

質問



(<https://www.tokai-tv.com/tenkijojo/2018/04/post-1364.html>)

名古屋の午後の降水確率は70%です。
降水確率ってなんですか？

質問

次の中で正しいのはどちらでしょう？

1. 10円玉を投げて表がでる確率は $\frac{1}{2}$ (つまり50%)
だって、投げたら「表」か「裏」しか起こらないから。
2. 宝くじを勝って1等が当たる確率は $\frac{1}{2}$ (つまり50%)
だって、買った「当たる」か「当たらない」しか起こらないから。

質問

サイコロを1回投げて、3の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ です。
だって、サイコロは1から6までの6個の目しかないの。
確率 $\frac{1}{6}$ ということは、6回さいころを投げれば
必ず1回3の目が出るということですか？

質問

年末ジャンボ宝くじで1等が当たる
ホールインワンを出す
飛行機の墜落

どれが1番起こりやすいでしょう？

ホールインワン・・・宝くじの約600倍
飛行機の墜落・・・宝くじの約180倍

(<https://life.saisoncard.co.jp/money/wisemoney/post/c16/>)

＜場合の数と樹形図＞

ある事柄の起こり方が全部で n 通りあるとする。このときの n をその事柄の起こる **場合の数** という。

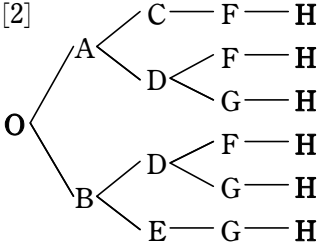
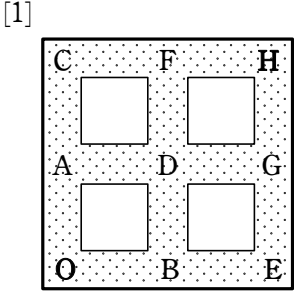
場合の数を知るには、起こりうるすべての場合を、もれなく重複なく 数える必要がある。

ここでは、そのための方法について考えてみよう。

図 [1] のような道を通して、地点 O から地点 H まで遠回りしないで行くとき、どのような道順があるかを調べてみよう。

条件を満たす道順を、交差点を示す文字の順にすべて書き出してみると、下のようになる。

- O → A → C → F → H
- O → A → D → F → H
- O → A → D → G → H
- O → B → D → F → H
- O → B → D → G → H
- O → B → E → G → H



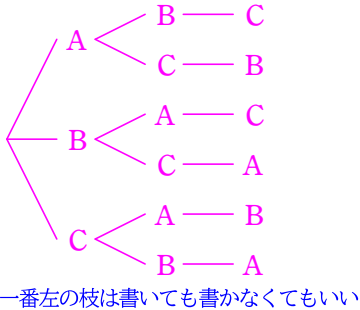
小学校でやったことがある人もいると思います。
一番左の枝は間隔を考えてかかないと、右側の枝が書けなくなります。
樹形図で枝分かれたあと、上からアルファベット順になるようにするとミスが少ないです。

これらは、図 [2] のように次々と枝分かれしていく図でも表すことができる。このような図を **樹形図 (じゅけいず)** という。樹形図は、起こりうるすべての場合を、もれなく重複なく数え上げるのに便利である。

練習 1 アルファベットの A, B, C を、ACB のように重複なしに 1 個ずつすべて並べるとき、その並べ方をすべて書き出さない。

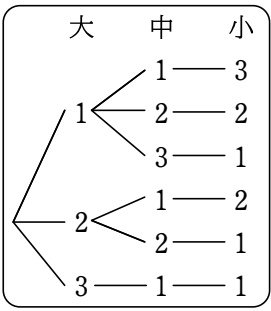
解答 1 ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

辞書的に並べてかけるようになります。
あいさつ→あさがお など



樹形図を用いて、起こりうる場合の数を求めてみよう。

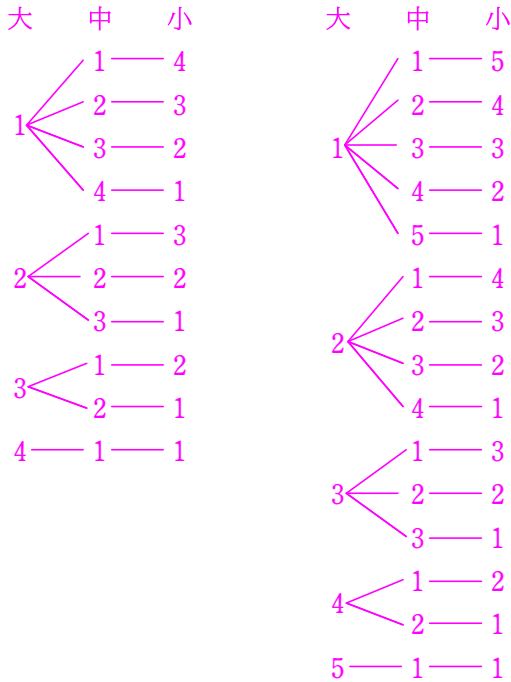
例 1 大中小 3 個のさいころを同時に投げるとき、出る目の和が 5 になる場合は、右の樹形図により、6 通りある。



小さい順に上から書くとわかりやすい

練習 2 大中小 3 個のさいころを同時に投げるとき、次の場合は何通りあるか答えなさい。 (1) 出る目の和が 6 になる場合 (2) 出る目の和が 7 になる場合

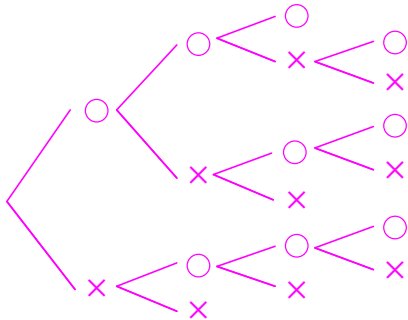
解答 (1) 10 通り (2) 15 通り



練習 3 1 枚の硬貨をくり返し投げ、表が 3 回または裏が 2 回出たところで終了する。表と裏の出方は何通りあるか答えなさい。

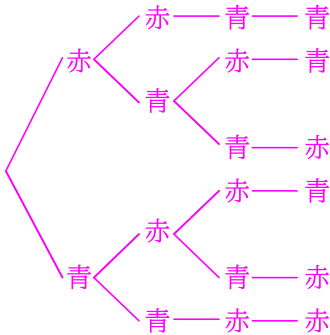
解答

硬貨を投げたとき、表が出ることを ○、裏が出ることを × で表し、表が 3 回または裏が 2 回出るまでの樹形図をかくと、右の図のようになる。
よって 10 通り



練習 4 赤玉 2 個と青玉 2 個の入った箱の中から、1 個ずつ順に玉を取り出す。全部の玉を取り出すとき、出た玉の色の順序を考えると、玉の出方は何通りあるか答えなさい。

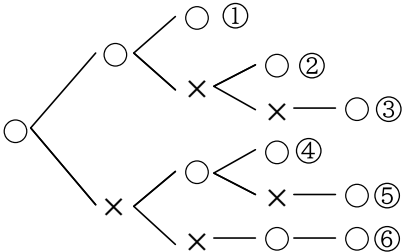
解答 6 通り



例題 1 ある競技の予選は 5 試合のうち 3 勝すれば通過できる。ただし、引き分けはなく、3 勝したらそれ以降の試合はない。最初に 1 勝したとき、この競技の予選を通過するための勝敗の順は何通りあるか答えなさい。

【考え方】 5 試合目までに勝ちが 3 回になる場合の樹形図をかく。

解答 勝ちを ○、負けを × で表し、5 試合目までに、3 勝する場合の樹形図をかくと、右の図のようになる。
よって 6 通り 答



＜表をつくって場合の数を求める＞

2 個のさいころを同時に投げるときに起こるような場合の数は、表をつくって考えるとわかりやすいことが多い。

「2 個のサイコロ」と言われたら表を作る

例題 2 2 個のさいころ A, B を同時に投げるとき、A の目が B の目の約数になる場合は何通りあるか答えなさい。

解答

A, B の目の出方を表にまとめ、A の目が B の目の約数となる場合に、○ 印をつけると、右の表のようになる。
よって 14 通り

A \ B	1	2	3	4	5	6
1	○					
2	○	○				
3	○		○			
4	○	○		○		
5	○				○	
6	○	○	○			○

注意 例題 2 のように、さいころの目の組を考えると、たとえば、A の目が 3、B の目が 6 である組を (3, 6) のように書き表すこともある。
A の目 ↗ ↖ B の目

練習 5 2 個のさいころ A, B を同時に投げるとき、出る目の和が 5 の倍数になる場合は何通りあるか答えなさい。

解答

目の和が 5 になるのは 4 通り
目の和が 10 になるのは 3 通り
目の和が 13 以上になることはない。
よって、目の和が 5 の倍数になる場合は 7 通り

A \ B	1	2	3	4	5	6
1				○		
2			○			
3		○				
4	○					○
5					○	
6				○		

＜順列＞

2 種類の食べ物 A, B と、3 種類の飲み物 P, Q, R から 1 種類ずつ選ぶとき、そのセットの種類数は、下の樹形図のようになる。

食べ物の選び方は、A, B のどちらでもよいから、2 通りある。
飲み物の選び方は、P, Q, R のどれでもよいから、3 通りある。
よって、場合の数は $2 \times 3 = 6$ (通り)

	P	Q	R
A	①	②	③
B	④	⑤	⑥

マスの数は 2×3 で 6 マス

(イメージ)

スパチキセット ¥500

スバビーセット ¥520

チキチーセット ¥520

エグチセット ¥540

(イメージ)

A バーガーと B バーガー
コーラか紅茶かジュースが選べます

(https://www.mcdonalds.co.jp/campaign/500yen_valueset/)

一般に、次のことが成り立つ。

事柄 A の起こり方が a 通りあり、そのおのおの場合についても、事柄 B の起こり方が b 通りずつあるとき、
A と B がともに起こる場合は ab 通り がある。

a 通りに対して それぞれ b 通り ずつ ある $\rightarrow a \times b$ 通り

このことは、3 つ以上の事柄についても成り立つ。

例題 3 3 個のさいころ A, B, C を同時に投げるとき, A, B の目が 3 の倍数, C の目が偶数になる場合は何通りあるか答えなさい。

解答

A, B の目が 3 の倍数になるのは、それぞれ 2 通り
C の目が偶数になるのは 3 通り
よって、求める場合の数は
 $2 \times 2 \times 3 = 12$ (通り) 答

$\uparrow$
A

$\uparrow$
B

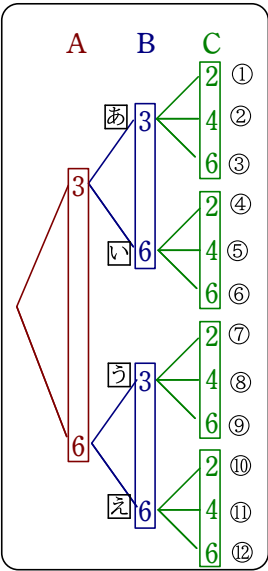
$\uparrow$
C

	B=3	B=6
A=3	あ	い
A=6	う	え

マスの数は 2×2 で 4 マス

	C=2	C=4	C=6
あ	①	②	③
い	④	⑤	⑥
う	⑦	⑧	⑨
え	⑩	⑪	⑫

マスの数は 4×3 で 12 マス
4は左の表より 2×2 だったので
上の表は $2 \times 2 \times 3$ で 12 マス



枝の数が縦に揃っている
綺麗な樹形図では、
枝の本数をかけ算で求める
ことができる
(縦で枝の本数が異なると
きはダメ)

練習 6 次の問いに答えなさい。

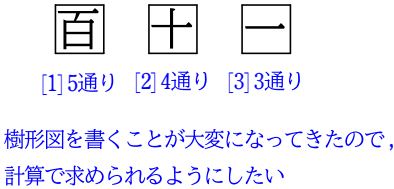
- 2 個のさいころ A, B を同時に投げるとき, A の目が奇数, B の目が 5 以下になる場合は何通りあるか答えなさい。
- 3 種類のサラダと, 2 種類のスープと, 4 種類のデザートから, それぞれ 1 種類ずつ選び, セットをつくる。セットのつくり方は全部で何通りあるか答えなさい。

解答

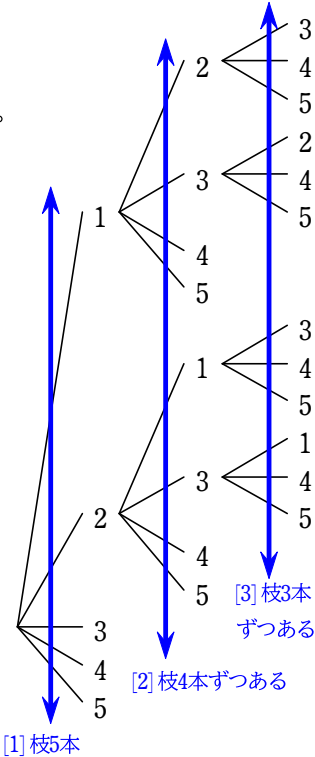
- A の目が奇数になるのは 3 通り
B の目が 5 以下になるのは 5 通り
よって、求める場合の数は $3 \times 5 = 15$ (通り)
- 3 種類のサラダから 1 種類を選ぶ方法は 3 通り
2 種類のスープから 1 種類を選ぶ方法は 2 通り
4 種類のデザートから 1 種類を選ぶ方法は 4 通り
よって、求めるセットのつくり方の総数は $3 \times 2 \times 4 = 24$ (通り)

5 個の数字 1, 2, 3, 4, 5 から異なる 3 個を取って並べるとき, 3 桁の数がいくつできるかを考えてみよう。

- 百の位から順に数字を決める。
- [1] 百の位は, 1, 2, 3, 4, 5 のどれでもよいから 5 通り。
 - [2] 十の位は, [1] で決めた数字以外の 4 通り。
 - [3] 一の位は, [1], [2] で決めた数字以外の 3 通り。
- よって, できる 3 桁の数は $5 \times 4 \times 3 = 60$ (個)



「1, 2, 3, 4, 5 から3個取り出してできる3桁の数の個数」
「a, b, c, d, e から3個取り出してできる3文字の単語数」
どちらも60個になる



上の例では, 3 個の数字を 1 列に並べているが, たとえば 123 と 312 のように, 同じ数字を用いても並べる順序が違うものは区別している。

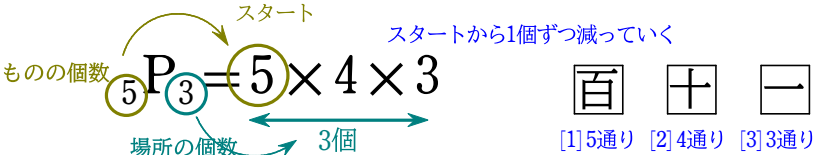
このように, いくつかのものを, 順序をつけて 1 列に並べるとき, その並びの 1 つ 1 つを **順列** という。

一般に, 異なる n 個のもののから異なる r 個を取り出して並べる順列を **n 個から r 個取る順列** といい, その総数を記号 ${}_nP_r$ で表す。「エヌ ピー アール」と読む

たとえば, 5 個から 3 個取る順列の総数は ${}_5P_3$ で表され,

${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ 上の 3 桁の数が 60 個あったことを思い出そう

である。



注意 ${}_nP_r$ の P は, 「順列」を意味する permutation の頭文字である。

一般に, 次のことが成り立つ。

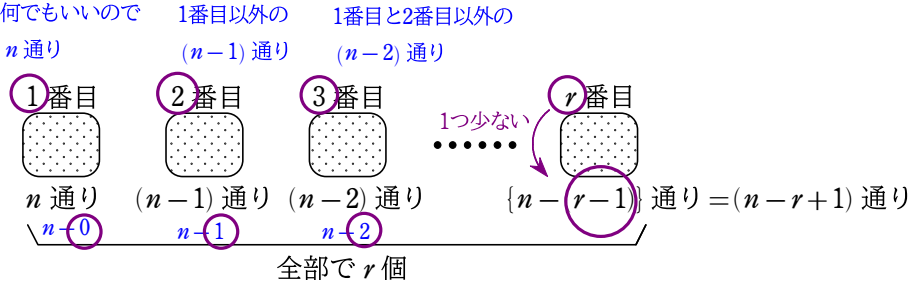
順列の総数 ${}_nP_r$

${}_nP_r$ は「掛け算をしない」という命令だと考えましょう

n 個から r 個取る順列の総数 ${}_nP_r$ は

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{r \text{ 個の数の積}}$



例 2 7 人から 3 人を選んで 1 列に並べるとき, 並べ方の総数は

ものの個数 場所の個数

${}_7P_3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$ (通り)

$\underbrace{\hspace{2em}}_{3 \text{ 個の数の積}}$

練習 7 次のものの総数を求めなさい。

- (1) 10 人から 3 人を選んで 1 列に並べるときの並べ方
- (2) 1 から 6 までの 6 個の数字から異なる 4 個を選んでつくる 4 桁の整数

解答

(1) ${}_{10}P_3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$ (通り)

(2) ${}_6P_4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ (個)

順列の総数 ${}_nP_r$ の式で、特に $r=n$ のときは

$${}_nP_n = n(n-1)(n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

となる。これは、1 から n までのすべての自然数の積である。

これを **n の階乗 (かいじょう)** といい、 **$n!$** で表す。

エヌの階乗もしくはエヌファクトリアルと読む

$$n! = n(n-1)(n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

例 3 (1) $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$= 56 \times 120$$

5をうまく使うと良い

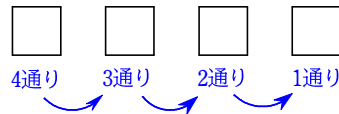
(2) $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$

一般に、次のことがいえる。

異なる n 個すべてを並べる順列の総数は ${}_nP_n = n!$ 通り

例 4 4 人の生徒全員を 1 列に並べるとき、並べ方の総数は

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ (通り)}$$



練習 8 次のような並べ方の総数を求めなさい。

(1) A, B, C, D, E の 5 文字すべてを 1 列に並べる。

(2) 1 から 7 までの 7 個の自然数すべてを 1 列に並べる。

解答

(1) $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ (通り)

(2) $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$ (通り)

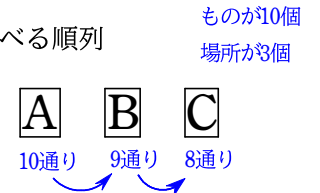
< 順列の利用 >

順列の考え方を利用して、いろいろな場合の数を求めてみよう。

例題 4 10 枚の異なるカードから 3 枚を選び、A, B, C の 3 人に 1 枚ずつ配るとき、配り方は何通りあるか答えなさい。

解答 配り方の総数は、10 枚から 3 枚を選んで 1 列に並べる順列の総数と同じであるから

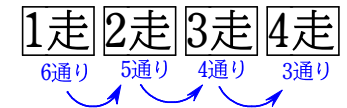
$${}_{10}P_3 = 10 \times 9 \times 8 = 720 \text{ (通り)} \quad \text{答}$$



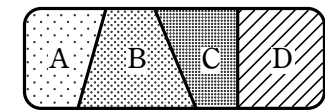
練習 9 6 人の候補選手の中から、リレーの第 1 走者から第 4 走者までを決めるとき、4 人の走者の決め方は何通りあるか答えなさい。

解答

$${}_6P_4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360 \text{ (通り)}$$

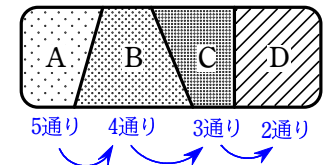


練習 10 右の図のような A, B, C, D の 4 つの部分をもとに、すべて違う色で塗り分ける。5 種類の色があるとき、何通りの塗り方があるか答えなさい。



解答

$${}_5P_4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120 \text{ (通り)}$$



問題 男子 4 人と女子 3 人が 1 列に並ぶとき、次のような並び方は何通りあるか。

- (1) 両端が男子である。 (2) 女子 3 人が続いて並ぶ。

解答 (1) 1440 通り (2) 720 通り

問題 A, B, C, D, E, F, G の 7 人が 1 列に並ぶとき

- (1) A と B が隣り合うような並び方は全部で何通りあるか。
(2) A と B が両端にくるような並び方は全部で何通りあるか。
(3) A, B, C の 3 人が隣り合わないような並び方は全部で何通りあるか。

解答 (1) 1440 通り (2) 240 通り (3) 1440 通り

問題 5 個の数字 1, 2, 3, 4, 5 のうちの異なる 3 個を並べて、3 桁の整数を作る。次のような整数は何個作れるか。

- (1) 5 の倍数 (2) 偶数 (3) 奇数

解答 (1) 12 個 (2) 24 個 (3) 36 個

問題 6 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 のうちの異なる 4 個を並べて、4 桁の整数を作るとき、次のような整数は何個作れるか。

- (1) 4 桁の整数 (2) 4 桁の奇数 (3) 4 桁の偶数

解答 (1) 300 個 (2) 144 個 (3) 156 個

問題

この中に長方形は何個あるでしょう。
(正方形も長方形です)

解答(組み合わせを習ってから確認しましょう)

	A	B	C	D	E
<i>a</i>					
<i>b</i>					
<i>c</i>					
<i>d</i>					

縦2本の選び方はA,B,C,D,Eから2本選ぶので選び方は ${}_5C_2$ 通りある。
そのどの場合に対しても、横2本の選び方は a,b,c,d から
2本選ぶので選び方は ${}_4C_2$ 通りある。
よって、できる長方形の総数は、積の法則により

$${}_5C_2 \times {}_4C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 60$$
 答 60 通り

<組合せ>

食べたいお寿司を3つ考えてください。



あなたはその3つのお寿司を
「とにかく食べられればいい人」ですか？
「食べる順番も考えたい人」ですか？

4個の文字 a, b, c, d から、異なる3個を取り出して文字の組をつくるとき、次のような4つの組ができる。

$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$ ……①

この場合、 a, b, c の順に取り出しても、 b, c, a の順に取り出しても、同じ組 $\{a, b, c\}$ と考える。

このように、ものを取り出す順序を無視した組をつくるとき、これらの組の1つ1つを **組合せ** という。

一般に、異なる n 個の物から異なる r 個を取り出してつくる組合せを **n 個から r 個取る組合せ** といい、その総数を記号 ${}_nC_r$ で表す。 「エヌシーアール」と読む

たとえば、4個から3個取る組合せの総数は ${}_4C_3$ で表され、 ${}_4C_3=4$ である。

注意 ${}_nC_r$ の C は、「組合せ」を意味する combination の頭文字である。

計算によって「組み合わせの総数」を求めるにはどうしたらいいでしょう？

①の1つの組 $\{a, b, c\}$ について、3個の文字 a, b, c すべてを並べてできる順列は $3!$ 通りある。
組合せでは、順序を無視するため、これらの $3!$ 個のものは、すべて同じ組と考える。

他の3つの組についても同様であるから、
「4個から3個取る組合せをつくり、それぞれの組の3個すべてを1列に並べる順列の総数」と「4個から3個取る順列の総数」は一致する。

言い換えると

${}_4P_3$ 通りの中に、同じ組が $3!$ 通りずつ現れる。
組が全部で何種類(右図でいうと同じ組は同じ色で塗られているので、全部で何色使われているか求めることと同じ)であるか求めているので、
 ${}_4P_3$ を $3!$ で割れば、組が何種類あるか求められる。
よって

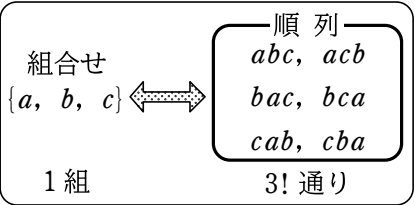
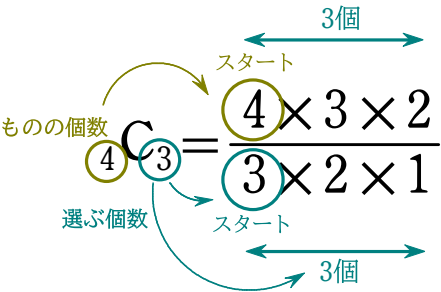
$${}_4P_3 = \frac{{}_4P_3}{3!}$$

であり、 ${}_4P_3=4 \times 3 \times 2$ であるから

$${}_4C_3 = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1}$$

分子分母を先に約分する
$$= 4$$

となって ${}_4C_3=4$ と計算で求められる。



順列	①	②	③	組み合わせ
1	A	B	C	1
2	A	B	D	2
3	A	C	B	1
4	A	C	D	3
5	A	D	B	2
6	A	D	C	3
7	B	A	C	1
8	B	A	D	2
9	B	C	A	1
10	B	C	D	4
11	B	D	A	2
12	B	D	C	4
13	C	B	A	1
14	C	B	D	4
15	C	A	B	1
16	C	A	D	3
17	C	D	B	4
18	C	D	A	3
19	D	B	A	2
20	D	B	C	4
21	D	A	B	2
22	D	A	C	3
23	D	C	B	4
24	D	C	A	3

同様に

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

$${}_5C_4 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5$$

一般に、次のことが成り立つ。

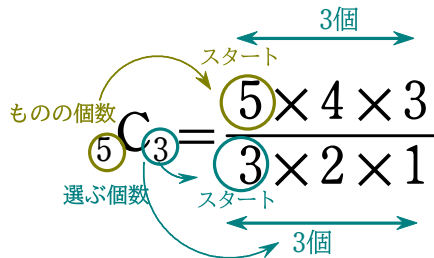
組合せの総数 ${}_nC_r$,

n 個から r 個取る組合せの総数 ${}_nC_r$ は

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2) \times \cdots \times (n-r+1)}^{r \text{ 個の数の積}}}{\underbrace{r(r-1)(r-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1}_{r \text{ 個の数の積}}} \left(= \frac{{}_nP_r}{r!} \right)$$

例 5 5 人の中から 3 人を選ぶとき、選び方の総数は

$${}_5C_3 = \frac{\overbrace{5 \times 4 \times 3}^{3 \text{ 個の数の積}}}{\underbrace{3 \times 2 \times 1}_{3 \text{ 個の数の積}}} = 10 \text{ (通り)}$$



練習 11 次のような選び方の総数を求めなさい。

- 4 人の中から 2 人の代表を選ぶ。
- 9 色の中から 3 色を選ぶ。

解答

$$(1) {}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6 \text{ (通り)} \quad (2) {}_9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84 \text{ (通り)}$$

< ${}_nC_r$ の性質 >

問題

${}_{10}C_8$ を計算しなさい。

解答

$${}_{10}C_8 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45 \quad {}_{10}C_2 \text{ と同じ}$$

5 個の文字 a, b, c, d, e から 3 個を選ぶとき、
5 個から 3 個を選ぶことは、選ばない 2 個を決めること
と同じである。

したがって、5 個から 3 個取る組合せの総数と、
5 個から 2 個取る組合せの総数は等しくなる。

よって、次の等式が成り立つ。

$${}_5C_3 = {}_5C_2$$

「5 個から 3 個選ぶこと」は
「5 個から 2 個残すこと」と同じ

3 個の組	2 個の組
{a, b, c}	{d, e}
{a, b, d}	{c, e}
{a, b, e}	{c, d}
{a, c, d}	{b, e}
{a, c, e}	{b, d}
{a, d, e}	{b, c}
{b, c, d}	{a, e}
{b, c, e}	{a, d}
{b, d, e}	{a, c}
{c, d, e}	{a, b}
${}_5C_3$ 個	${}_5C_2$ 個

一般に、 n 個から r 個取る組合せの総数は、 n 個から $(n-r)$ 個取る組合せの総数に等しい。すなわち、次の等式が成り立つ。

${}_nC_r$ の性質

$${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$$

$$\bigcirc C_{\triangle} = \bigcirc C_{\square}$$

$$\triangle + \square = \bigcirc$$

例 ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ を使って、 ${}_{10}C_7$ を求める。

$${}_{10}C_7 = {}_{10}C_{10-7} = {}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

終

＜組合せの利用＞

組合せの考え方を利用して、いろいろな場合の数を求めてみよう。

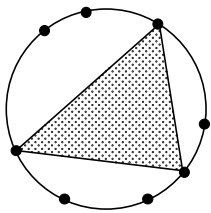
例題 5 円周上の異なる 8 点のうち、3 点を結んでできる三角形は何個あるか答えなさい。
形が同じでも、場所が異なれば違う三角形と考える

解答

三角形の個数は、8 点 から 3 点を選ぶ組合せの総数と同じであるから

$${}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56 \text{ (個)}$$

別紙参照



組が1つ決まれば三角形が1つできる。組の総数はCを用いてすぐに計算できるので、三角形を数えなくても三角形の総数を求められる。

練習 12 正六角形について、次のものの個数を求めなさい。

- (1) 3 個の頂点を結んでできる三角形
- (2) 2 個の頂点を結ぶ線分
- (3) 4 個の頂点を結んでできる四角形

解答

$$(1) \quad {}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20 \text{ (個)}$$

$$(2) \quad {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15 \text{ (本)}$$

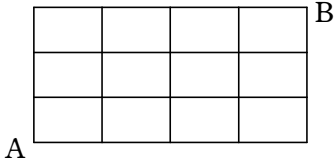
$$(3) \quad {}_6C_4 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 15 \text{ (個)}$$

${}_6C_4 = {}_6C_2$ であるから、 ${}_6C_2$ を計算してもよい

6 人の男子の中から 3 人、4 人の女子の中から 2 人を選んで 5 人の組を作るとき、何通りの組が作れるか。

解答 120 通り

右の図は、ある地域の道を直線で示したものである。交差点 A から交差点 B まで遠回りをしないで行く最短の道順は、何通りあるか。



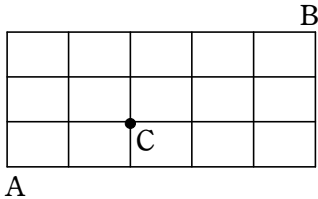
解答 35 通り

右の図のような道のある地域で、次のような最短の道順は何通りあるか。

(1) C から B まで行く。

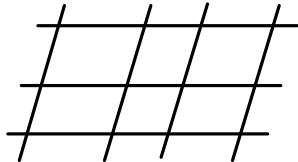
(2) A から C を通って B まで行く。

(3) A から C を通らずに B まで行く。



解答 (1) 10 通り (2) 30 通り (3) 26 通り

右の図のように、4 本の平行線とそれらに交わる 3 本の平行線がある。これらの平行線で作られる平行四辺形は、全部で何個あるか。



解答 18 個

(1) 5 個の数字 1, 1, 1, 2, 2 の全部を使ってできる 5 けたの数は何個あるか。

(2) 6 個の数字 1, 1, 1, 2, 2, 3 の全部を使ってできる 6 けたの数は何個あるか。

解答 (1) 10 個 (2) 60 個

組合せの記号 ${}_nC_r$

1 から n の異なる数字が書かれた n 個の玉から、異なる r 個の玉を取り出すとき、取り出し方は何通りあるかを考えてみましょう。



たいちさん

異なる n 個のものから異なる r 個を取り出してつくる組合せだから、 ${}_nC_r$ です。

では、① が書かれた玉が選ばれる場合と、選ばれない場合に分けて、考えるのでしょうか。



けいこさん

① の玉が選ばれる場合は、

① の玉を除いた $(n-1)$ 個の玉から、異なる $(r-1)$ 個の玉を取り出す組合せだから、 ${}_{n-1}C_{r-1}$ です。

① の玉が選ばれない場合は、

① の玉を除いた $(n-1)$ 個の玉から、異なる r 個の玉を取り出す組合せだから、 ${}_{n-1}C_r$ です。

これらの場合は重複しないから、組合せの総数は ${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$ です。

たいちさんとけいこさんの考えから、次のことが成り立ちます。

$${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$$