 = 196 - (144 - 24x + x^2)$$

$$100 - \cancel{x^2} = 196 - 144 + 24x - \cancel{x^2}$$

$$100 = 196 - 144 + 24x \quad \text{よって} \quad 100 = 52 + 24x$$

$$-24x = -48 \quad \text{よって} \quad x = 2$$

これを、 $\textcircled{1}$ に代入して $AH^2 = 10^2 - 2^2 = 100 - 4 = 96$

$AH = \pm \sqrt{96} = \pm 4\sqrt{6}$ よって $AH > 0$ であるから $AH = 4\sqrt{6}$ cm

- (2) 円 O の半径を r cm とする。

三角形の面積について、

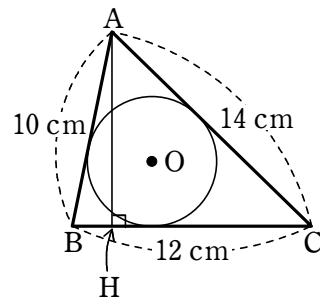
$\triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA = \triangle ABC$ であるから

$$\frac{1}{2} \times 10 \times r + \frac{1}{2} \times 12 \times r + \frac{1}{2} \times 14 \times r = \frac{1}{2} \times 12 \times 4\sqrt{6}$$

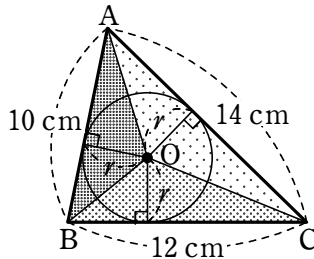
$$\triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA = \triangle ABC$$

$$5r + 6r + 7r = 24\sqrt{6} \quad 18r = 24\sqrt{6}$$

$$\text{したがって } r = \frac{24\sqrt{6}}{18} = \frac{4\sqrt{6}}{3} \quad \text{よって、円 O の半径は } \frac{4\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$$



三角形の垂線の長さを求める
→ 垂線の両隣で三平方を使う



例題 7 右の図において、円 O は

$\angle A = 90^\circ$ の直角三角形

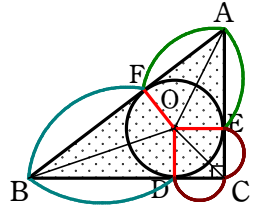
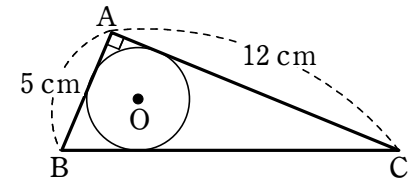
ABC に内接している。

このとき、内接円 O の半径を求めなさい。

【別解の考え方】

曲線外から引いた接線の長さは等しい

四角形 OECD は正方形になる



参考

$\triangle OFA$ と $\triangle OEA$ において 直角三角形の斜辺(OA 共通)と

他の1つの辺(半径)がそれぞれ等しいので

$\triangle OFA \cong \triangle OEA$ である。ゆえに $AF = AE$ が成り立つ。

同様に $\triangle OFB \cong \triangle ODB$ であるから $BF = BD$ が成り立ち、

$\triangle ODC \cong \triangle OEC$ であるから $CD = CE$ が成り立つ。

$OE = OD$ であり $\angle ECD = \angle CDO = \angle CEO = \angle EOD = 90^\circ$ であるので

四角形 OECD は正方形である。

別解

直角三角形 ABC において、三平方の定理により

$$BC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$$

$$BC = \pm \sqrt{169} = \pm 13$$

$BC > 0$ であるから

$$BC = 13 \text{ cm}$$

円 O の半径を r cm とすると、

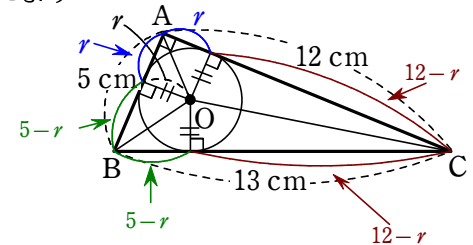
接線の長さは等しいので図より辺 BC について

$$(5 - r) + (12 - r) = 13$$

が成り立つ。

$$\text{よって } 17 - 2r = 13 \quad \text{より} \quad -2r = -4 \quad \text{ゆえに} \quad r = 2$$

答 2 cm



例題 8 $\angle B = 90^\circ$ の直角三角形 ABC において、周の長さが 40 cm、内接円の半径が 3 cm であるとき、次の問いに答えなさい。

- (1) この直角三角形の斜辺の長さを求めなさい。
- (2) 他の 2 辺の長さを求めなさい。

解答 (1) 右の図のように、接点 D, E, F を定め、 $AE = a$ cm, $CE = b$ cm とおくと接線の長さが等しいので

$$AB = (a + 3) \text{ cm} \quad AE = AF, CE = CD, BD = BF$$

$$BC = (b + 3) \text{ cm}$$

$\triangle ABC$ の周の長さについて

$$(a + 3) + (b + 3) + (a + b) = 40$$

$$2a + 2b = 34 \quad \text{両辺2で割って}$$

$$\frac{2a}{2} + \frac{2b}{2} = \frac{34}{2}$$

$$a + b = 17$$

よって、斜辺の長さは 17 cm

- (2) (1) の結果から $a + b = 17$ より $b = 17 - a$ のとき
このとき

$$AB = a + 3, BC = b + 3 = (17 - a) + 3 = 20 - a, CA = 17$$

三平方の定理により $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

代入して $(a + 3)^2 + (20 - a)^2 = 17^2$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

展開して $(a^2 + 6a + 9) + (400 - 40a + a^2) = 289$

$$2a^2 - 34a + 409 = 289$$

$$2a^2 - 34a + 120 = 0$$

両辺2で割って $a^2 - 17a + 60 = 0$ 足して -17, 掛けて 60

$$(a - 5)(a - 12) = 0 \quad \rightarrow -5 \text{ と } -12$$

よって、 $a = 5, 12$

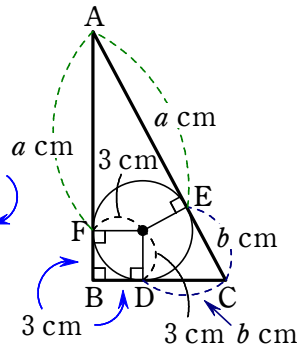
$$a = 5 \text{ のとき, } b = 17 - a = 17 - 5 = 12$$

$$\text{このとき, } AB = a + 3 = 5 + 3 = 8, BC = 20 - a = 20 - 5 = 15$$

$$a = 12 \text{ のとき, } b = 17 - a = 17 - 12 = 5$$

$$\text{このとき, } AB = a + 3 = 12 + 3 = 15, BC = 20 - a = 20 - 12 = 8$$

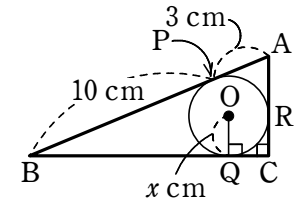
したがってどちらの場合も、他の 2 辺の長さは 8 cm と 15 cm 答



練習 18 右の図において、円 O は直角三角形

ABC の内接円であり、点 P, Q, R は接点である。円 O の半径を x cm とするとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 辺 BC, CA の長さを x で表しなさい。
- (2) 内接円 O の半径を求めなさい。



解答

- (1) 円の外部の点からその円に引いた 2 つの接線の長さは等しいから

$$AR = AP = 3 \text{ cm}, BQ = BP = 10 \text{ cm}$$

四角形 OQCR は 1 辺 x cm の正方形であるから

$$CQ = CR = x \text{ cm}$$

$$\text{よって } BC = (x + 10) \text{ cm}, CA = (x + 3) \text{ cm}$$

- (2) $AB = 3 + 10 = 13$ (cm)

直角三角形 ABC において、三平方の定理により

$$(x + 10)^2 + (x + 3)^2 = 13^2$$

$$(x^2 + 20x + 100) + (x^2 + 6x + 9) = 169 \quad (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

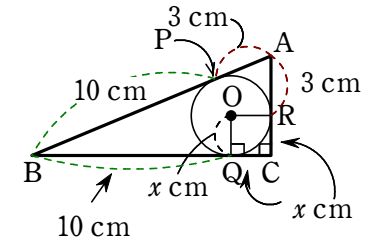
$$2x^2 + 26x + 109 = 169$$

$$2x^2 + 26x - 60 = 0$$

両辺2で割って $x^2 + 13x - 30 = 0$ よって $(x - 2)(x + 15) = 0$

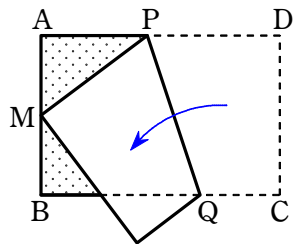
ゆえに $x = 2, -15$ $x > 0$ であるから $x = 2$

よって、円 O の半径は 2 cm



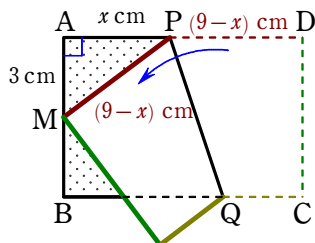
三平方の定理を利用して，いろいろな図形の問題を考えよう。

AB=6 cm, AD=9 cm
 の長方形 ABCD を、頂点 D が辺 AB
 の中点 M に重なるように折る。
 折り目を PQ とするとき、AP の長
 さを求めなさい。



APを求めるためには直角三角形APMで三平方の定理。
AM=3よりPMが分かれば求められる。

折り曲げているだけなので, $PD=PM$



$$x^2 + 3^2 = (9 - x)^2$$

$$\cancel{x^2} + 9 = 81 - 18x + \cancel{x^2}$$

$$18x = 72$$

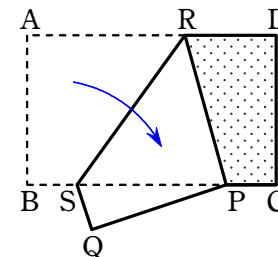
よって $x=4$

したがって $AP=4\text{ cm}$ 答

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

辺 BC 上に、 $CP=2\text{ cm}$ となる点 P をとり、
頂点 A が点 P に重なるように折り曲げるとき、
次の問いに答えなさい。

- (1) $SQ = x$ cm とするとき、PS の長さを x で表しなさい。
- (2) $AB = 6$ cm のとき、 $\triangle PSQ$ の面積を求めなさい。



解答

- (1) $BS = SQ = x \text{ cm}$ であるから

$$PS = BC - (BS + PC)$$

$$= 10 - (2 + x) = 10 - 2 - x = 8 - x \text{ (cm)}$$

- (2) $PQ=AB=6\text{ cm}$ であるから、直角三角形 PSQ に
おいて $(8-x)^2=x^2+6^2$

$$64 - 16x + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 36$$

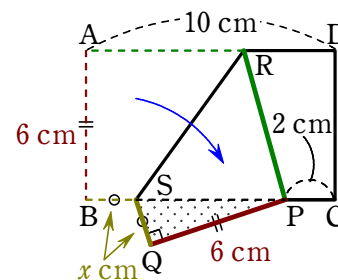
$$-16x = -28$$

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

よって $x = \frac{28}{16} = \frac{7}{4}$

したがって、 $\triangle PSQ$ の面積は

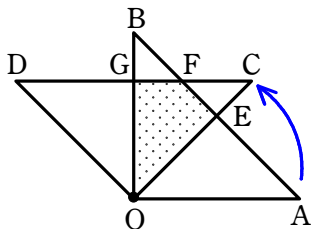
$$\frac{1}{2} \times \text{SQ} \times \text{PQ} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{4} \times 6 = \frac{21}{4} \text{ (cm}^2\text{)}$$



例題 10 右の図の $\triangle OCD$ は、 $OA=OB=2\text{ cm}$

の直角二等辺三角形 OAB を、
点 O の周りに 45° 回転させた
ものである。

このとき、四角形 $OEFG$ の面
積を求めなさい。



O と F を結んで2つの三角形に分けても、 OG や GF を求めるのが大変そうである。

$\triangle OEB$ が直角二等辺三角形で、 $\triangle BGF$ も直角二等辺三角形であるから、 $\triangle OEB$ から $\triangle BGF$ を引けばいい。

解答 $\angle EBO = \angle EOB = 45^\circ$ より、 $\triangle OEB$ は直角二等辺三角形
で、 $OB=2\text{ cm}$ であるから 直角二等辺三角形になるか確かめている

$$OE = OB \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 倍}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$\triangle OCG$ において、 $OC=2\text{ cm}$ であるから

$$OG = OC \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$OG = \sqrt{2}\text{ cm}$

よって $BG = OB - OG = (2 - \sqrt{2})\text{ cm}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍

$\triangle BGF$ も直角二等辺三角形であるから、求める面積は

$$\triangle OEB - \triangle BGF = \frac{1}{2} \times OE \times EB - \frac{1}{2} \times BG \times GF$$

$OE=EB$ $BG=GF$

$$= \frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2} \times (2 - \sqrt{2})^2$$

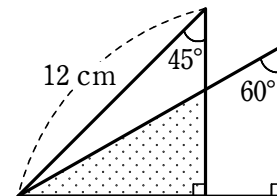
$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

$$= \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{2} \times \{2^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2\}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{2} \times (4 - 4\sqrt{2} + 2) = \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{2} \times (6 - 4\sqrt{2})$$

$$= 1 - (3 - 2\sqrt{2}) = 1 - 3 + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2 \text{ (cm}^2\text{)} \quad \text{答}$$

練習 20 右の図のように、1組の三角定規を重ねておくとき、重なっている部分の面積を求めなさい。



解答

右の図のように点を定める。

$\triangle ABC$ は $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ の直角二等辺三角形であるから

$$BC : AB = 1 : \sqrt{2}$$

したがって

$$BC = AB \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 12 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{12 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$AB : BC = \sqrt{2} : 1$$

$$\sqrt{2} \times BC = 1 \times AB$$

$$BC = \frac{1}{\sqrt{2}} \times AB$$

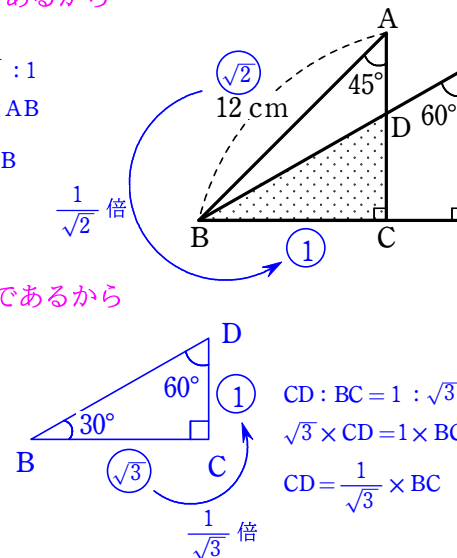
また、 $\triangle DBC$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形であるから

$$CD : BC = 1 : \sqrt{3}$$

よって

$$CD = BC \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{6\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6} \text{ (cm)}$$



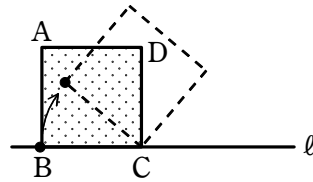
したがって、重なっている部分、すなわち直角三角形 DBC の面積は

$$\frac{1}{2} \times BC \times CD = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 12\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

軌跡の長さを求めることを考えよう。

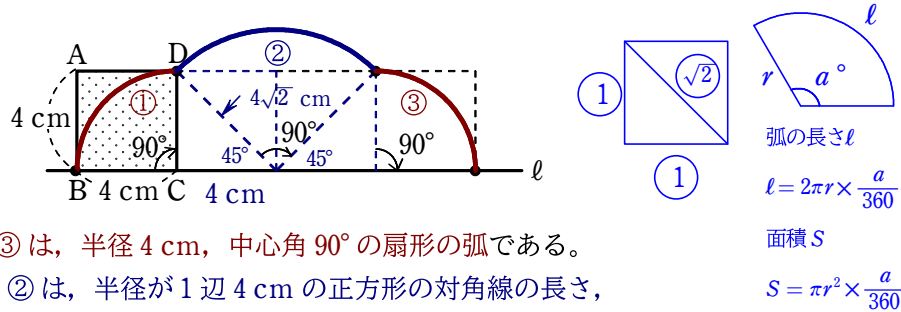
例題 11 1 辺が 4 cm の正方形 ABCD がある。

直線 ℓ 上において、この正方形を右の図のように、点 B が再び直線 ℓ 上にくるまですべることなく転がす。このとき、点 B の軌跡の長さを求めなさい。



この手の問題では、止まっているときの図形を書いて、そこに軌跡を書き込む。

解答 点 B の軌跡は、下の図のようになる。



①と③は、半径 4 cm、中心角 90° の扇形の弧である。
 また、②は、半径が 1 辺 4 cm の正方形の対角線の長さ、すなわち $4\sqrt{2}$ cm、中心角 90° の扇形の弧であるから、
 点 B の軌跡の長さは

$$\left(2\pi \times 4 \times \frac{90}{360}\right) \times 2 + 2\pi \times 4\sqrt{2} \times \frac{90}{360} = 2\pi \times 4 \times \frac{1}{4} \times 2 + 2\pi \times 4\sqrt{2} \times \frac{1}{4}$$

①, ③の2個分

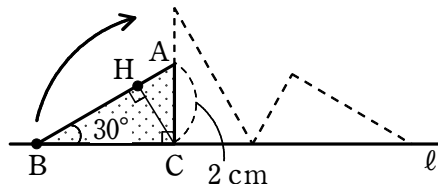
$$= 4\pi + 2\sqrt{2}\pi = (4 + 2\sqrt{2})\pi$$

因数分解

答 $(4 + 2\sqrt{2})\pi$ cm

練習 21 $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 2$ cm の直角三角形 ABC がある。直線 ℓ 上において、この直角三角形を下の図のように、辺 AB が ℓ 上にくるまですべることなく転がす。このとき、次のものを求めなさい。

- (1) 点 B の軌跡の長さ
- (2) 点 C から斜辺 AB に引いた垂線の足を H とするとき、点 H の軌跡の長さ



(1) $\triangle ABC$ は、 30° , 60° , 90° の直角三角形であるから

$$BC = \sqrt{3} AC = \sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

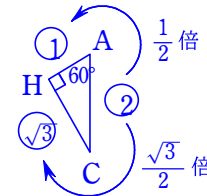
$$AB = 2AC = 2 \times 2 = 4 \text{ (cm)}$$

点 B の軌跡は、右の図のようになる。

①は、半径 $2\sqrt{3}$ cm、中心角 90° の扇形の弧で、
 ②は、半径 4 cm、中心角 120° の扇形の弧である。
 よって、点 B の軌跡の長さは

$$2\pi \times 2\sqrt{3} \times \frac{90}{360} + 2\pi \times 4 \times \frac{120}{360} = 2\pi \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{4} + 2\pi \times 4 \times \frac{1}{3}$$

$$= \sqrt{3}\pi + \frac{8}{3}\pi = \left(\frac{8}{3} + \sqrt{3}\right)\pi \text{ (cm)}$$

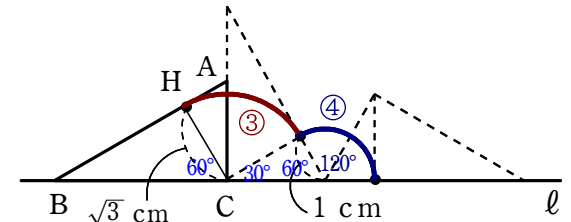


(2) $\triangle ACH$ は 30° , 60° , 90° の直角三角形であるから

$$CH = \frac{\sqrt{3}}{2} AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$AH = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \text{ (cm)}$$

点 H の軌跡は、右の図のようになる。



③は、半径 $\sqrt{3}$ cm、中心角 90° の扇形の弧で、
 ④は、半径 1 cm、中心角 120° の扇形の弧である。
 よって、点 H の軌跡の長さは

$$2\pi \times \sqrt{3} \times \frac{90}{360} + 2\pi \times 1 \times \frac{120}{360} = 2\pi \times \sqrt{3} \times \frac{1}{4} + 2\pi \times 1 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\pi + \frac{2}{3}\pi = \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\pi \text{ (cm)}$$