

第6章「確率と標本調査」3 確率の計算

<確率の求め方>

確率を計算によって求める方法を考えてみよう。

均一な材質で正確な立方体のさいころを作ると、1～6の目の出方にかたよりがなくなる。
これを「正しく作られたさいころ」という。

正しく作られたさいころを投げるとき、出る目は1, 2, 3, 4, 5, 6
の6通りあり、どの場合が起こることも同じ程度に期待できる。

このようなとき、各場合の起こることは **同様に確からしい** という。



(<https://omocoro.jp/bros/kiji/197096/>) **解答**

- 例7** (1) 正しく作られたさいころを投げるとき、
どの目が出ることも同様に確からしい。
(2) 正しく作られた硬貨を投げるとき、
表が出ることと裏が出ることは同様に確からしい。

注意 今後、特に断らない限り、さいころや硬貨は正しく作られたものとする。

各場合の起こることが同様に確からしいとき、確率は次のように求められる。

確率の求め方

各場合の起こることが同様に確からしい実験や観察において、起こりうるすべての場合が n 通りあるとする。そのうち、事柄 A の起こる場合が a 通りあるとき

$$A \text{ の起こる確率 } p \text{ は } p = \frac{a}{n}$$

例8 赤、青、黄、緑の4個の玉が入った袋がある。

この袋の中の玉をよくかき混ぜてから1個取り出すとき、玉の
取り出し方は4通りあり、これらは同様に確からしい。

よって、取り出した玉が赤である確率は $\frac{1}{4}$ 基本的に確率は答えだけ書いてあればいい。
「同様に確からしい」という記述はいらぬ

また、取り出した玉が赤または青である確率は $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

練習14 次のような事柄の起こる確率を求めなさい。

- (1) 1枚の硬貨を投げたとき、表が出る。
- (2) 1枚の硬貨を投げたとき、裏が出る。
- (3) 1個のさいころを投げたとき、出る目が3の倍数となる。
- (4) 1個のさいころを投げたとき、出る目が6の約数となる。

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$

(3) 3の倍数の目は3と6である。 よって、求める確率は $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(4) 6の約数の目は1と2と3と6である。 よって、求める確率は $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

例題6 赤玉3個、青玉2個、黄玉5個が入った袋から玉を1個取り出
すとき、赤玉が出る確率を求めなさい。

解答 玉は10個あるから、玉の取り出し方は、全部で10通りあ
り、これらは同様に確からしい。

このうち、赤玉の取り出し方は3通りある。

よって、求める確率は $\frac{3}{10}$ 答

練習 15 次のような事柄の起こる確率を求めなさい。

- (1) 赤玉 2 個，白玉 3 個が入った袋から玉を 1 個取り出すとき，赤玉が出る。
- (2) ジョーカーを除く 1 組のトランプのカード 52 枚からカードを 1 枚引いたとき，エースが出る。
- (3) 1 から 12 までの自然数が書かれている 12 枚のカードから 1 枚を引いたとき，1 桁の偶数が出る。

解答

- (1) 玉の取り出し方は全部で 5 通りあり，このうち，赤玉が出る場合は 2 通りある。
よって，求める確率は $\frac{2}{5}$
- (2) カードの引き方は全部で 52 通りあり，このうち，エースを引く場合は 4 通りある。
よって，求める確率は $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ ハート，ダイヤ，
スペード，クローバー
- (3) カードの引き方は全部で 12 通りあり，このうち，1 桁の偶数を引く場合は 4 通り 2, 4, 6, 8
ある。よって，求める確率は $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

< 確率の性質 >

起こりうるすべての場合が n 通りあり，そのうち事柄 A の起こる場合が a 通りあるとする。このとき a の値の範囲は

$$0 \leq a \leq n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。ここで，

$$\left. \begin{array}{l} a=0 \text{ となるのは，事柄 A が絶対に起こらない場合} \\ a=n \text{ となるのは，事柄 A が絶対に起こる場合} \end{array} \right\} (*)$$

である。

事柄 A の起こる確率を p とすると， $p = \frac{a}{n}$ で，その値の範囲は， $\textcircled{1}$ から，次のようになることがわかる。

$$0 \leq \frac{a}{n} \leq 1$$

$\textcircled{1}$ の各辺を n で割る。割っても大小関係は
変わらないので $\frac{0}{n} \leq \frac{a}{n} \leq \frac{n}{n}$

すなわち，確率 p の値の範囲は，次のようになる。

$$0 \leq p \leq 1$$

また， $(*)$ から，次のこともわかる。

絶対に起こらない事柄の確率は 0 $\leftarrow a=0$ のとき

絶対に起こる事柄の確率は 1 $\leftarrow a=n$ のとき

上で調べたことは，次のようにまとめられる。

- [1] 確率 p の値の範囲は $0 \leq p \leq 1$
- [2] 絶対に起こらない事柄の確率は 0
- [3] 絶対に起こる事柄の確率は 1

練習 16 1 個のさいころを投げるとき，次の場合の確率を求めなさい。

- (1) 出る目が 10 以下になる。
- (2) 出る目が 7 の倍数になる。

解答

(1) 出る目は必ず 10 以下である。絶対に起こる確率なので，確率は 1

(2) 出る目に 7 の倍数はない。絶対に起こらない確率なので，確率は 0

＜いろいろな確率＞

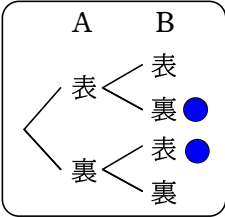
いろいろな事柄の確率を求めてみよう。

問題文に書いてなくても，硬貨は異なるものだと考える。(片方が10円で片方が100円など)
例題 7 2枚の硬貨を同時に投げるとき，1枚は表，1枚は裏となる確率を求めなさい。
下にあるように，樹形図を書くとき

解答 2枚の硬貨の表，裏の出方は，全部で
表表， 表裏， 裏表， 裏裏
の4通りあり，これらは同様に確からしい。
このうち，1枚は表，1枚は裏となるのは2通りある。
よって，求める確率は $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ㊟

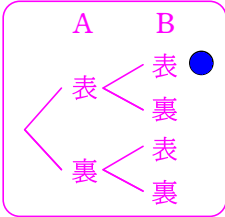
注意 上の例題 7 において，2枚の硬貨の表，裏の出方を「2枚とも表」，「1枚は表，1枚は裏」，「2枚とも裏」の3通りとし，求める確率を $\frac{1}{3}$ とするのは誤りである。
これは，「1枚は表，1枚は裏」という出方と「2枚とも表」，「2枚とも裏」という出方は出やすさが異なるからである。2枚の硬貨をそれぞれ A，B としたとき，「1枚は表，1枚は裏」には「A が表，B が裏」と「B が表，A が裏」の2通りがあると考える。
細かく考える

例題 7 における，起こりうるすべての場合は，
樹形図を用いて考えてもよい。
2枚の硬貨を A，B としたとき，樹形図は右の図のようになる。Aの2通りに対してそれぞれBが2通りずつあるので，起こるすべての場合は $2 \times 2 = 4$ 通り
(綺麗な樹形図)



練習 17 例題 7 において，硬貨が 2 枚とも表となる確率を求めなさい。

解答 2枚の硬貨の表，裏の出方は，全部で 4 通りあり，
これらは同様に確からしい。
このうち，2枚とも表となるのは 1 通りある。
よって，求める確率は $\frac{1}{4}$



練習 18 3枚の硬貨を同時に投げるとき，次の場合の確率を求めなさい。

- (1) すべて表が出る。 (2) 1枚だけ裏が出る。

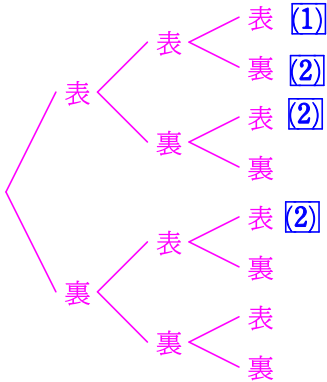
解答

3枚の硬貨の表，裏の出方は，全部で

表表表， 表表裏， 表裏表，
表裏裏， 裏表表， 裏表裏，
裏裏表， 裏裏裏

の 8 通りあり，これらは同様に確からしい。

- (1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{3}{8}$



例題 8 2 個のさいころを同時に投げるとき、出る目の和が 5 になる確率を求めなさい。

さいころを2個なげるときは表を書く

問題文に書いてなくても、サイコロは異なるものだと考える。(片方が大きくて片方が小さいなど)

Aの出方6通りに対して、Bの出方がそれぞれ6通りずつある

解答 2 個のさいころの目の出方は、

全部で $6 \times 6 = 36$ (通り)

このうち、出る目の和が 5 になるのは、次の 4 通りある。

(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)

よって、求める確率は $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ ㊟

B \ A	1	2	3	4	5	6
1				○		
2			○			
3		○				
4	○					
5						
6						

練習 19 2 個のさいころを同時に投げるとき、次の場合の確率を求めなさい。

- 出る目の和が 7 になる。
- 2 個とも偶数の目が出る。
- 出る目の和が 4 の倍数になる。

解答

2 個のさいころの目の出方は、全部で $6 \times 6 = 36$ (通り)

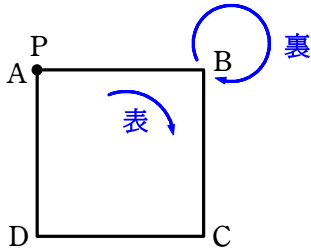
- 目の和が 7 になるのは、次の 6 通り。
(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)
よって、求める確率は $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
- 2 個とも偶数の目になるのは、次の 9 通り。
(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)
よって、求める確率は $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
- 目の和が 4 の倍数になるのは、次の 9 通り。
(1, 3), (2, 2), (2, 6), (3, 1), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (6, 6)
よって、求める確率は $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

A \ B	1	2	3	4	5	6
1						○
2					○	
3				○		
4			○			
5		○				
6	○					

A \ B	1	2	3	4	5	6
1						
2		○		○		○
3						
4		○		○		○
5						
6		○		○		○

A \ B	1	2	3	4	5	6
1			○			
2		○				○
3	○				○	
4				○		
5			○			
6		○				○

例題 9 右の図のような正方形 ABCD の頂点 A に点 P がある。1 枚の硬貨を投げて表が出ると、P は時計回りの方向に隣の頂点に動き、裏が出ると動かずにとどまる。硬貨を 2 回投げたとき、P が頂点 B にある確率を求めなさい。

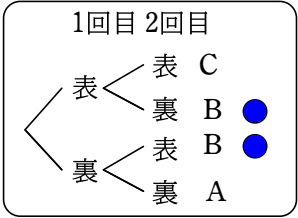


解答 硬貨の表、裏の出方は、全部で 4 通りあり、点 P の動き方は、右の表のようになる。このうち、P が頂点 B になるのは 2 通りある。

よって、求める確率は $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ㊟

$2 \times 2 = 4$ 通り

1 回目	2 回目	P の動き
表	表	A → B → C
表	裏	A → B → B
裏	表	A → A → B
裏	裏	A → A → A



樹形図で考えてもいい。2 回のうち表 1 回裏 1 回でる場合であるから 2 通りである。つまり、例題 7 と同じ問題

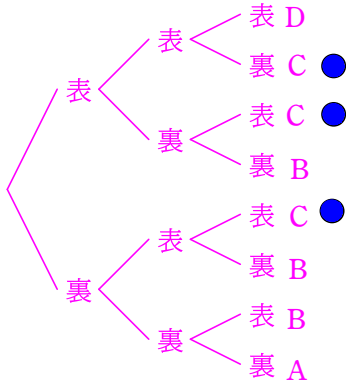
練習 20 例題 9 において、硬貨を 3 回投げたとき、点 P が頂点 C にある確率を求めなさい。

解答
硬貨の表、裏の出方は、全部で $2 \times 2 \times 2 = 8$ (通り) あり、点 P の動き方は、次の表のようになる。

1 回目	2 回目	3 回目	P の動き
表	表	表	$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$
表	表	裏	$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow C$
表	裏	表	$A \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow C$
表	裏	裏	$A \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow B$
裏	表	表	$A \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$
裏	表	裏	$A \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow B$
裏	裏	表	$A \rightarrow A \rightarrow A \rightarrow B$
裏	裏	裏	$A \rightarrow A \rightarrow A \rightarrow A$

よって、点 P が頂点 C にある確率は $\frac{3}{8}$

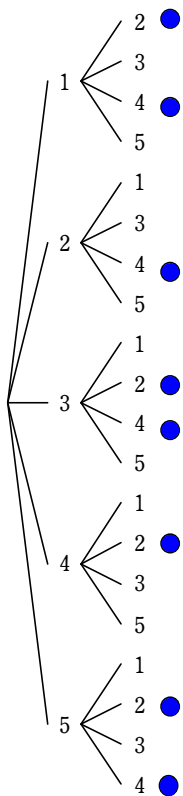
樹形図で考えてもいい。3 回のうち表 2 回裏 1 回でる場合であるから 3 通りである。
つまり、練習 18(2) と同じ問題



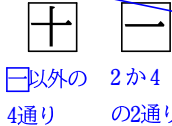
例題 10 1, 2, 3, 4, 5 の番号が書かれている 5 枚のカードをよく混ぜて、1 枚ずつ続けて 2 枚引く。最初のカードの番号を十の位、あとのカードの番号を一の位として 2 桁の数をつくるとき、できる数が偶数になる確率を求めなさい。

【考え方】一の位の数が偶数のとき、2 桁の数は偶数である。

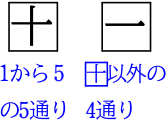
解答 2 桁の数の作り方は、全部で ${}_5P_2 = 5 \times 4 = 20$ (通り) 偶数になるのは、一の位が 2 または 4 のときであるから、
12, 32, 42, 52, 14, 24, 34, 54
の 8 通りある。
よって、求める確率は $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ 答



樹形図を書いてもいいが、計算だけで求めたい (樹形図を書く時間がもったいない)



$4 \times 2 = 8$ 通り



$5 \times 4 = 20$ 通り

練習 21 1, 2, 3, 4 の番号が書かれている 4 枚のカードをよく混ぜて、1 枚ずつ続けて 2 枚引く。最初のカードの番号を十の位、あとのカードの番号を一の位として 2 桁の数をつくるとき、できる数が 3 の倍数になる確率を求めなさい。

解答 2 桁の数のつくり方は、全部で ${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$ (通り)
 できる数が 3 の倍数になるのは、

12, 21, 24, 42

の 4 通りである。

よって、求める確率は $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

倍数判定法

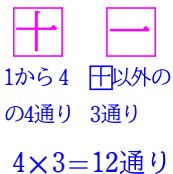
「3 の倍数」→「各位の数の和が 3 の倍数である」

12 → 1+2=3 → OK

21 → 2+1=3 → OK

24 → 2+4=6 → OK

42 → 4+2=6 → OK



例題 11 赤玉 3 個、白玉 4 個が入った袋から、同時に 2 個の玉を取り出すとき、2 個とも白玉が出る確率を求めなさい。

$\frac{(\text{白白})}{(\text{赤赤})(\text{赤白})(\text{白白})} = \frac{1}{3}$ ではない

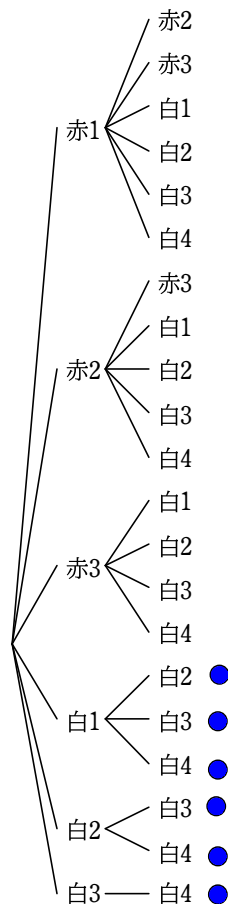
問題文に書いてなくても、玉は異なるものだと考える。(番号がついていると考える)

解答 7 個の玉から 2 個取る組合せは、全部で ${}_7C_2$ 通りある。
 白玉 4 個から 2 個取る組合せは、 ${}_4C_2$ 通りある。

よって、求める確率は $\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$ 答

$${}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$



「同時に玉を取り出す」→Cを使う。

(玉を選んでいるだけで、そのあと並べてないから)

樹形図を用いてもいいが、面倒であるからCで計算したい。

${}_7C_2$ や ${}_4C_2$ をそれぞれ求めてから
 確率の分数を作らないで

$$\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2} = \frac{\overset{\text{約分}}{4 \times 3}}{2 \times 1 \times \cancel{7 \times 6}} = \frac{\overset{2}{\cancel{4} \times \cancel{3}}}{\cancel{2} \times \cancel{6}} = \frac{2}{7}$$

とする方法もある。

練習 22 赤玉 4 個，白玉 5 個が入った袋から，同時に 2 個の玉を取り出すとき，2 個とも赤玉が出る確率を求めなさい。

解答

9 個の玉から 2 個取る組合せは，全部で， ${}_9C_2$ 通りある。

赤玉 4 個から 2 個取る組合せは， ${}_4C_2$ 通りある。

よって，求める確率は $\frac{{}_4C_2}{{}_9C_2} = \frac{\frac{4 \times 3}{2 \times 1}}{\frac{9 \times 8}{2 \times 1}} = \frac{4 \times 3}{9 \times 8} = \frac{1}{6}$ 答

<起こらない確率>

2 本のあたりくじと 3 本のはずれくじからなる 5 本のくじから 2 本引いたとき，少なくとも 1 本があたりくじである確率を求めてみよう。

あたりくじを ①，②，はずれくじを ③，④，⑤ とする。

このとき，引いた 2 本のくじの組合せは，次のようになる。

①, ②, ①, ③, ①, ④, ①, ⑤, ②, ③, ②, ④, ②, ⑤, ③, ④, ③, ⑤, ④, ⑤

[1]

③, ④, ③, ⑤, ④, ⑤

[2]

この問題では，起こりうるすべての場合が

[1] 少なくとも 1 本があたりくじである

[2] 2 本ともはずれくじである

の 2 つに分けられる。

よって，([1] の確率) + ([2] の確率) = 1 であるといえる。

([1] の確率) または ([2] の確率) = 絶対起こる

くじを 2 本引いたら [1] または [2] の場合しか起こらない。

絶対に起こる確率は 1

[2] の確率は $\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$ であるから，[1] の確率は

([1] の確率) + ([2] の確率) = 1 より ([1] の確率) = 1 - ([2] の確率) = 1 - $\frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

注意 この問題では，[1] の確率を直接考えるより，[2] の確率を考えてから，上のように計算する方が簡単である。

一般に，次のことが成り立つ。

(事柄 A の起こらない確率) = 1 - (事柄 A の起こる確率)

求めたい確率が面倒なとき，その反対の確率が簡単そうに求められるなら，上記の公式を用いる。
「少なくとも...」という問題はこの公式を用いる。

起こらない

起こる

全体

$$\frac{(\text{起こらない})}{(\text{全体})} = \frac{(\text{全体}) - (\text{起こる})}{(\text{全体})}$$
$$= \frac{(\text{全体})}{(\text{全体})} - \frac{(\text{起こる})}{(\text{全体})}$$
$$= 1 - \frac{(\text{起こる})}{(\text{全体})}$$

参考

(o´Д-o)ノ オハヨヨヨヨヨヨヨヨヨヨ
ヨ ← exist の頭文字
「少なくとも 1 人は宿題を忘れた」言い換えると「宿題を忘れた生徒がいる」
それが起こらなかったということは「全員宿題を持ってきた」
∀ ← all の頭文字 (^∀^)

練習 23 2 個のさいころを同時に投げるとき、少なくとも 1 個は偶数の目が出る確率を求めなさい。

解答

2 個のさいころの目の出方は全部で $6 \times 6 = 36$ (通り)

このうち、2 個とも奇数の目となるのは $3 \times 3 = 9$ (通り)

よって、2 個とも奇数の目が出る確率は $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

したがって、求める確率は $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
(少なくとも1個は偶数) = $1 - (\text{すべて奇数})$

参考 (直接求めに行くと $\frac{27}{36} = \frac{3}{4}$)

A \ B	1	2	3	4	5	6
1		○		○		○
2	○	○	○	○	○	○
3		○		○		○
4	○	○	○	○	○	○
5		○		○		○
6	○	○	○	○	○	○

A **B**

1から6 1から6
の6通り の6通り

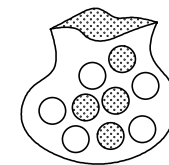
$6 \times 6 = 36$ 通り

A **B**

1か3か5 1か3か5
の3通り の3通り

$3 \times 3 = 9$ 通り

赤玉 4 個と白玉 5 個の入った袋から、2 個の玉を同時に取り出すとき、2 個が同じ色である確率を求めよ。



解答 $\frac{4}{9}$

赤玉 6 個と白玉 4 個の入った袋から 4 個の玉を同時に取り出すとき、少なくとも 1 個が白玉である確率を求めよ。

解答 $\frac{13}{14}$

赤玉 5 個、白玉 4 個、黄玉 3 個の入った袋から、3 個の玉を同時に取り出すとき、次の場合の確率を求めよ。

- (1) 黄玉が 2 個と白玉が 1 個出る。 (2) 3 個とも異なる色の玉が出る。

解答 (1) $\frac{3}{55}$ (2) $\frac{3}{11}$

男子 4 人と女子 3 人がくじ引きで 1 列に並ぶとき、次の確率を求めよ。

- (1) 男子と女子が交互に並ぶ確率
(2) 両端のうち、少なくとも一方に女子が並ぶ確率

解答 (1) $\frac{1}{35}$ (2) $\frac{5}{7}$

A, B, C の 3 人でじゃんけんを 1 回するとき、次の確率を求めよ。

- (1) A だけが負ける確率 (2) 1 人だけが勝つ確率

解答 (1) $\frac{1}{9}$ (2) $\frac{1}{3}$

モンティ・ホール問題

モンティ・ホールという人が司会を務めたアメリカの番組で、次のようなゲームが話題になりました。

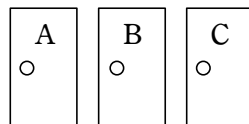
A, B, Cの3つのドアがある。

そのうちの1つのドアの向こうに景品があり、
残りの2つのドアの向こうには何もない。

ゲームの参加者がこの3つのドアのうち1つ

のドアを開けて、そこに景品があれば、景品をもらえる。ただし、参加者がドアを開けるまでに、司会者と参加者の間で次のようなかけひきがある。

- [1] 参加者がドアを1つ選ぶ(ドアはまだ開けない)。
- [2] 景品が入っているドアを知っている司会者が、残りの2つのドアから景品が入っていないドアを1つ開ける。
- [3] 司会者が参加者に「ドアの選択を変更してもよい」と告げる。
- [4] 参加者が2つのドアから最終的に選んだドアを開ける。



このゲームで、[3]のあとに参加者はドアを変更すべきでしょうか。

[3]のとき、残りのドアは2つだから、参加者はドアを変更しても、変更しなくても、景品があたる確率は $\frac{1}{2}$ だと思います。



[3]のとき、参加者が[1]で選んだドア、もう1つのドアに景品が入っている確率はそれぞれ $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ だから、参加者はドアを変更した方がよいと思います。



実は、ドアを変更した方が、景品があたる可能性が大きくなります。その理由を考えてみましょう。

