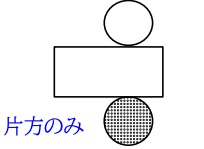
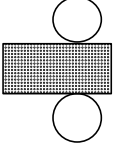
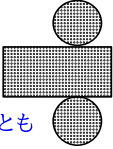
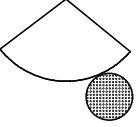
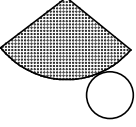
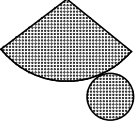


第2章「平面図形」4 立体の表面積と体積

＜表面積＞

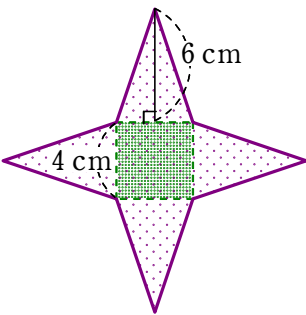
立体の，すべての面の面積の和を **表面積**，1つの底面の面積を **底面積**，側面全体の面積を **側面積** という。

いろいろな立体の表面積について考えよう。

	底面積	側面積	表面積
 円柱	 片方のみ		 両方とも
 円錐			

たとえば，右の展開図で表される正四角錐の

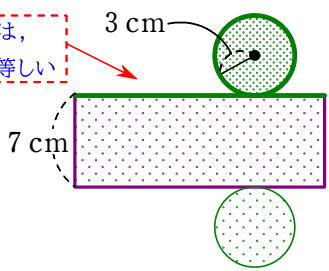
底面積は $4 \times 4 = 16 \text{ (cm}^2\text{)}$ 底面は正方形
側面積は $\left(\frac{1}{2} \times 4 \times 6\right) \times 4 = 48 \text{ (cm}^2\text{)}$ 4個分
表面積は $16 + 48 = 64 \text{ (cm}^2\text{)}$



である。

例6 底面の半径が3 cm，高さが7 cm の円柱の表面積

底面積は $\pi \times 3^2 = 9\pi \text{ (cm}^2\text{)}$
側面積は $7 \times (2\pi \times 3) = 42\pi \text{ (cm}^2\text{)}$
よって，表面積は $9\pi \times 2 + 42\pi = 60\pi \text{ (cm}^2\text{)}$
天井と地面の2個分



練習18 次のような立体の表面積を求めなさい。

- (1) 底面が1辺6 cm の正方形で，高さが4 cm の四角柱
- (2) 底面の半径が5 cm，高さが6 cm の円柱

解答

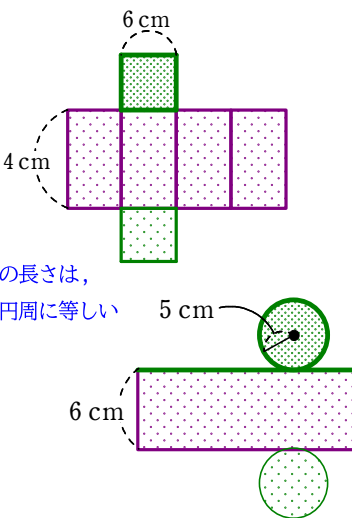
(1) 底面積は $6 \times 6 = 36$
側面積は $(6 \times 4) \times 4 = 96$
よって，表面積は

$36 \times 2 + 96 = 168 \text{ (cm}^2\text{)}$

(2) 底面積は $\pi \times 5^2 = 25\pi$
側面積は $6 \times (2\pi \times 5) = 60\pi$
よって，表面積は

$25\pi \times 2 + 60\pi = 110\pi \text{ (cm}^2\text{)}$
天井と地面の2個分

長方形の横の長さは，
底面の円の円周に等しい



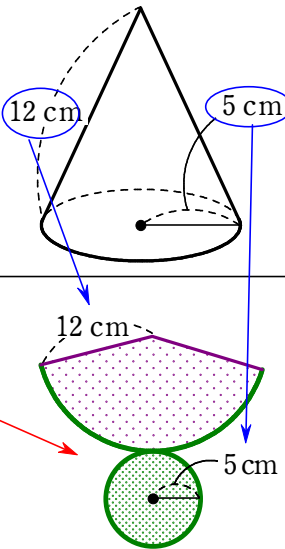
立体の表面積は，展開図で考えるとわかりやすいことが多い。

例題5 底面の半径が5 cm，母線の長さが12 cm である円錐の表面積を求めなさい。

【考え方】 以前学んだ次の関係を用いる。

$$(\text{扇形の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{弧の長さ}) \times (\text{半径})$$

$S = \frac{1}{2}lr$



解答 底面積は $\pi \times 5^2 = 25\pi$
側面の扇形の弧の長さは $2\pi \times 5 = 10\pi$
よって，側面積は $\frac{1}{2} \times 10\pi \times 12 = 60\pi$
したがって，表面積は $25\pi + 60\pi = 85\pi$

側面の扇形の弧の長さは
底面の円周の長さに等しい

$S = \frac{1}{2}lr$

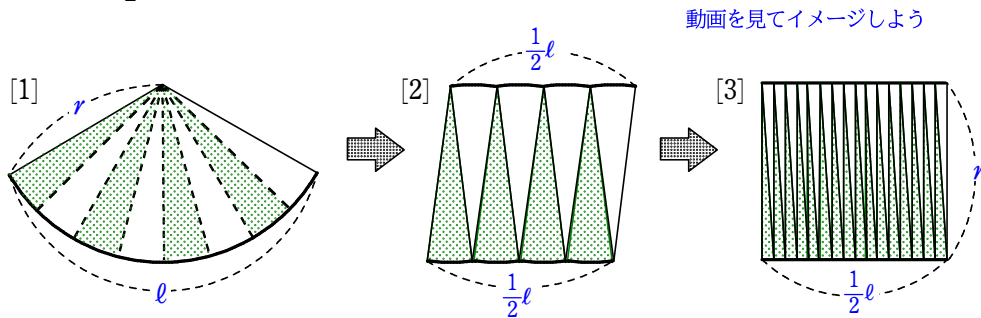
答 $85\pi \text{ cm}^2$

注意 例題において，解答途中の単位の記載は以後省略する。

【参考】半径が r 、弧の長さが ℓ の扇形を、下の図[1]のように合同な扇形に細かく分けて、練習19 次のような面積を求めなさい。

図[2]のように並べかえる。この分け方を細かくしていくと、図[3]の図形は、

縦が r 、横が $\frac{1}{2}\ell$ の長方形とみなすことができるようになる。

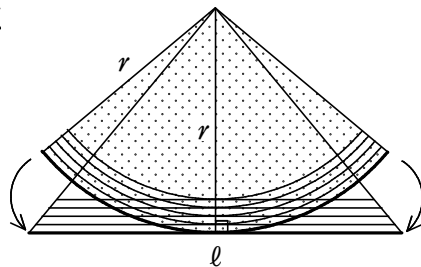


したがって、この扇形の面積 S は、次の式で求められる。

$$S = \frac{1}{2} \ell r \quad \dots\dots ① \quad \leftarrow S = \frac{1}{2} \times (\text{底辺}) \times (\text{高さ})$$

また、扇形は、右の図のように帯(おび)状に細かく分けることで、底辺が ℓ 、高さが r の三角形とみなすことができる。
この公式の覚え方

このことから、①が成り立つことがわかる。
ハンガーで実演するので、それでイメージしてください



例題5において、半径12 cmの円と半径5 cmの円の

周の長さの比は $2\pi \times 12 : 2\pi \times 5 = 12 : 5$

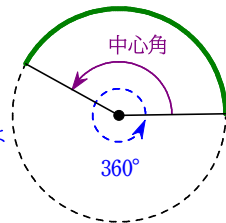
扇形の弧の長さと中心角の大きさは比例するから、

側面となる扇形の中心角の大きさは

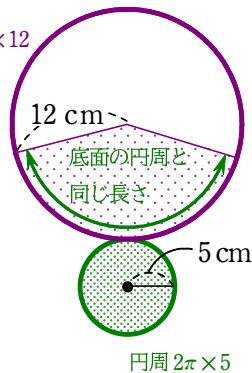
$$360^\circ \times \frac{5}{12} = 150^\circ$$

である。

円全体に対する扇形の占める割合は
 $\frac{(\text{底面の半径})}{(\text{母線の長さ})}$ である。

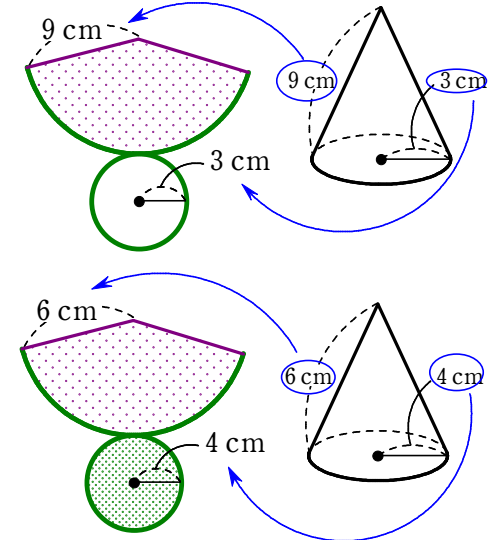


円周 $2\pi \times 12$



- (1) 底面の半径が3 cm、母線の長さが9 cmである円錐の側面積
- (2) 底面の半径が4 cm、母線の長さが6 cmである円錐の表面積

- (1) 側面の扇形の弧の長さは 円周 $2\pi r$
 $2\pi \times 3 = 6\pi$
 よって、側面積は 側面の扇形の弧の長さは 底面の円周の長さに等しい
 $\frac{1}{2} \times 6\pi \times 9 = 27\pi \text{ (cm}^2\text{)}$
 $S = \frac{1}{2} \ell r$
- (2) 底面積は $\pi \times 4^2 = 16\pi$ 円周 $2\pi r$
 側面の扇形の弧の長さは $2\pi \times 4 = 8\pi$
 よって、側面積は $\frac{1}{2} \times 8\pi \times 6 = 24\pi$
 したがって、表面積は $S = \frac{1}{2} \ell r$
 $16\pi + 24\pi = 40\pi \text{ (cm}^2\text{)}$



注意

円錐の側面積や表面積については、超簡単に求められる裏技があります。

「円錐 表面積 裏技」と検索すれば出てきます。

それらの裏技も数学的には間違っていないので、解答で使っても○になります。

ただし、使うためには次の2つのことを守ってください。

1. 授業で習った方法を理解して、授業の方法でも求められること
2. その裏技がなぜ成り立つのか自分で説明できること

この2つを守ることができなくて、ただ裏技だけを覚える人は、大体的場合すぐに裏技を忘れます。だんだんと数学ができなくなっていくでしょう。

<角柱と円柱の体積> 小学校の復習です

直方体の体積は次の式で求められる。

$$(\text{直方体の体積}) = (\text{縦}) \times (\text{横}) \times (\text{高さ})$$

この式は、直方体の体積を V 、底面積を S 、高さを h とすると、次のように表すことができる。

$$V = Sh \quad \leftarrow \text{体積} = (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$$

三角柱、四角柱といった角柱の体積も、直方体と同じように、底面積と高さの積として求めることができる。したがって、角柱の体積について、次のことが成り立つ。

角柱の体積

底面積が S 、高さが h である角柱の体積を V とすると

$$V = Sh \quad \leftarrow \text{体積} = (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$$

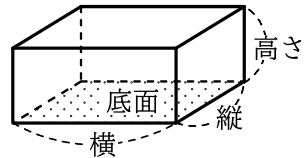
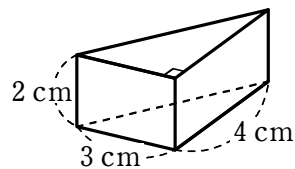
このことから、次のことがわかる。

底面積と高さがそれぞれ等しい角柱の体積は等しい。

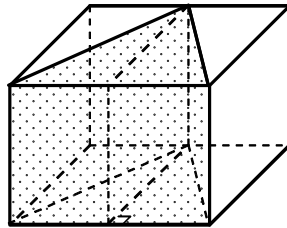
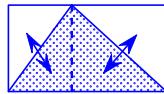
例7 右の図のような三角柱の体積は

$$\left(\frac{1}{2} \times 3 \times 4 \right) \times 2 = 12 \text{ (cm}^3\text{)}$$

底面は直角三角形 $\rightarrow \frac{1}{2} \times \text{縦} \times \text{横}$ $\leftarrow$ 立体の高さ



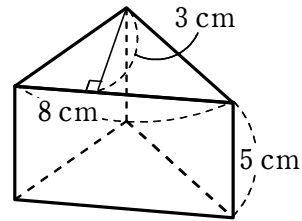
それぞれ面積同じより、塗られている三角形は長方形の半分



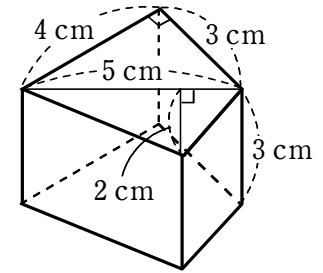
上の図の三角柱の底面積や体積は、それぞれ直方体の底面積や体積の半分である。

練習 20 次の角柱の体積を求めなさい。

(1)



(2)



解答

(1) 底面が、底辺 8 cm、高さ 3 cm の三角形で、高さが 5 cm の三角柱であるから、その体積は

$$\left(\frac{1}{2} \times 8 \times 3 \right) \times 5 = 60 \text{ (cm}^3\text{)}$$

底面の三角形の面積 $\leftarrow$ 立体の高さ

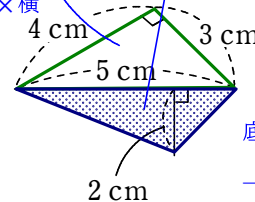
$$\rightarrow \frac{1}{2} \times (\text{三角形の底辺}) \times (\text{三角形の高さ})$$

(2) 底面を 2 つの三角形に分けて考えると、求める体積は

$$\left(\frac{1}{2} \times 3 \times 4 + \frac{1}{2} \times 5 \times 2 \right) \times 3 = (6 + 5) \times 3 = 11 \times 3 = 33 \text{ (cm}^3\text{)}$$

直角三角形

$$\rightarrow \frac{1}{2} \times \text{縦} \times \text{横}$$



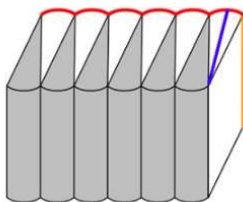
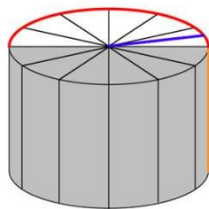
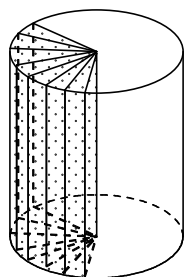
底面の三角形の面積

$$\rightarrow \frac{1}{2} \times (\text{三角形の底辺}) \times (\text{三角形の高さ})$$

円柱の体積も、角柱の体積と同じように、底面積と高さの積として求めることができる

練習 22

右の図のような、底面が半径 5 cm、中心角 120° の扇形で、高さが 9 cm である立体の体積を求めなさい。



<https://kyoiku.sho.jp/256007/>

円柱を細かく分けていくと、円柱の体積は三角柱(みたいなもの)の体積の和として考えられる。
三角柱を組み合わせると、四角柱(みたいなもの)になるので、(底面積)×(高さ)によって
体積を求められる。円柱の底面は円なので、底面積は(半径)×(半径)× π となる。

したがって、円柱の体積について、次のことが成り立つ。

円柱の体積

底面の半径が r 、高さが h である円柱の体積を V とすると

$$V = \pi r^2 h$$

← 体積 = (底面積 πr^2) × (高さ h)

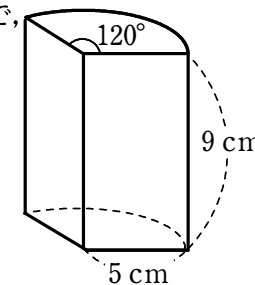
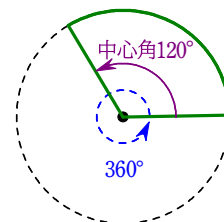
解答

$$\pi \times 5^2 \times \frac{120}{360} \times 9 = 75\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

底面積

$$\rightarrow \pi \times (\text{半径})^2 \times \frac{(\text{中心角})}{360}$$

立体の高さ



練習 21 底面の半径が 4 cm、高さが 6 cm である円柱の体積を求めなさい。

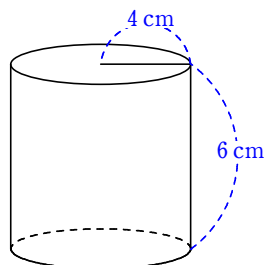
解答

$$\pi \times 4^2 \times 6 = 96\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

底面積

$$\rightarrow (\text{半径}) \times (\text{半径}) \times \pi$$

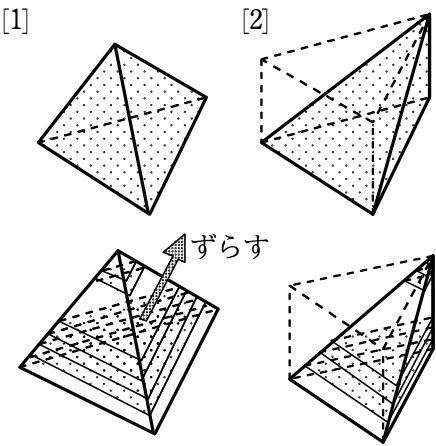
立体の高さ



角錐と円錐の体積

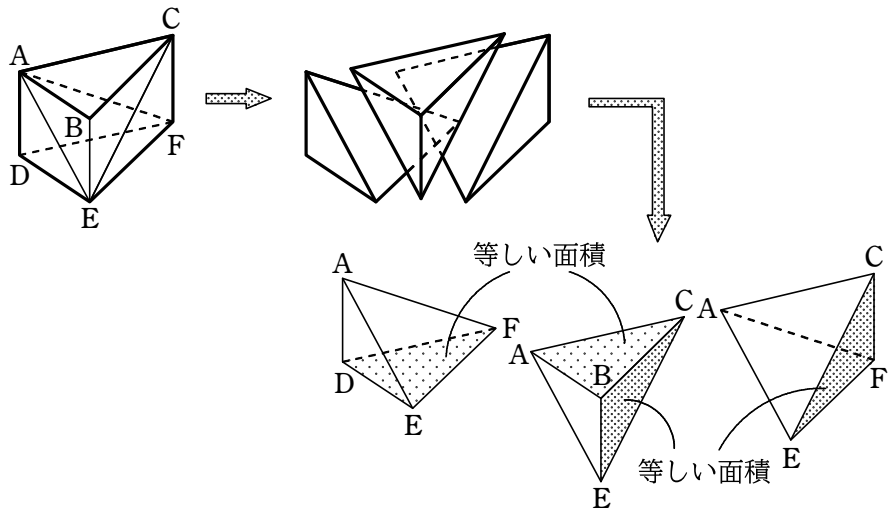
右の図 [1] は正三角錐で、図 [2] は、[1] の正三角錐と底面が合同で高さが等しい三角柱を平面で切ってできた三角錐である。

このとき、[1] の正三角錐を底面に平行な平面で細かく切って板状にし、それらをずらしていくと、[2] と同じ形の三角錐とみなすことができるようになるから、[1] と [2] の三角錐の体積は等しいと考えてよい。
一般に、角錐について、次のことがいえる。



底面積と高さがそれぞれ等しい角錐の体積は等しい。

三角柱は、下の図のように体積が等しい3つの三角錐に分けることができるから、三角錐の体積は、それぞれ三角柱の体積の $\frac{1}{3}$ である。



一般に、角錐の体積について、次のことが成り立つ。

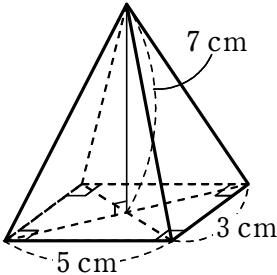
角錐の体積

底面積が S 、高さが h である角錐の体積を V とすると

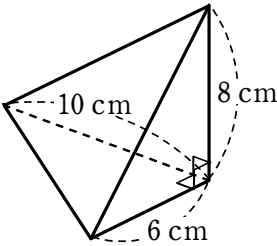
$$V = \frac{1}{3}Sh$$

練習 23 次の角錐の体積を求めなさい。

(1)



(2)

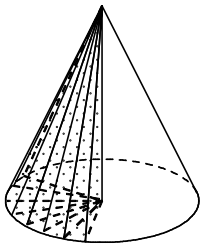


円錐の体積の求め方について考えよう。

円錐を、右の図のように、同じ形の立体に分けていく。

この分け方をどんどん細かくしていくと、分けられた各立体は三角錐とみなすことができるようになるから、円錐の体積も、角錐の体積と同様に求めることができる。

したがって、円錐の体積について、次のことが成り立つ。



円錐の体積

底面の半径が r 、高さが h である円錐の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

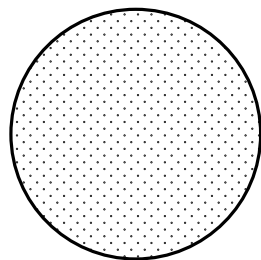
練習 24 底面の半径が 6 cm、高さが 5 cm である円錐の体積を求めなさい。

球の表面積と体積

空間において、ある1点から等しい距離にある点の集まりは球面を表す。

球面のことを単に球ともいう。

球の表面積と体積について、次のことが成り立つ。



球の表面積と体積

半径が r の球の表面積を S 、体積を V とすると

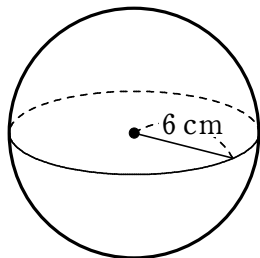
$$S = 4\pi r^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

上の公式を用いて、球の表面積と体積を求めよう。

例 8 半径が 6 cm の球の表面積を S 、体積を V とすると

$$S = 4\pi \times 6^2 = 144\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \times 6^3 = 288\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

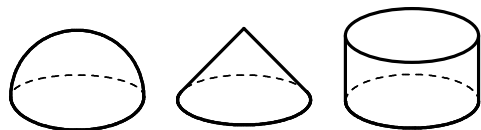


練習 25 半径が 2 cm である球の表面積と体積を求めなさい。

練習 26 右の図のように、

半径が 5 cm の半球、底面の半径と高さがともに

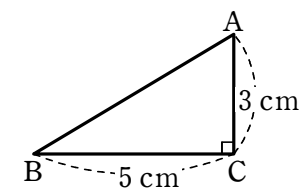
5 cm の円錐、底面の半径と高さがともに 5 cm の円柱がある。



- (1) 半球の体積は円錐の体積の何倍であるか答えなさい。また、円柱の体積は半球の体積の何倍であるか答えなさい。
- (2) 半球の底の部分を除いた表面の面積、円柱の側面積をそれぞれ求め、2つの面積の間にどのような関係があるか答えなさい。

いろいろな立体の体積

例題 6 右の図の直角三角形 ABC を、辺 AC を軸として1回転させてできる立体の体積を求めなさい。

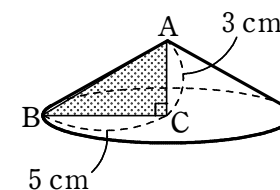


解答 できる立体は、右の図のような、底面の半径が 5 cm 、高さが 3 cm の円錐である。

したがって、求める体積は

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 3 = 25\pi$$

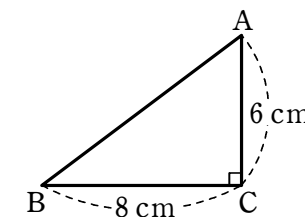
答 $25\pi\text{ cm}^3$



練習 27 右の図の直角三角形 ABC を、次のように

1回転させてできる立体の体積を求めなさい。

- (1) 辺 AC を軸として1回転させる。
- (2) 辺 BC を軸として1回転させる。



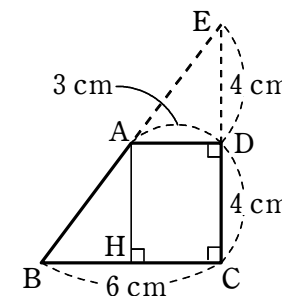
体積が直接求められない場合には、立体をいくつかの部分に分けたり、大きい立体を考えて、そこから余分な立体を除いたりして考えるとよい。

練習 28 右の図のような、 $AD \parallel BC$ で

$AD = 3\text{ cm}$, $BC = 6\text{ cm}$, $CD = 4\text{ cm}$

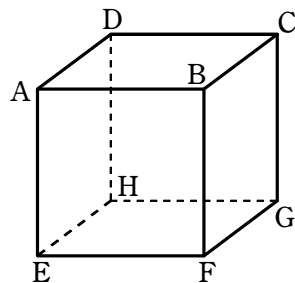
の台形 $ABCD$ を、次のように1回転させてできる立体の体積を求めなさい。

- (1) 辺 BC を軸として1回転させる。
- (2) 辺 CD を軸として1回転させる。



例題 7 右の図は、1 辺の長さが 6 cm の立方体である。この立方体の 4 点 A, C, F, H を頂点とする立体について、その体積を求めなさい。

【考え方】立方体から、余分な立体を除いて考える。



解答 できる立体は、右の図のような四面体で、立方体から、三角錐 BACF, EAFH, DACH, GCFH

を除いたものである。

このとき、4 つの三角錐の体積は等しく、それぞれの体積は

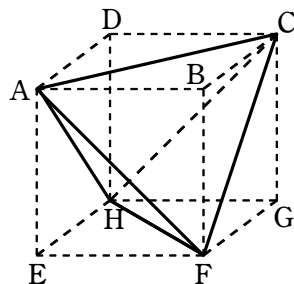
$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 6 \right) \times 6 = 36$$

また、立方体の体積は $6 \times 6 \times 6 = 216$

よって、求める立体の体積は

$$216 - 36 \times 4 = 72$$

答 72 cm^3

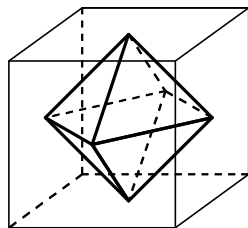


上の例題において、四面体 ACFH の各面は正三角形になるから、この四面体は正四面体である。

練習 29 立方体の各面の対角線の交点を頂点とし、隣り合った面どうしの頂点を結ぶことによって、立方体の中に多面体がつくられる。

(1) この多面体の名前を答えなさい。

(2) 立方体の 1 辺の長さが 6 cm であるとき、中につくられる多面体の体積を求めなさい。



次のような立体の表面積を求めなさい。

- (1) 底面が1辺6 cm の正方形で、高さが4 cm の四角柱
- (2) 底面の半径が5 cm、高さが6 cm の円柱

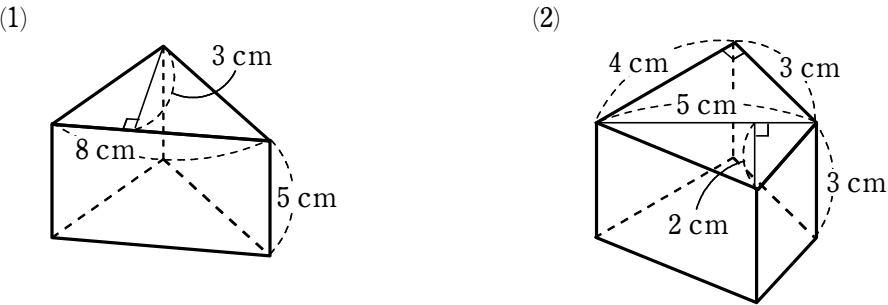
解答 (1) 168 cm^2 (2) $110\pi\text{ cm}^2$

次のような面積を求めなさい。

- (1) 底面の半径が3 cm、母線の長さが9 cm である円錐の側面積
- (2) 底面の半径が4 cm、母線の長さが6 cm である円錐の表面積

解答 (1) $27\pi\text{ cm}^2$ (2) $40\pi\text{ cm}^2$

次の角柱の体積を求めなさい。

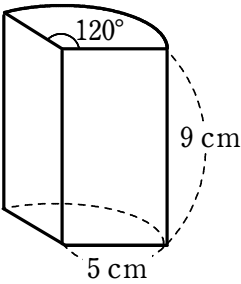


解答 (1) 60 cm^3 (2) 33 cm^3

底面の半径が4 cm、高さが6 cm である円柱の体積を求めなさい。

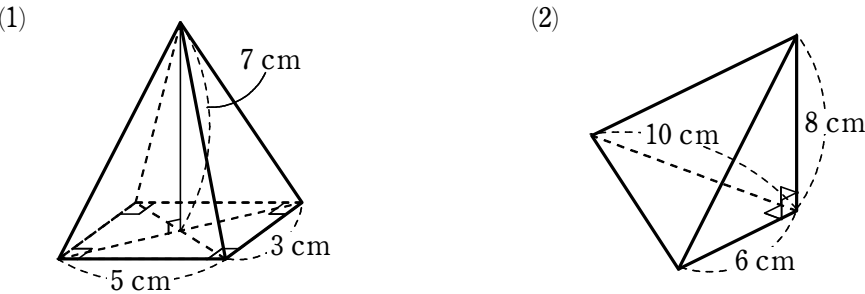
解答 $96\pi\text{ cm}^3$

右の図のような、底面が半径5 cm、中心角 120° の扇形で、高さが9 cm である立体の体積を求めなさい。



解答 $75\pi\text{ cm}^3$

次の角錐の体積を求めなさい。



解答 (1) 35 cm^3 (2) 80 cm^3

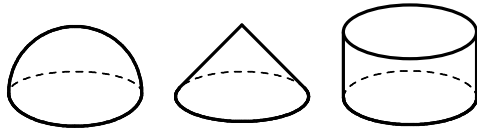
底面の半径が6 cm、高さが5 cm である円錐の体積を求めなさい。

解答 $60\pi\text{ cm}^3$

半径が2 cm である球の表面積と体積を求めなさい。

解答 表面積 $16\pi\text{ cm}^2$ 、体積 $\frac{32}{3}\pi\text{ cm}^3$

右の図のように、半径が5 cm の半球、
底面の半径と高さがともに 5 cm の円錐、
底面の半径と高さがともに 5 cm の円柱
がある。

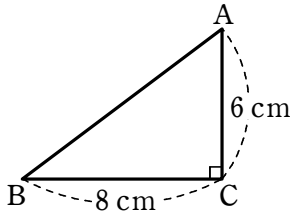


- (1) 半球の体積は円錐の体積の何倍であるか答えなさい。また、円柱の体積は半球の体積の何倍であるか答えなさい。
- (2) 半球の底の部分を除いた表面の面積、円柱の側面積をそれぞれ求め、2つの面積の間にどのような関係があるか答えなさい。

解答 (1) 半球の体積は円錐の体積の 2 倍、円柱の体積は半球の体積の $\frac{3}{2}$ 倍
(2) 2つの面積は等しい

右の図の直角三角形 ABC を、次のように 1 回転
させてできる立体の体積を求めなさい。

- (1) 辺 AC を軸として 1 回転させる。
- (2) 辺 BC を軸として 1 回転させる。

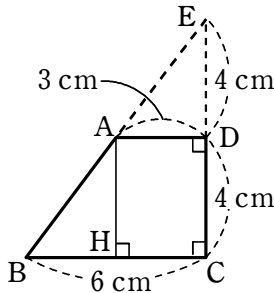


解答 (1) $128\pi \text{ cm}^3$ (2) $96\pi \text{ cm}^3$

右の図のような、AD//BC で

AD=3 cm, BC=6 cm, CD=4 cm
の台形 ABCD を、次のように 1 回転させてできる
立体の体積を求めなさい。

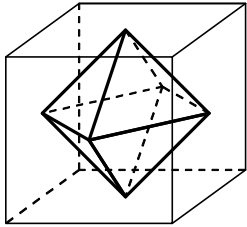
- (1) 辺 BC を軸として 1 回転させる。
- (2) 辺 CD を軸として 1 回転させる。



解答 (1) $64\pi \text{ cm}^3$ (2) $84\pi \text{ cm}^3$

立方体の各面の対角線の交点を頂点とし、隣り合った
面どうしの頂点を結ぶことによって、立方体の中に多
面体がつくられる。

- (1) この多面体の名前を答えなさい。
- (2) 立方体の 1 辺の長さが 6 cm であるとき、中につ
くられる多面体の体積を求めなさい。



解答 (1) 正八面体 (2) 36 cm^3