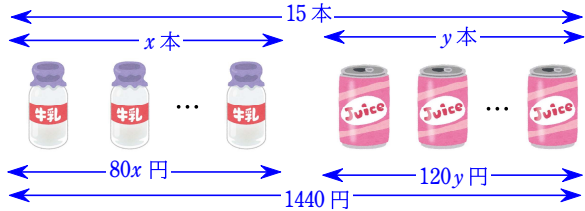


第3章「方程式」5 連立方程式の利用

＜連立方程式の利用＞

連立方程式を利用して、いろいろな問題を解いてみよう。

1本 80 円の牛乳と 1本 120 円の缶ジュースを、合わせて 15 本買くと、代金の合計は 1440 円であった。牛乳と缶ジュースをそれぞれ何本買ったか求めてみよう。



牛乳を x 本、缶ジュースを y 本買ったとする。

本数の合計について

$x + y = 15$ ①

代金の合計について

$80x + 120y = 1440$ ②

① と ② を連立方程式として解く

②の両辺を 40 で割って ← 割った方が式が簡単になる

$2x + 3y = 36$ ③

③ $2x + 3y = 36$

①×2
$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 36 \\ -) 2x + 2y = 30 \\ \hline y = 6 \end{array}$$

①に代入して $x + 6 = 15$ よって $x = 9$

以上より $x = 9, y = 6$

牛乳を 9 本、缶ジュースを 6 本買ったとすると、

これらは問題に適している。

文章問題の最後に書いてある

書く

[1] 求める数量を文字で表す



[2] 等しい数量の関係を見つけて、2つの方程式をつくる



[3] 連立方程式を解く



[4] 解が実際の問題に適しているか確かめる

書く

練習 28 50 円硬貨と 100 円硬貨が合わせて 18 枚あり、金額の合計は 1450 円である。50 円硬貨と 100 円硬貨はそれぞれ何枚あるか答えなさい。

解答

50 円硬貨の枚数を x 枚、100 円硬貨の枚数を y 枚とする。

枚数の合計について $x + y = 18$ ①

金額の合計について $50x + 100y = 1450$ ②

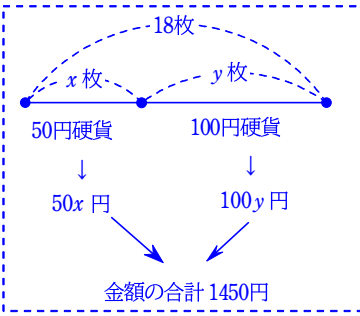
②÷50 両辺50で割る $x + 2y = 29$ ③

③ $x + 2y = 29$
① $-) x + y = 18$
 $\hline y = 11$

$y = 11$ を ① に代入して解くと $x + 11 = 18$ より $x = 7$

これらは問題に適している。

よって、50 円硬貨は 7 枚、100 円硬貨は 11 枚 あり。



参考

この問題は y を登場させなくても 1 次方程式で解けます。

50 円硬貨を x 枚とすると、

100 円硬貨は $(18 - x)$ 枚となる。

金額の合計について、方程式は

$50x + 100(18 - x) = 1450$

方程式を解くと

$x + 2(18 - x) = 29$

$x + 36 - 2x = 29$

$x - 2x = 29 - 36$

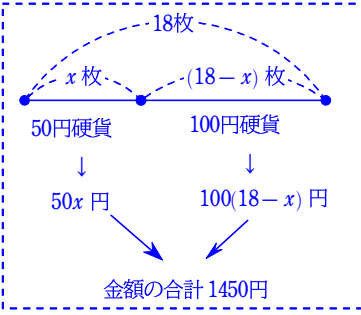
$-x = -7$

両辺に (-1) を掛ける

$x = 7$

これは問題に適している。

よって、50 円硬貨は 7 枚、100 円硬貨は $18 - 7 = 11$ より 11 枚



「連立方程式を用いた解法」と「1 次方程式を用いた解法」
あなたはどちらが好きですか？

練習 29 1 個 180 円のなしと 1 個 130 円のりんごをそれぞれ何個か買うと、
 代金の合計は 2590 円であった。買ったりんごの個数は、なしの個数の 2 倍より 3 個多い。

- (1) なしを x 個、りんごを y 個買ったとして、連立方程式をつくりなさい。
 (2) なしとりんごをそれぞれ何個買ったか求めなさい。

解答

(1) 代金の合計について $180x + 130y = 2590$
 個数について $y = 2x + 3$

よって、連立方程式は $\begin{cases} 180x + 130y = 2590 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$

(2) (1) より、 $\begin{cases} 180x + 130y = 2590 & \dots\dots ① \\ y = 2x + 3 & \dots\dots ② \end{cases}$

① $\div 10$ $18x + 13y = 259 \dots\dots ③$
 ② を ③ に代入すると

分配法則 $\begin{cases} 18x + 13(2x + 3) = 259 \\ 18x + 26x + 39 = 259 \end{cases}$
 $18x + 26x = 259 - 39$
 $44x = 220$
 $x = 5$

$x = 5$ を ② に代入して解くと $y = 2 \times 5 + 3 = 13$
 これらは問題に適している。

よって、なしは 5 個、りんごは 13 個買った。

参考 (代入法が苦手な人)

$\begin{cases} 180x + 130y = 2590 & \dots\dots ① \\ y = 2x + 3 & \dots\dots ② \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 18x + 13y = 259 & \dots\dots ③ \\ -2x + y = 3 & \dots\dots ④ \end{cases}$
 ③ $18x + 13y = 259$
 ④ $\times 9$ $-18x + 9y = 27$
 $\begin{matrix} 18x + 13y = 259 \\ -18x + 9y = 27 \\ \hline 22y = 286 \end{matrix}$
 $22y = 286$
 $y = 13$

例題 14 2 種類の品物 A, B がある。A 3 個と B 1 個の重さは 880 g,
 A 1 個と B 2 個の重さは 560 g である。A, B それぞれの 1 個の重さを求めなさい。

注意 この問題で $\begin{cases} 3A + B = 880 \\ A + 2B = 560 \end{cases}$ という式を作る人がいます。

問題文の文字とは別で方程式を作った方がいいです。

解答 A 1 個の重さを x g, B 1 個の重さを y g とすると

$\begin{cases} 3x + y = 880 & \dots\dots ① \\ x + 2y = 560 & \dots\dots ② \end{cases}$

① $\times 2$ $6x + 2y = 1760$
 ② $-) x + 2y = 560$

両辺 5 で割る $5x = 1200$
 $1200 \div 5 = 240$
 $x = 240$

$x = 240$ を ① に代入すると $3 \times 240 + y = 880$
 $720 + y = 880$
 $y = 160$

これらは問題に適している。

答 A 1 個 240 g, B 1 個 160 g

この問題だと 1 次方程式で考えるのは大変です。
 連立方程式向けの問題ですね。

練習 30 2種類のケーキ A, B がある。A 3 個と B 2 個の代金の合計は 1000 円、
A 4 個と B 6 個の代金の合計は 2100 円である。A, B それぞれの 1 個の値段を
求めなさい。

解答

ケーキ A 1 個の値段を x 円、ケーキ B 1 個の値段を y 円とすると

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1000 & \cdots \cdots ① \\ 4x + 6y = 2100 & \cdots \cdots ② \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} ① \times 3 & & 9x + 6y = 3000 \\ ② & -) & 4x + 6y = 2100 \\ \hline & & 5x = 900 \end{array}$$

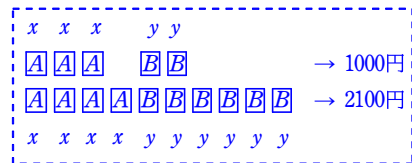
$$\begin{array}{l} \text{両辺 5 で割る} \nearrow \\ 900 \div 5 = 180 \\ x = 180 \end{array}$$

$$x = 180 \text{ を } ① \text{ に代入して解くと } 3 \times 180 + 2y = 1000$$

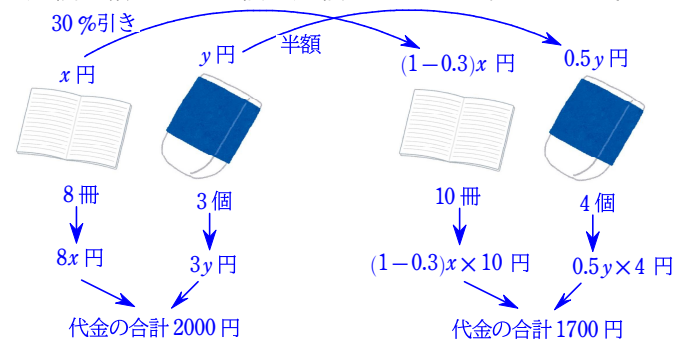
$$\begin{array}{l} \text{両辺 2 で割る} \nearrow \\ 540 + 2y = 1000 \\ 460 \div 2 = 230 \\ 2y = 460 \text{ より } y = 230 \end{array}$$

これらは問題に適している。

よって、A 1 個の値段は 180 円、B 1 個の値段は 230 円



練習 31 ノート 8 冊と、消しゴム 3 個をそれぞれ定価どおりで買うと、代金の合計は
2000 円であるが、ノートが定価の 30 % 引き、消しゴムが定価の半額であるときに、
ノートを 10 冊、消しゴムを 4 個買うと、代金の合計は 1700 円である。
ノート 1 冊の定価と消しゴム 1 個の定価をそれぞれ求めなさい。



解答

ノート 1 冊の定価を x 円、消しゴム 1 個の定価を y 円とすると

$$\begin{cases} 8x + 3y = 2000 & \cdots \cdots ① \\ (1 - 0.3)x \times 10 + 0.5y \times 4 = 1700 & \cdots \cdots ② \end{cases}$$

② を整理すると

$$\begin{array}{l} 0.7x \times 10 + 0.5y \times 4 = 1700 \\ 7x + 2y = 1700 \quad \cdots \cdots ③ \end{array}$$

連立方程式を解くと

$$\begin{array}{rcl} ① \times 2 & & 16x + 6y = 4000 \\ ③ \times 3 & -) & 21x + 6y = 5100 \\ \hline & & -5x = -1100 \end{array}$$

$$\text{両辺 } (-5) \text{ で割る} \nearrow x = 220$$

$$(-1100) \div (-5) = +220$$

$$x = 220 \text{ を } ① \text{ に代入して解くと } 8 \times 220 + 3y = 2000$$

$$\begin{array}{l} \text{両辺 3 で割る} \nearrow \\ 1760 + 3y = 2000 \\ 240 \div 3 = 80 \\ 3y = 240 \text{ より } y = 80 \end{array}$$

これらは問題に適している。

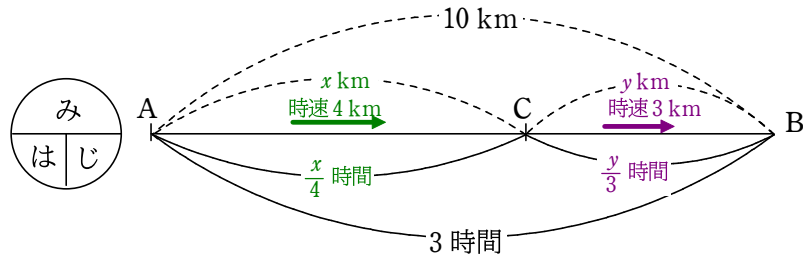
よって、ノート 1 冊の定価は 220 円、

消しゴム 1 個の定価は 80 円

y を消す	
$8x + 3y = 2000$	$\xrightarrow{2\text{倍}} 16x + 6y = 4000$
$7x + 2y = 1700$	$\xrightarrow{3\text{倍}} 21x + 6y = 5100$

例題 15 A 地点から 10 km 離れた B 地点まで行くのに、A から途中の C 地点までは時速 4 km で、C から B までは時速 3 km で歩いたところ、3 時間かかった。A、C 間の道のりと C、B 間の道のりをそれぞれ求めなさい。

【考え方】道のりの関係と時間の関係から、方程式を 2 つ作る。



解答 A、C 間の道のりを x km、C、B 間の道のりを y km とすると

$$\begin{cases} x + y = 10 & \dots\dots ① \text{ 道のりについて式を作る} \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 3 & \dots\dots ② \text{ 時間について式を作る} \end{cases}$$

分母の最小公倍数

$$② \times 12 \quad 3x + 4y = 36 \quad \dots\dots ③$$

$$① \times 4 \quad 4x + 4y = 40$$

$$\begin{array}{r} ③ \\ -) ① \times 4 \\ \hline x = 4 \end{array}$$

$x = 4$ を ① に代入して解くと $4 + y = 10$ より $y = 6$

これらは問題に適している。 答 A、C 間 4 km、C、B 間 6 km

x, y は 0 より大きく 10 より小さい数

別解

A、C 間にかかった時間を x 時間、

C、B 間にかかった時間を y 時間 とすると

$$\begin{cases} x + y = 3 & \dots\dots ① \text{ 時間について式を作る} \\ 4x + 3y = 10 & \dots\dots ② \text{ 道のりについて式を作る} \end{cases}$$

$$② \quad 4x + 3y = 10$$

$$\begin{array}{r} ① \times 3 \\ -) ② \\ \hline x = 1 \end{array}$$

$x = 1$ を ① に代入して解くと $1 + y = 3$ より $y = 2$

ゆえに A、C 間にかかった時間が 1 時間より道のりは $4 \times 1 = 4$ km

C、B 間にかかった時間が 2 時間より道のりは $3 \times 2 = 6$ km

これらは問題に適している。

答 A、C 間 4 km、C、B 間 6 km

練習 32 A さんは 9 時に家を出発して、3 km 離れた公園に向かった。はじめは時速 8 km で走り、途中から時速 4 km で歩いたところ、公園には 9 時 30 分に到着した。走った道のりと歩いた道のりをそれぞれ求めなさい。

解答

走った道のりを x km、
歩いた道のりを y km とすると

$$\begin{cases} x + y = 3 & \text{道のり} \\ \frac{x}{8} + \frac{y}{4} = \frac{30}{60} & \text{時間} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 3 & \dots\dots ① \\ \frac{x}{8} + \frac{y}{4} = \frac{1}{2} & \dots\dots ② \end{cases}$$

すなわち
分母の最小公倍数

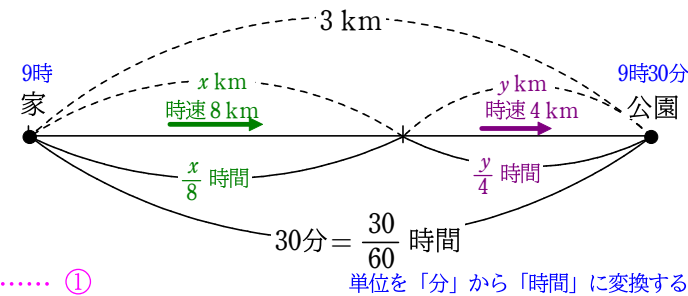
$$② \times 8 \quad x + 2y = 4$$

$$\begin{array}{r} ① \\ -) ② \times 8 \\ \hline y = 1 \end{array}$$

$y = 1$ を ① に代入して解くと $x + 1 = 3$ より $x = 2$

これらは問題に適している。

よって、走った道のりは 2 km、歩いた道のりは 1 km



別解

走った時間を x 時間、

歩いた時間を y 時間 とすると

$$\begin{cases} x + y = \frac{30}{60} & \dots\dots ① \text{ 時間} \\ 8x + 4y = 3 & \dots\dots ② \text{ 道のり} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} ② \\ -) ① \times 3 \\ \hline 8x + 4y = 3 \\ -) 4x + 4y = 1 \\ \hline 4x = 2 \end{array}$$

両辺 4 で割る
 $1 \div 4 = \frac{1}{4}$

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

よって $x = \frac{1}{4}$ を ① に代入して解くと $\frac{1}{4} + y = \frac{1}{2}$ より $y = \frac{1}{4}$

ゆえに走った時間が $\frac{1}{4}$ 時間より道のりは $8 \times \frac{1}{4} = 2$ km

歩いた時間が $\frac{1}{4}$ 時間より道のりは $4 \times \frac{1}{4} = 1$ km

これらは問題に適している。走った道のりは 2 km、歩いた道のりは 1 km

例題 16

10 % の食塩水と 6 % の食塩水を混ぜ合わせて、7 % の食塩水を 600 g 作りたい。食塩水は、それぞれ何 g ずつ混ぜ合わせればよいか答えなさい。

練習 33

12 % の食塩水と 9 % の食塩水を混ぜ合わせて、10 % の食塩水を 300 g 作りたい。食塩水は、それぞれ何 g ずつ混ぜ合わせればよいか答えなさい。

【考え方】

10 % の食塩水を x g、6 % の食塩水を y g 混ぜるとすると、食塩水の重さの関係と食塩の重さの関係は、次のようになる。

	10 % の食塩水	6 % の食塩水	7 % の食塩水
食塩水の重さ (g)	x	y	600
食塩の重さ (g)	$x \times \frac{10}{100}$	$y \times \frac{6}{100}$	$600 \times \frac{7}{100}$

塩ボールの個数=全体×濃度

水と塩合わせて x 個

10%

水水水水水水

塩塩塩塩塩塩

塩 $x \times \frac{10}{100}$ 個
(塩 $x \times 0.10$ 個)

水と塩合わせて y 個

6%

水水水水水水

塩塩塩塩塩塩

塩 $y \times \frac{6}{100}$ 個
(塩 $y \times 0.06$ 個)

水と塩合わせて 600 個

7%

水水水水水水水水水水

塩塩塩塩塩塩塩塩塩塩

塩 $600 \times \frac{7}{100}$ 個
(塩 600×0.07 個)

食塩が氷に溶けていることを想像してはダメです。「食塩水」ではなく、「塩ボールと水ボール」と考える。

【解答】

10 % の食塩水を x g、6 % の食塩水を y g 混ぜるとすると

$$\begin{cases} x + y = 600 & \dots\dots ① \text{ 全体のボールの個数で式を作る} \\ x \times \frac{10}{100} + y \times \frac{6}{100} = 600 \times \frac{7}{100} & \dots\dots ② \text{ 塩ボールの個数で式を作る} \end{cases}$$

$$x \times 0.10 + y \times 0.06 = 600 \times 0.07 \text{ でもよい}$$

② の両辺に100をかけると

$$x \times 10 + y \times 6 = 600 \times 7$$

さらに両辺 2 で割ると

$$x \times 5 + y \times 3 = 300 \times 7 \quad \text{よって} \quad 5x + 3y = 2100 \quad \dots\dots ③$$

③

① × 3

$$\begin{array}{r} 5x + 3y = 2100 \\ -) 3x + 3y = 1800 \\ \hline 2x = 300 \\ x = 150 \end{array}$$

両辺 2 で割る $300 \div 2 = 150$

$x = 150$ を ① に代入して解くと $150 + y = 600$ よって $y = 450$

これらは問題に適している。

図

10 % の食塩水 150 g、6 % の食塩水 450 g

【解答】

水と塩合わせて x 個

12%

水水水水水水

塩塩塩塩塩塩

塩 $x \times \frac{12}{100}$ 個
(塩 $x \times 0.12$ 個)

水と塩合わせて y 個

9%

水水水水水水

塩塩塩塩塩塩

塩 $y \times \frac{9}{100}$ 個
(塩 $y \times 0.09$ 個)

水と塩合わせて 300 個

10%

水水水水水水水水水水

塩塩塩塩塩塩塩塩塩塩

塩 $300 \times \frac{10}{100}$ 個
(塩 300×0.10 個)

12 % の食塩水を x g、9 % の食塩水を y g 混ぜるとすると

$$\begin{cases} x + y = 300 & \dots\dots ① \text{ 全体のボールの個数で式を作る} \\ x \times \frac{12}{100} + y \times \frac{9}{100} = 300 \times \frac{10}{100} & \dots\dots ② \text{ 塩ボールの個数で式を作る} \end{cases}$$

$$x \times 0.12 + y \times 0.09 = 300 \times 0.10 \text{ でもよい}$$

② の両辺に100をかけると

$$x \times 12 + y \times 9 = 300 \times 10$$

さらに両辺3で割ると

$$x \times 4 + y \times 3 = 100 \times 10 \quad \text{よって} \quad 4x + 3y = 1000 \quad \dots\dots ③$$

③

① × 3

$$\begin{array}{r} 4x + 3y = 1000 \\ -) 3x + 3y = 900 \\ \hline x = 100 \end{array}$$

$x = 100$ を ① に代入して解くと $100 + y = 300$ よって $y = 200$

これらは問題に適している。

よって、12 % の食塩水は 100 g、9 % の食塩水は 200 g

【参考】

異なる濃度の飲み物を混ぜて、新しい濃度の飲み物を自分で作れるなんてすごいことだと思います。

例題 17 ある中学校の昨年の1年生の生徒数は265人であった。今年は、昨年に比べると、男子は8%増加し、女子は5%減少して、全体では3人増加した。
 昨年の男子、女子の生徒数はそれぞれ何人が答えなさい。

研究(この問題は超有名ですが難しいです。少し数字を簡単にした具体例を考えましょう)

	男子	女子	合計
昨年の生徒数(人)	60	40	100
今年の生徒数(人)	66	38	
昨年から今年の変動	%(増加・減少)	%(増加・減少)	人(増加・減少)

空欄を埋めてみましょう。また,(増加・減少)は適する方に○をつけましょう。

(この例から分かることは?)

(昨年の男子の人数)+(昨年の女子の人数)=(昨年の合計の人数)
 (今年の男子の人数)+(今年の女子の人数)=(今年の合計の人数)

$60 \times \frac{110}{100} = 66$, $60 \times (1 + 0.10) = 66$

$40 \times \frac{95}{100} = 38$, $40 \times (1 - 0.05) = 38$

(昨年の男子の人数) $\times$ (10%増加) = (今年の男子の人数)
 (昨年の女子の人数) $\times$ (5%減少) = (今年の女子の人数)

小学校のときのお金の問題で、
 「10%の利益を見込んで $\rightarrow \times (1 + 0.10)$ 」
 「5%引きで売った」 $\rightarrow \times (1 - 0.05)$ 」 などありましたね。
【考え方】 昨年の男子の生徒数を x 人、女子の生徒数を y 人とする、
 昨年の生徒数の関係と今年の生徒数の関係は、次のようになる。

	男子	女子	合計
昨年の生徒数(人)	x	y	265
今年の生徒数(人)	$x \times \frac{108}{100}$	$y \times \frac{95}{100}$	268

8%増加 $\rightarrow$ 「 $\times \frac{108}{100}$ 」や「 $\times (1 + 0.08)$ 」 5%減少 $\rightarrow$ 「 $\times \frac{95}{100}$ 」や「 $\times (1 - 0.05)$ 」

解答 昨年の男子の生徒数を x 人、女子の生徒数を y 人とする

$$\begin{cases} x + y = 265 & \cdots \cdots \text{①} \text{ 昨年: (男子)+(女子)=(全体)} \\ \frac{108}{100}x + \frac{95}{100}y = 268 & \cdots \cdots \text{②} \text{ 今年: (男子)+(女子)=(全体)} \end{cases}$$

$$\text{②} \times 100 \qquad 108x + 95y = 26800 \qquad \cdots \cdots \text{③}$$

$$\begin{array}{r} 108x + 108y = 28620 \\ -) 108x + 95y = 26800 \\ \hline 13y = 1820 \\ y = 140 \end{array}$$

$$1820 \div 13 = 140$$

$$y = 140 \text{ を ① に代入して解くと } x + 140 = 265 \quad \text{よって} \quad x = 125$$

これらは問題に適している。

答 昨年の男子は125人、女子は140人

研究(この中学校の今年的人数は?)

男子: $x \times \frac{108}{100} = 125 \times \frac{108}{100} = 125 \times \frac{27}{25} = 5 \times 27 = 135$ (人)

女子: $y \times \frac{95}{100} = 140 \times \frac{95}{100} = 140 \times \frac{19}{20} = 7 \times 19 = 133$ (人)

別解 (こっちの方が考え方は難しいですが,計算量は抑えられます)

	男子	女子	合計
昨年の生徒数(人)	x	y	265
昨年から今年の変動(人)	$+x \times \frac{8}{100}$	$-y \times \frac{5}{100}$	+3

「8%増加」 + 「5%減少」 = 「昨年よりも3人増加」

昨年の男子の生徒数を x 人、女子の生徒数を y 人とする

$$\begin{cases} x + y = 265 & \cdots \cdots \text{①} \text{ 昨年: (男子)+(女子)=(全体)} \\ + \frac{8}{100}x - \frac{5}{100}y = +3 & \cdots \cdots \text{②} \text{ (男子の増加)+(女子の減少)=(全体で3人減少)} \end{cases}$$

$$\text{②} \times 100 \qquad 8x - 5y = 300 \qquad \cdots \cdots \text{③}$$

$$\begin{array}{r} 5x + 5y = 1325 \\ +) 8x - 5y = 300 \\ \hline 13x = 1625 \\ x = 125 \end{array}$$

$$1625 \div 13 = 125$$

$$x = 125 \text{ を ① に代入して解くと } 125 + y = 265 \quad \text{よって} \quad y = 140$$

これらは問題に適している。

答 昨年の男子は125人、女子は140人

(参考)(別解と本解の裏話)

$$\begin{array}{r} \frac{108}{100}x + \frac{95}{100}y = 268 \\ -) \qquad x + \qquad y = 265 \\ \hline \frac{8}{100}x - \frac{5}{100}y = 3 \end{array}$$

練習 34 あるクラブの昨年の部員数は 110 人であった。今年は、昨年に比べると、男子は 15 % 減少し、女子は 10 % 増加して、全体では 4 人減少した。

- 昨年の男子と女子の部員数をそれぞれ求めなさい。
- 今年の男子と女子の部員数をそれぞれ求めなさい。

解答

	男子	女子	合計
昨年の部員数 (人)	x	y	110
今年の部員数 (人)	$x \times \frac{85}{100}$	$y \times \frac{110}{100}$	106

昨年より4人減った
110-4=106

15%減少→「 $\times \frac{85}{100}$ 」や「 $\times (1-0.15)$ 」 10%増加→「 $\times \frac{110}{100}$ 」や「 $\times (1+0.10)$ 」

(1) 昨年の男子の部員数を x 人、女子の部員数を y 人とする

$$\begin{cases} x + y = 110 & \cdots \cdots \text{①} \\ \frac{85}{100}x + \frac{110}{100}y = 106 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

$$\text{②} \times 100 \quad 85x + 110y = 10600 \quad \cdots \cdots \text{③}$$

$$\text{①} \times 110 \quad 110x + 110y = 12100$$

$$\text{③} \quad \begin{array}{r} -) \quad 85x + 110y = 10600 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{両辺 25 で割る} \rightarrow 25x \quad = 1500$$

$$1500 \div 25 = 60 \quad x = 60$$

$$x = 60 \text{ を ① に代入すると } 60 + y = 110 \quad \text{よって } y = 50$$

これらは問題に適している。 よって、昨年の男子は 60 人、女子は 50 人

$$(2) \text{ 今年の男子の部員数は } x \times \frac{85}{100} = 60 \times \frac{85}{100} = 60 \times \frac{17}{20} = 51$$

$$\text{女子の部員数は } y \times \frac{110}{100} = 50 \times \frac{110}{100} = 50 \times \frac{11}{10} = 55$$

よって、今年の男子は 51 人、女子は 55 人

別解

	男子	女子	合計
昨年の部員数 (人)	x	y	110
昨年から今年の増減 (人)	$-x \times \frac{15}{100}$	$+y \times \frac{10}{100}$	-4

「15%減少」 + 「10%増加」 = 「昨年よりも4人減少」

昨年の男子の部員数を x 人、女子の部員数を y 人とする

$$\begin{cases} x + y = 110 & \cdots \cdots \text{①} & \text{昨年：(男子)+(女子)=(全体)} \\ -\frac{15}{100}x + \frac{10}{100}y = -4 & \cdots \cdots \text{②} & \text{(男子の増加)+(女子の減少)=(全体で3人減少)} \end{cases}$$

$$\text{②} \times 100 \quad -15x + 10y = -400$$

$$\text{さらに両辺 5 で割って } -3x + 2y = -80 \quad \cdots \cdots \text{③}$$

$$\begin{array}{r} 3x + 3y = 330 \\ +) -3x + 2y = -80 \\ \hline \text{両辺 5 で割る} \rightarrow 5y = 250 \\ 250 \div 5 = 50 \quad y = 50 \end{array}$$

$$y = 50 \text{ を ① に代入して解くと } x + 50 = 110 \quad \text{よって } x = 60$$

これらは問題に適している。

答 昨年の男子は 60 人、女子は 50 人

(参考)別解と本解の裏話

$$\begin{array}{r} \frac{85}{100}x + \frac{110}{100}y = 106 \\ -) \quad x + y = 110 \\ \hline -\frac{15}{100}x + \frac{10}{100}y = -4 \end{array}$$

(探究)

どの数量を文字で表す？



先生

98 ページの例題 17 の問題について、「今年の男子と女子の生徒数」を求めたい場合、どのように考えればよいのでしょうか？

求めたいものは「今年の生徒数」だから、今年の男子の生徒数を x 人、女子の生徒数を y 人として式をつくれればいいと思います。



けいこさん



たいちさん

昨年の男子の生徒数と女子の生徒数は、どのように文字で表せばいいですか？

今年の男子の生徒数が、昨年に比べると 8% 増加したということは、今年の男子の生徒数は、昨年の $\frac{108}{100}$ 倍ということです。つまり昨年の男子の生徒数は、今年の $\frac{100}{108}$ 倍だから、 $\frac{100}{108}x$ と表すことができます。



(今年)=(去年) $\times \frac{108}{100}$
両辺100倍
(今年) $\times 100 =$ (去年) $\times 108$
両辺108で割る
(今年) $\times \frac{100}{108} =$ (去年)



同じように考えて、昨年の女子の生徒数を y を使って表すことができますね。

そのように考えてつくった連立方程式を解いてみて、どう思いましたか？ 大変なことになりましたよね もっとよい方法はないでしょうか？



(解答) (いきなり(2)を解きます)

	男子	女子	合計
今年の部員数(人)	x	y	106
昨年の部員数(人)	$x \times \frac{100}{85}$	$y \times \frac{100}{110}$	110

(2) 今年の男子の部員数を x 人、女子の部員数を y 人とする

$$\begin{cases} x + y = 106 & \cdots \cdots ① \\ \frac{100}{85}x + \frac{100}{110}y = 110 & \cdots \cdots ② \end{cases}$$

②より $\frac{20}{17}x + \frac{10}{11}y = 110$

両辺10で割って $\frac{2}{17}x + \frac{1}{11}y = 11$

$17 \times 11 = 187$ より両辺187倍して $22x + 17y = 2057 \cdots \cdots ③$

$$\begin{array}{r} ① \times 22 \quad 22x + 22y = 2332 \\ ③ \quad \quad -) 22x + 17y = 2057 \\ \hline \text{両辺5で割る} \quad \quad \quad 5y = 275 \\ 275 \div 5 = 55 \quad \quad \quad y = 55 \end{array}$$

$y = 55$ を ① に代入すると $x + 55 = 106$ よって $x = 51$

これらは問題に適している。 よって、今年の男子は 51 人、女子は 55 人

(参考) 見てわかるように、なかなか大変です。このような問題では今年の男子と女子を x, y とすると計算が大変なことになります。

「昨年の男子と女子を x, y とする」

→ x と y を求める

→ 今年の男子と女子を求めた x と y から計算する

という手順で計算した方が無難です。

連立3元1次方程式を用いて、文章題を解いてみよう。

例題 18 3種類の切手 A, B, C がある。

A を2枚, B を3枚, C を1枚買うと 647 円

A を3枚, B を2枚, C を2枚買うと 958 円

A を1枚, B を5枚, C を3枚買うと 1269 円

であるという。A, B, C の1枚の値段をそれぞれ求めなさい。

解答 A, B, C の1枚の値段をそれぞれ x 円, y 円, z 円とすると

$$\begin{cases} 2x+3y+z=647 & \cdots \cdots ① \\ 3x+2y+2z=958 & \cdots \cdots ② \\ x+5y+3z=1269 & \cdots \cdots ③ \end{cases}$$

まず, z を消去する。

$$① \times 2 \quad 4x+6y+2z=1294$$

$$\begin{array}{r} ② \quad -) 3x+2y+2z=958 \\ \hline x+4y \quad = 336 \quad \cdots \cdots ④ \end{array}$$

$$① \times 3 \quad 6x+9y+3z=1941$$

$$\begin{array}{r} ③ \quad -) x+5y+3z=1269 \\ \hline 5x+4y \quad = 672 \quad \cdots \cdots ⑤ \end{array}$$

④, ⑤ より

$$⑤ \quad 5x+4y=672$$

$$④ \quad -) x+4y=336$$

$$\begin{array}{r} \text{両辺4で割る} \rightarrow 4x \quad = 336 \\ 336 \div 4 = 84 \quad x \quad = 84 \end{array}$$

$x=84$ を④に代入すると

$$84+4y=336$$

$$\begin{array}{r} \text{両辺4で割る} \rightarrow 4y=252 \\ 252 \div 4 = 63 \quad y=63 \end{array}$$

よって $x=84, y=63$

これらを①に代入して解くと $2 \times 84 + 3 \times 63 + z = 647$

$$168 + 189 + z = 647 \quad \text{より} \quad z = 290$$

これらは問題に適している。

答 A は 84 円, B は 63 円, C は 290 円

練習 35 A, B, C の3人が, チョコレート, ガム, アメを買った。

A は, チョコレート1個とガム1個とアメ6個を買い, 60 円支払った。

B は, チョコレート2個とガム3個とアメ4個を買い, 90 円支払った。

C は, チョコレート3個とガム5個とアメ3個を買い, 125 円支払った。

チョコレート, ガム, アメの1個の値段をそれぞれ求めなさい。

解答

チョコレート, ガム, アメの1個の値段をそれぞれ x 円, y 円, z 円とすると

$$\begin{cases} x+y+6z=60 & \cdots \cdots ① \\ 2x+3y+4z=90 & \cdots \cdots ② \\ 3x+5y+3z=125 & \cdots \cdots ③ \end{cases}$$

参考 この問題は最初に x を消去した方が
ちょっとだけ簡単に解けます。興味のある人
はチャレンジしてみてください。

まず, z を消去する。

$$② \times 3 \quad 6x+9y+12z=270$$

$$\begin{array}{r} ① \times 2 \quad -) 2x+2y+12z=120 \\ \hline 4x+7y \quad = 150 \quad \cdots \cdots ④ \end{array}$$

$$③ \times 2 \quad 6x+10y+6z=250$$

$$\begin{array}{r} ① \quad -) x+y+6z=60 \\ \hline 5x+9y \quad = 190 \quad \cdots \cdots ⑤ \end{array}$$

④, ⑤ より

$$⑤ \times 4 \quad 20x+36y=760$$

$$\begin{array}{r} ④ \times 5 \quad -) 20x+35y=750 \\ \hline y=10 \end{array}$$

$y=10$ を④に代入すると

$$4x+7 \times 10=150$$

$$\begin{array}{r} \text{両辺4で割る} \rightarrow 4x=80 \\ 80 \div 4 = 20 \quad x=20 \end{array}$$

よって $x=20, y=10$

これらを①に代入して解くと

$$20+10+6z=60$$

$$\begin{array}{r} \text{両辺6で割る} \rightarrow 6z=30 \\ 30 \div 6 = 5 \quad z=5 \end{array}$$

これらは問題に適している。

よって, チョコレートは 20 円, ガムは 10 円, アメは 5 円

＜連立方程式と解＞

解が与(あた)えられた連立方程式について考えてみよう。

x, y の連立方程式について、解が $x=p, y=q$ であるとき、
これらをもとの連立方程式に代入した式が成り立つ。

解が最初から分かっていたら
問題文に代入しよう

参考

$$\begin{array}{rcl} 5x + y & = & 12 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ -) 3x + y & = & 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \\ \hline 2x & = & 6 \\ x & = & 3 \end{array}$$

$x=3$ を $\textcircled{1}$ に代入すると $5 \times 3 + y = 12$ より $y = -3$
よって、この連立方程式の解は、 $x=3, y=-3$ である。

$\textcircled{1}$ に $x=3, y=-3$ を代入すると
 $(\textcircled{1} \text{の左辺}) = 5x + y = 5 \times 3 + (-3) = 15 - 3 = 12 = (\textcircled{1} \text{の右辺})$

$\textcircled{2}$ に $x=3, y=-3$ を代入すると
 $(\textcircled{2} \text{の左辺}) = 3x + y = 3 \times 3 + (-3) = 9 - 3 = 6 = (\textcircled{2} \text{の右辺})$

よって 連立方程式の解を代入すると、 $\textcircled{1}$ も $\textcircled{2}$ も左辺と右辺の計算結果は一致する。

このことを用いて、次の問題を考えてみよう。

例題 19 連立方程式 $\begin{cases} ax + by = 1 \\ bx - ay = 8 \end{cases}$ の解が、 $x=3, y=2$ であるとき、
 a, b の値を求めなさい。

参考 この問題の a と b は自分で好きに決めていい数です。その選んで決めた a と b を使って連立方程式 $\begin{cases} ax + by = 1 \\ bx - ay = 8 \end{cases}$ を解いたときに、解として $x=3, y=2$ が
出てきて欲しいということです。そんな a と b を見つけることはできますか？

(実験) $a=2, b=3 \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases} \rightarrow x=2, y=-1$

実験失敗！

$$\begin{array}{rcl} 6x + 9y & = & 3 \\ -) 6x - 4y & = & 16 \\ \hline 13y & = & -13 \\ y & = & -1 \end{array}$$

解答

解が $x=3, y=2$ であるから、これらを
連立方程式 $\begin{cases} ax + by = 1 \\ bx - ay = 8 \end{cases}$ に代入すると
 $\begin{cases} 3a + 2b = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 3b - 2a = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ a と b の連立方程式
 $\begin{array}{rcl} \textcircled{1} \times 3 & & 9a + 6b = 3 \\ \textcircled{2} \times 2 & -) & -4a + 6b = 16 \\ \hline & & 13a = -13 \\ & & (-13) \div 13 = -1 \end{array}$
 $a = -1$ を $\textcircled{1}$ に代入して解くと $3 \times (-1) + 2b = 1$
両辺2で割る $\rightarrow 2b = 4$ より $b = 2$ 答 $a = -1, b = 2$

解が最初から分かっていたら
問題文に代入しよう

$$\begin{array}{rcl} ax + by & = & 1 \\ bx - ay & = & 8 \end{array}$$

$x=3, y=2$ を代入すると
 $\begin{cases} 3a + 2b = 1 \\ 3b - 2a = 8 \end{cases}$
 $3b - 2a = 8$ は
 $-2a + 3b = 8$ にして筆算
($2a - 3b = 8$ にならないよ
うに注意)

参考 $a = -1, b = 2$ にすると問題文の連立方程式は $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ となります。
実際に筆算してみると、確かに $x=3, y=2$ が解として出てきます。

練習 36 連立方程式 $\begin{cases} ax - by = 9 \\ bx + 2ay = -16 \end{cases}$ の解が $x=1, y=-3$ であるとき、
 a, b の値を求めなさい。

解答

解が $x=1, y=-3$ であるから、
これらを連立方程式 $\begin{cases} ax - by = 9 \\ bx + 2ay = -16 \end{cases}$ に代入すると
 $\begin{cases} a \times 1 - b \times (-3) = 9 \\ b \times 1 + 2a \times (-3) = -16 \end{cases}$ より $\begin{cases} a + 3b = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ b - 6a = -16 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$
 $\begin{array}{rcl} \textcircled{1} & & a + 3b = 9 \\ \textcircled{2} \times 3 & -) & -18a + 3b = -48 \\ \hline & & 19a = 57 \\ & & 57 \div 19 = 3 \end{array}$
 $a = 3$ を $\textcircled{1}$ に代入して解くと $3 + 3b = 9$
両辺3で割る $\rightarrow 3b = 6$ より $b = 2$ よって $a = 3, b = 2$

$$\begin{array}{rcl} ax - by & = & 9 \\ bx + 2ay & = & -16 \end{array}$$

$x=1, y=-3$ を代入すると
 $\begin{cases} a \times 1 - b \times (-3) = 9 \\ b \times 1 + 2a \times (-3) = -16 \end{cases}$
 $b - 6a = -16$ は
 $-6a + b = -16$ にして筆算
($6a - b = -16$ にならないよ
うに注意)

探究

問題をつくってみよう



先生

たとえば「 $3x+5y=1000$ 」という関係式がある
とします。どのような設定が考えられるでしょ
うか。

「1本 x 円のペンを3本と、1冊 y 円のノート
を5冊買ったときの代金の合計は1000円」と
いう設定が考えられます。



たいちさん



では、さらに条件を加えて、「 $3x+5y=1000$ 」
と、もう1つの関係式をつくり、連立方程式
になるような問題をつくってみましょう。

同じペンとノートについて、「ペンを4本と、
ノートを1冊買ったときの代金の合計は880
円」という条件を加えると、この連立方程式
の解は、 $x=200$ ， $y=80$ となりました。



けいこさん

同じように、「ペンを5本と、ノートを2冊買
ったときの代金の合計は1200円」という条件
を加えると……。あれ？この連立方程式の解は、
 $x=\frac{4000}{19}$ ， $y=\frac{1400}{19}$ となってしまいました。

2人が求めた解は、問題に適しているでしょうか。

どうして解の確かめが必要であるかを考えてみましょう。