

第3章「方程式」4 連立方程式

＜連立方程式とその解＞

100 円硬貨（こうか）と 50 円硬貨が、合わせて 9 枚あり、金額の合計が 700 円であるとする。100 円硬貨の枚数を x 枚、50 円硬貨の枚数を y 枚とすると、次の等式が成り立つ。

硬貨の枚数について $x + y = 9$ ①
金額の合計について $100x + 50y = 700$ ②

①、② の等式はともに方程式である。このように、2 つの文字を含み、それぞれについて 1 次の方程式であるものを、**2 元 (げん) 1 次方程式** という。

x も y も文字が 1 個だけ
 x^2 が現れると 2 次方程式

文字が 2 つなので 2 元

① の方程式を成り立たせる x , y の値の組は、右の表のようになる。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

今は x も y も 0 以上であるが、 $x = -1$, $y = 10$ なども ① を満たす

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	14	12	10	8	6	4	2	0

また、② の方程式を成り立たせる x , y の値の組は、右の表のようになる。

今は x も y も整数であるが、 $x = \frac{1}{2}$, $y = 13$ なども ② を満たす

① や ② の片方だけを満たす x と y の組は無数にある

これらの表から、 $x = 5$, $y = 4$ は、2 つの 2 元 1 次方程式

(*) $\begin{cases} x + y = 9 & \text{..... ①} \\ 100x + 50y = 700 & \text{..... ②} \end{cases}$

の両方を同時に成り立たせる x , y の値の組であることがわかる。

同時に成り立つ x と y の組を求めにいく

(*) のように、方程式をいくつか組にしたものを **連立 (れんりつ) 方程式** という。それらのどの方程式も成り立たせる文字の値の組を、連立方程式の **解** といい、その解を求めることを、連立方程式を **解く** という。

注意 解 $x = 5$, $y = 4$ を、 $(x, y) = (5, 4)$ や $\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$ と書く場合もある。

表を用いて調べると大変なので、以下ではもっと簡単に求める方法を学んでいきます。

＜連立方程式の解き方＞

文字が 1 つの 1 次方程式の解き方はすでに学んだ。
連立方程式を解くには、与えられた式を変形して、文字が 1 つの 1 次方程式をつくればよい。その方法について考えてみよう。

● 代入法 ● 「 $x =$ 」や「 $y =$ 」が出てきたらこの方法

例 8 連立方程式 $\begin{cases} y = x - 3 & \text{..... ①} \\ 3x - 2y = 7 & \text{..... ②} \end{cases}$ を解く。

① を「 y は $x - 3$ 」と考え、② の y を $x - 3$ にかえる

② の y に、① の $x - 3$ を代入すると

かっこをはずすと $3x - 2(x - 3) = 7$ ③

かっこを必ずつけること

$3x - 2x + 6 = 7$

$3x - 2x = 7 - 6$

$x = 1$

①: $y = x - 3$

$x = 1$ を ① に代入すると $y = 1 - 3 = -2$

よって、この連立方程式の解は、 $x = 1$, $y = -2$ である。

連立方程式では x と y をセットで求めること

でも ① は「 $y =$ 」となっているから、① に代入した方が絶対に良い

注意 例 8 で、 $x = 1$ を ② に代入しても、 $y = -2$ が得られる。また、 $x = 1$, $y = -2$ が連立方程式の解であるかどうかを確認するには、もとの 2 つの方程式に値を代入して調べればよい。

出てきた数字が解になっているか最後に確かめをしましょう

例 8 の ③ のように、文字 x , y についての連立方程式から、 y を含まない方程式をつくることを、 y を **消去 (しょうきょ) する** という。このように、代入によって 1 つの文字を消去して解く方法を **代入法** という。

注意 $\begin{cases} y = x - 3 & \text{..... ①} \\ 3x - 2y = 7 & \text{..... ②} \end{cases}$ において ① を ② に代入するときに

$3x - 2y(x - 3) = 7$

と書いてしまう人がいます。「箱に入れる」というイメージをしましょう。

$3x - 2 \square = 7$ の $\square$ に $x - 3$ を代入するので $3x - 2 \square(x - 3) = 7$

練習 20 次の連立方程式を解きなさい。

$$(1) \begin{cases} y = 3x - 5 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3x - y = -11 \\ x = -2y + 1 \end{cases}$$

解答 一番最初、式に①や②と番号をつけましょう

$$(1) \begin{cases} y = 3x - 5 & \cdots \cdots \text{①} \\ 2x + y = 5 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

①を②に代入すると ← かっこをつける

$$2x + (3x - 5) = 5$$

$$2x + 3x - 5 = 5$$

$$2x + 3x = 5 + 5$$

$$\text{両辺5で割る} \rightarrow 5x = 10$$

$$10 \div 5 = 2 \quad x = 2$$

$x = 2$ を①に代入すると ①: $y = 3x - 5$

$$y = 3 \times 2 - 5 = 1$$

よって $x = 2, y = 1$ 最後合ってるか確かめをしましょう

$$(2) \begin{cases} 3x - y = -11 & \cdots \cdots \text{①} \\ x = -2y + 1 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

②を①に代入すると ← かっこをつける

$$3(-2y + 1) - y = -11$$

$$3(-2y + 1) = 3 \times (-2y) + 3 \times 1$$

$$-6y + 3 - y = -11$$

$$-6y - y = -11 - 3$$

$$-6y - y = -6y - 1y = -7y$$

$$\text{両辺}(-7)\text{で割る} \rightarrow -7y = -14$$

$$(-14) \div (-7) = +2 \quad y = 2$$

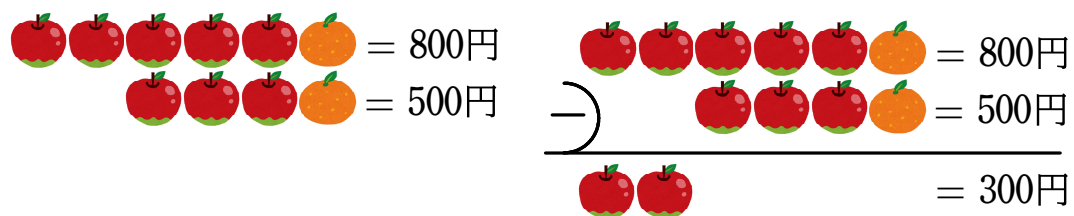
$y = 2$ を②に代入すると ②: $x = -2y + 1$

$$x = -2 \times 2 + 1 = -3$$

よって $x = -3, y = 2$ 最後合ってるか確かめをしましょう

● 加減法 ●

例りんご5個とみかん1個で800円です。りんご3個とみかん1個で500円です。
りんごとみかんの1個の値段はいくらですか。



例9 連立方程式 $\begin{cases} 5x + y = 12 & \dots\dots ① \\ 3x + y = 6 & \dots\dots ② \end{cases}$ を解く。

①と②の式で、yの係数が等しいことに着目する。文字が消えるように同じものどうしを引く

①, ②の左辺どうし, 右辺どうしをひくと
筆算を書くこと $\begin{array}{r} 5x + y = 12 \\ -) 3x + y = 6 \\ \hline 2x = 6 \\ 2x \div 2 = 3 \\ x = 3 \end{array}$ ここを消すために引く

$$\begin{array}{r} A = B \\ -) C = D \\ \hline A - C = B - D \end{array}$$

$(5x + y) - (3x + y) = 12 - 6$
 $x = 3$ ①: $5x + y = 12$
 $x = 3$ を①に代入すると $5 \times 3 + y = 12$
②に代入してもよい $y = -3$

よって, この連立方程式の解は, $x = 3, y = -3$ である。

例10 連立方程式 $\begin{cases} 3x + 5y = 13 & \dots\dots ① \\ -3x + 2y = 1 & \dots\dots ② \end{cases}$ を解く。

①と②の式で、xの係数の絶対値が等しく, 符号が反対になっていることに着目する。

①, ②の左辺どうし, 右辺どうしをたすと
筆算を書くこと $\begin{array}{r} 3x + 5y = 13 \\ +) -3x + 2y = 1 \\ \hline 7y = 14 \\ 7y \div 7 = 2 \\ y = 2 \end{array}$ ここを消すために足す

$$\begin{array}{r} A = B \\ +) C = D \\ \hline A + C = B + D \end{array}$$

$(3x + 5y) + (-3x + 2y) = 13 + 1$
 $y = 2$ ①: $3x + 5y = 13$
 $y = 2$ を①に代入すると $3x + 5 \times 2 = 13$
 $3x = 3$
 $x = 1$

よって, この連立方程式の解は, $x = 1, y = 2$ である。

練習21 次の連立方程式を解きなさい。

(1) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 5x + 2y = 16 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 7x + 3y = 10 \\ -7x - 8y = 20 \end{cases}$

解答

(1) $\begin{cases} 2x - y = 1 & \dots\dots ① \\ 2x - 3y = 7 & \dots\dots ② \end{cases}$

① $2x - y = 1$ ここを消すために引く
② $-) 2x - 3y = 7$
 $\quad -y - (-3y) = -y + 3y = 2y$
両辺2で割る $2y = -6$
 $(-6) \div 2 = -3$ $y = -3$

$y = -3$ を①に代入すると
 $2x - (-3) = 1$ $y = -3$ ①: $2x - y = 1$
かっこつける $2x + 3 = 1$
両辺2で割る $2x = -2$
 $(-2) \div 2 = -1$ $x = -1$
よって $x = -1, y = -3$

(2) $\begin{cases} x - 2y = -4 & \dots\dots ① \\ 5x + 2y = 16 & \dots\dots ② \end{cases}$

① $x - 2y = -4$ ここを消すために引く
② $+) 5x + 2y = 16$
 $\quad 6x = 12$
両辺6で割る $6x = 12$
 $12 \div 6 = 2$ $x = 2$

$x = 2$ を②に代入すると
 $5 \times 2 + 2y = 16$
 $2y = 16 - 10$
両辺2で割る $2y = 6$
 $6 \div 2 = 3$ $y = 3$
よって $x = 2, y = 3$

(3) $\begin{cases} 7x + 3y = 10 & \dots\dots ① \\ -7x - 8y = 20 & \dots\dots ② \end{cases}$

① $7x + 3y = 10$ ここを消すために足す
② $+) -7x - 8y = 20$
 $\quad -5y = 30$
両辺(-5)で割る $-5y = 30$
 $30 \div (-5) = -6$ $y = -6$

$y = -6$ を①に代入すると
 $7x + 3 \times (-6) = 10$
 $7x - 18 = 10$
 $7x = 28$
両辺7で割る $7x = 28$
 $28 \div 7 = 4$ $x = 4$
よって $x = 4, y = -6$

連立方程式で、2つの式の両辺をそれぞれそのまましたり、ひいたりしても文字を消去できない場合について考えてみよう。

例11 連立方程式 $\begin{cases} 3x - y = 7 & \dots\dots ① \\ x - 2y = 4 & \dots\dots ② \end{cases}$ を解く。

1つの文字を消去するために、

消去する文字の係数の絶対値が等しくなるようにする。ここでは、 y を消去する。

ここを消すために引く $\begin{array}{r} ① \times 2 \quad 6x - 2y = 14 \\ ② \quad \quad x - 2y = 4 \\ \hline \quad \quad - \quad 5x = 10 \\ \quad \quad 10 \div 5 = 2 \quad \quad x = 2 \end{array}$

両辺5で割る $\rightarrow 5x = 10$
 $10 \div 5 = 2$ $x = 2$

$x = 2$ を ① に代入すると $3 \times 2 - y = 7$
 $-y = 7 - 6$
 $-y = 1$
 両辺に (-1) をかける $\rightarrow -y = 1$
 $y = -1$

よって、この連立方程式の解は、 $x = 2, y = -1$ である。

別解 (x を消す)

ここを消すために引く $\begin{array}{r} ① \quad 3x - y = 7 \\ ② \times 3 \quad - \quad 3x - 6y = 12 \\ \hline \quad \quad 5y = -5 \\ \quad \quad (-5) \div 5 = -1 \quad y = -1 \end{array}$

両辺5で割る $\rightarrow 5y = -5$
 $(-5) \div 5 = -1$ $y = -1$

$y = -1$ を ① に代入すると $3x - (-1) = 7$
 $3x + 1 = 7$
 $3x = 6$
 両辺3で割る $\rightarrow 3x = 6$
 $6 \div 3 = 2$ $x = 2$

よって、この連立方程式の解は、 $x = 2, y = -1$ である。

このように、1つの文字の係数の絶対値をそろえ、両辺をそれぞれたしたりひいたりして、1つの文字を消去して解く方法を **加減法(かげんほう)** という。

加減法では、計算が簡単になる文字を選んで消去するとよい。

こう書いてあったら筆算をイメージしよう

注意 (*) のような計算を「① $\times$ 2-②より $5x=10$ 」と書くことがある。

練習22 次の連立方程式を解きなさい。

(1) $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 2x - y = -8 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 5x - y = 7 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} 3x - 4y = -3 \\ 5x - 2y = -19 \end{cases}$

解答

(1) $\begin{cases} x + 3y = 3 & \dots\dots ① \\ 2x - y = -8 & \dots\dots ② \end{cases}$ 慣れないうちはこれを書きましょう

x を消す $\begin{array}{r} \quad 2\text{倍} \quad 2x + 6y = 6 \\ x + 3y = 3 \quad \rightarrow \quad 2x + 6y = 6 \\ 2x - y = -8 \quad \rightarrow \quad 2x - y = -8 \\ \hline \quad \quad 7y = 14 \\ \quad \quad 14 \div 7 = 2 \quad y = 2 \end{array}$

① $\times$ 2 $2x + 6y = 6$
 ② $- \quad 2x - y = -8$
 $6y - (-y) = 6y + y = 7y$
 両辺7で割る $\rightarrow 7y = 14$
 $14 \div 7 = 2$ $y = 2$

$y = 2$ を ① に代入すると $x + 3 \times 2 = 3$
 $x = -3$
 ①: $x + 3y = 3$

よって $x = -3, y = 2$

(2) $\begin{cases} 2x + 3y = -4 & \dots\dots ① \\ 5x - y = 7 & \dots\dots ② \end{cases}$

y を消す $\begin{array}{r} \quad \text{そのまま} \quad 2x + 3y = -4 \\ 2x + 3y = -4 \quad \rightarrow \quad 2x + 3y = -4 \\ 5x - y = 7 \quad \rightarrow \quad 15x - 3y = 21 \\ \hline \quad \quad 17x = 17 \\ \quad \quad 17 \div 17 = 1 \quad x = 1 \end{array}$

① $2x + 3y = -4$
 ② $\times$ 3 $+ \quad 15x - 3y = 21$
 $6y - (-y) = 6y + y = 7y$
 両辺17で割る $\rightarrow 17x = 17$
 $17 \div 17 = 1$ $x = 1$

$x = 1$ を ② に代入すると $5 \times 1 - y = 7$
 $-y = 7 - 5$
 $-y = 2$
 両辺に (-1) をかける $\rightarrow -y = 2$
 $y = -2$

よって $x = 1, y = -2$

(3) $\begin{cases} 3x - 4y = -3 & \dots\dots ① \\ 5x - 2y = -19 & \dots\dots ② \end{cases}$

y を消す $\begin{array}{r} \quad \text{そのまま} \quad 3x - 4y = -3 \\ 3x - 4y = -3 \quad \rightarrow \quad 3x - 4y = -3 \\ 5x - 2y = -19 \quad \rightarrow \quad 10x - 4y = -38 \\ \hline \quad \quad -7x = 35 \\ \quad \quad 35 \div (-7) = -5 \quad x = -5 \end{array}$

① $3x - 4y = -3$
 ② $\times$ 2 $- \quad 10x - 4y = -38$
 $3x - 4y = -3$
 $-10x - 4y = -38$
 $-7x = 35$
 両辺7で割る $\rightarrow -7x = 35$
 $35 \div (-7) = -5$ $x = -5$

$x = -5$ を ① に代入すると $3 \times (-5) - 4y = -3$
 $-15 - 4y = -3$
 $-4y = -3 + 15$
 $-4y = 12$
 両辺 (-4) で割る $\rightarrow -4y = 12$
 $12 \div (-4) = -3$ $y = -3$

よって $x = -5, y = -3$

研究 (完成ノート) 次の連立方程式を解きなさい。

$$\begin{cases} 3x + 4y = 27 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

解答 (代入法)

$$\begin{cases} 3x + 4y = 27 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2x - y = -4 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

②を変形する。 $2x - y = -4$ より $-y = -2x - 4$

両辺に (-1) を掛けると $y = 2x + 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$

③を①に代入すると $3x + 4(2x + 4) = 27$

$$3x + 8x + 16 = 27$$

$$11x = 27 - 16$$

$$11x = 11$$

$$11 \div 11 = 1 \quad x = 1$$

$x = 1$ を③に代入すると

$$y = 2 \times 1 + 4 = 6$$

答 $x = 1, y = 6$

$$\begin{array}{rcl} -y & = & -2x - 4 \\ \downarrow & & \downarrow \downarrow \downarrow (-1) \text{ 倍} \\ y & = & 2x + 4 \end{array}$$

別解 (加減法)

$$\begin{array}{rcl} \textcircled{1} & 3x + 4y & = 27 \\ \textcircled{2} \times 4 & +) 8x - 4y & = -16 \\ \hline & 11x & = 11 \\ \text{両辺 } 11 \text{ で割る} & & \nearrow \\ & x & = 1 \end{array}$$

$x = 1$ を①に代入すると $3 \times 1 + 4y = 27$

$$3 + 4y = 27$$

$$4y = 27 - 3$$

$$4y = 24$$

$$24 \div 4 = 6 \quad y = 6$$

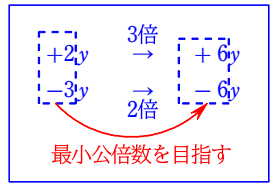
よって、この連立方程式の解は、 $x = 1, y = 6$ である。

$$\begin{array}{lcl} y \text{ を消す} & \text{そのまま} & \\ 3x + 4y = 27 & \rightarrow & 3x + 4y = 27 \\ 2x - y = -4 & \rightarrow 4 \text{ 倍} & 8x - 4y = -16 \end{array}$$

例題 9 連立方程式 $\begin{cases} 3x + 2y = 4 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 8x - 3y = 19 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ を解きなさい。

片方の式だけを何倍かしてもうまくいかない。

両方の式を何倍かして項が消えるようにする。



ここを消すために足す

$$\begin{array}{rcl} \textcircled{1} \times 3 & 9x + 6y & = 12 \\ \textcircled{2} \times 2 & +) 16x - 6y & = 38 \\ \hline \text{両辺 } 25 \text{ で割る} & 25x & = 50 \\ 50 \div 25 = 2 & x & = 2 \end{array}$$

$x = 2$ を①に代入すると $3 \times 2 + 2y = 4$

$$6 + 2y = 4$$

$$2y = 4 - 6$$

$$2y = -2$$

$$(-2) \div 2 = -1 \quad y = -1$$

答 $x = 2, y = -1$

$$\begin{array}{lcl} y \text{ を消す} & 3 \text{ 倍} & \\ 3x + 2y = 4 & \rightarrow & 9x + 6y = 12 \\ 8x - 3y = 19 & \rightarrow 2 \text{ 倍} & 16x - 6y = 38 \end{array}$$

ここを消すために引く

$$\begin{array}{rcl} \textcircled{1} \times 8 & 24x + 16y & = 32 \\ \textcircled{2} \times 3 & -) 24x - 9y & = 57 \\ \hline \text{両辺 } 25 \text{ で割る} & 25y & = -25 \\ (-25) \div 25 = -1 & y & = -1 \end{array}$$

$y = -1$ を①に代入すると $3x + 2 \times (-1) = 4$

$$3x - 2 = 4$$

$$3x = 4 + 2$$

$$3x = 6$$

$$6 \div 3 = 2 \quad x = 2$$

答 $x = 2, y = -1$

$$\begin{array}{lcl} x \text{ を消す} & 8 \text{ 倍} & \\ 3x + 2y = 4 & \rightarrow & 24x + 16y = 32 \\ 8x - 3y = 19 & \rightarrow 3 \text{ 倍} & 24x - 9y = 57 \end{array}$$

練習 23 次の連立方程式を解きなさい。

$$(1) \begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 4x - 3y = -13 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 3x - 5y = 16 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 6x - 11y = -2 \\ 10x - 9y = 34 \end{cases}$$

解答

(1)
$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 & \dots\dots ① \\ 4x - 3y = -13 & \dots\dots ② \end{cases}$$

①×3 $15x + 6y = 3$
 ②×2 $8x - 6y = -26$

$$\begin{array}{r} 15x + 6y = 3 \\ +) 8x - 6y = -26 \\ \hline 23x = -23 \end{array}$$
 両辺 23 で割る $\rightarrow 23x = -23$
 $(-23) \div 23 = -1$ $x = -1$

$x = -1$ を ① に代入すると $x = -1$
 $5 \times (-1) + 2y = 1$
 $-5 + 2y = 1$
 両辺 2 で割る $\rightarrow 2y = 6$
 $6 \div 2 = 3$ $y = 3$
 よって $x = -1, y = 3$

y を消す

$$\begin{array}{r} 5x + 2y = 1 \xrightarrow{3\text{倍}} 15x + 6y = 3 \\ 4x - 3y = -13 \xrightarrow{2\text{倍}} 8x - 6y = -26 \end{array}$$

(2)
$$\begin{cases} 4x + 3y = 2 & \dots\dots ① \\ 3x - 5y = 16 & \dots\dots ② \end{cases}$$

①×3 $12x + 9y = 6$
 ②×4 $12x - 20y = 64$

$$\begin{array}{r} 12x + 9y = 6 \\ -) 12x - 20y = 64 \\ \hline 29y = -58 \end{array}$$
 両辺 29 で割る $\rightarrow 29y = -58$
 $(-58) \div 29 = -2$ $y = -2$

$y = -2$ を ① に代入すると $y = -2$
 $4x + 3 \times (-2) = 2$
 $4x - 6 = 2$
 両辺 2 で割る $\rightarrow 4x = 8$
 $8 \div 4 = 2$ $x = 2$
 よって $x = 2, y = -2$

x を消す

$$\begin{array}{r} 4x + 3y = 2 \xrightarrow{3\text{倍}} 12x + 9y = 6 \\ 3x - 5y = 16 \xrightarrow{4\text{倍}} 12x - 20y = 64 \end{array}$$

(3)
$$\begin{cases} 6x - 11y = -2 & \dots\dots ① \\ 10x - 9y = 34 & \dots\dots ② \end{cases}$$

①×5 $30x - 55y = -10$
 ②×3 $30x - 27y = 102$

$$\begin{array}{r} 30x - 55y = -10 \\ -) 30x - 27y = 102 \\ \hline -28y = -112 \end{array}$$
 両辺 -28 で割る $\rightarrow -28y = -112$
 $(-112) \div (-28) = +4$ $y = 4$

$y = 4$ を ① に代入すると $y = 4$
 $6x - 11 \times 4 = -2$
 $6x - 44 = -2$
 $6x = -2 + 44$
 $6x = 42$
 両辺 6 で割る $\rightarrow 6x = 42$
 $42 \div 6 = 7$ $x = 7$
 よって $x = 7, y = 4$

x を消す

$$\begin{array}{r} 6x - 11y = -2 \xrightarrow{5\text{倍}} 30x - 55y = -10 \\ 10x - 9y = 34 \xrightarrow{3\text{倍}} 30x - 27y = 102 \end{array}$$

【発展】 連立方程式 $\begin{cases} 8x+7y=4 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 7x-8y=11 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ を解きなさい。

【解答】

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \times 8 \quad 64x + 56y = 32 \\ \textcircled{2} \times 7 \quad +) \quad 49x - 56y = 77 \\ \hline \text{両辺 113 で割る} \rightarrow 113x = 109 \end{array}$$

ここを消すために足す

$$\begin{array}{r} y \text{ を消す} \\ 8x + 7y = 4 \quad \xrightarrow{8\text{倍}} \quad 64x + 56y = 32 \\ 7x - 8y = 11 \quad \xrightarrow{7\text{倍}} \quad 49x - 56y = 77 \end{array}$$

$$109 \div 113 = \frac{109}{113} \quad x = \frac{109}{113}$$

$x = \frac{109}{113}$ を $\textcircled{1}$ に代入すると $8 \times \frac{109}{113} + 7y = 4$

$x = \frac{109}{113}$ $\rightarrow$ $\textcircled{1} : 8x + 7y = 4$

$$\frac{872}{113} + 7y = 4$$

$$7y = 4 - \frac{872}{113}$$

両辺 7 で割る

$$-\frac{420}{113} \div 7 = -\frac{420}{113} \times \frac{1}{7}$$

$$= -\frac{60}{113} \quad \text{約分} \quad y = -\frac{60}{113}$$

【答】 $x = \frac{109}{113}, y = -\frac{60}{113}$

【別解】

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \times 8 \quad 64x + 56y = 32 \\ \textcircled{2} \times 7 \quad +) \quad 49x - 56y = 77 \\ \hline \text{両辺 113 で割る} \rightarrow 113x = 109 \end{array}$$

ここを消すために足す

$$\begin{array}{r} y \text{ を消す} \\ 8x + 7y = 4 \quad \xrightarrow{8\text{倍}} \quad 64x + 56y = 32 \\ 7x - 8y = 11 \quad \xrightarrow{7\text{倍}} \quad 49x - 56y = 77 \end{array}$$

$$109 \div 113 = \frac{109}{113} \quad x = \frac{109}{113}$$

ここを消すために引く

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \times 7 \quad 56x + 49y = 28 \\ \textcircled{2} \times 8 \quad -) \quad 56x - 64y = 88 \\ \hline \text{両辺 113 で割る} \rightarrow 113y = -60 \end{array}$$

ここを消すために引く

$$\begin{array}{r} x \text{ を消す} \\ 8x + 7y = 4 \quad \xrightarrow{7\text{倍}} \quad 56x + 49y = 28 \\ 7x - 8y = 11 \quad \xrightarrow{8\text{倍}} \quad 56x - 64y = 88 \end{array}$$

$$(-60) \div 113 = -\frac{60}{113} \quad y = -\frac{60}{113}$$

【答】 $x = \frac{109}{113}, y = -\frac{60}{113}$

【参考】 このように、片方を求めた後、もう 1 回筆算を行うと大変な 1 次方程式を回避することができます。

【参考】 (中学校数学ではあまりないですが) 解が分数になることもあります。

上の解答でもあるように x と y のうち片方がすごい分数になると、もう片方もすごい分数になることが多いです。そのため、片方を筆算で求めた後の 1 次方程式が大変になることが多く、そこで間違える人が多いです。

上の解答では、 $x = \frac{109}{113}$ を求めた後、 $\textcircled{1}$ の $8x + 7y = 4$ に代入すると大変な 1 次方程式になります。

では、こういう問題ではどうしたらいいのでしょうか？

例題 10 連立方程式 $\begin{cases} 2x - y = 4 & \dots\dots ① \\ 3(x - y) + 4x = 15 & \dots\dots ② \end{cases}$ を解きなさい。

解答 ② のかっこをはずすと

$$3x - 3y + 4x = 15$$

$$3(x - y) = 3 \times x + 3 \times (-y)$$

ここを消すために引く

$$7x - 3y = 15 \quad \dots\dots ③$$

③と①で連立方程式を考える

$$\begin{array}{r} ③ \quad 7x - 3y = 15 \\ ① \times 3 \quad -) 6x - 3y = 12 \\ \hline x = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} y \text{ を消す} \\ 7x - 3y = 15 \quad \text{そのまま} \quad 7x - 3y = 15 \\ 2x - y = 4 \quad \rightarrow \quad 6x - 3y = 12 \quad \text{3倍} \end{array}$$

$$x = 3 \text{ を } ① \text{ に代入すると } 2 \times 3 - y = 4$$

$$6 - y = 4$$

$$x = 3 \quad \rightarrow \quad ①: 2x - y = 4$$

$$\begin{array}{r} \text{両辺に } (-1) \text{ をかける} \quad -y = -2 \\ y = 2 \end{array}$$

答 $x = 3, y = 2$

$$\begin{cases} 5x - 8y = 14 & \dots\dots ① \\ x + 2(x - 2y) = 6 & \dots\dots ② \end{cases}$$

② のかっこをはずすと

$$x + 2x - 4y = 6$$

$$2(x - 2y) = 2 \times x + 2 \times (-2y)$$

ここを消すために引く $3x - 4y = 6 \quad \dots\dots ③$

③と①で連立方程式を考える

$$\begin{array}{r} ③ \times 2 \quad 6x - 8y = 12 \\ ① \quad -) 5x - 8y = 14 \\ \hline x = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} y \text{ を消す} \\ 3x - 4y = 6 \quad \xrightarrow{2\text{倍}} \quad 6x - 8y = 12 \\ 5x - 8y = 14 \quad \rightarrow \quad 5x - 8y = 14 \quad \text{そのまま} \end{array}$$

$x = -2$ を ③ に代入すると

$$x = -2 \quad \rightarrow \quad ③: 3x - 4y = 6$$

$$3 \times (-2) - 4y = 6$$

$$-6 - 4y = 6$$

両辺 (-4) で割る $\rightarrow -4y = 12$

$$12 \div (-4) = -3 \quad y = -3$$

よって $x = -2, y = -3$

練習 24 次の連立方程式を解きなさい。

$$(1) \begin{cases} y = 5x - 3(x + 4) \\ x - 2y = 15 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 5x - 8y = 14 \\ x + 2(x - 2y) = 6 \end{cases}$$

解答

$$(1) \begin{cases} y = 5x - 3(x + 4) & \dots\dots ① \\ x - 2y = 15 & \dots\dots ② \end{cases} \quad -3(x + 4) = (-3) \times x + (-3) \times 4$$

① のかっこをはずすと

$$y = 5x - 3x - 12$$

$$y = 2x - 12 \quad \dots\dots ③$$

③ を ② に代入すると

$$x - 2(2x - 12) = 15$$

$$x - 4x + 24 = 15$$

$$x - 4x = 15 - 24$$

両辺 (-3) で割る $\rightarrow -3x = -9$

$$(-9) \div (-3) = +3 \quad x = 3$$

$x = 3$ を ③ に代入すると

$$③: y = 2x - 12$$

$$y = 2 \times 3 - 12 = -6 \quad \text{よって} \quad x = 3, y = -6$$

「 $y = \text{なんとか}$ 」の形
なので代入法

$$x - 2y = 15 \quad \dots\dots ②$$

$$y = 2x - 12 \quad \dots\dots ③$$

代入法が苦手な人は
 $y = 2x - 12$ を
 $-2x + y = -12$ と変形して
 $\begin{cases} -2x + y = -12 & \dots\dots ③ \\ x - 2y = 15 & \dots\dots ② \end{cases}$
加減法を用いればよい。

$$-2(2x - 12) = (-2) \times 2x + (-2) \times (-12)$$

係数に分数や小数を含む連立方程式は、両辺に適当な数をかけて、係数を整数にしてから解くとよい。

【例題 11】 連立方程式

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1 & \dots\dots ① \\ x - 2y = -2 & \dots\dots ② \end{cases}$$

を解きなさい。

【解答】 ①×12

$$\begin{aligned} ③ \quad & 4x - 3y = 12 \quad \dots\dots ③ \\ ② \times 4 \quad & -) \quad 4x - 8y = -8 \end{aligned}$$

ここを消すために引く

$$\begin{aligned} & \text{両辺5で割る} \quad 5y = 20 \\ & 20 \div 5 = 4 \quad y = 4 \end{aligned}$$

$$y = 4 \text{ を } ② \text{ に代入すると } x - 2 \times 4 = -2$$

$$x - 8 = -2$$

$$x = 6$$

答 $x = 6, y = 4$

【参考】(分数を解消しないまま筆算を行う)

ここを消すために引く

$$\begin{aligned} ① \times 3 \quad & x - \frac{3}{4}y = 3 \\ ② \quad & -) \quad x - 2y = -2 \end{aligned}$$

この部分の計算に
分数が残ってしまいます

$$\begin{aligned} & \text{両辺4倍} \quad \frac{5}{4}y = 5 \\ & \text{両辺5で割る} \quad y = 4 \end{aligned}$$

$$y = 4 \text{ を } ② \text{ に代入すると } x - 2 \times 4 = -2$$

$$x - 8 = -2$$

$$x = 6$$

答 $x = 6, y = 4$

【解答】 ①×12

$$\begin{aligned} ③ \quad & 4x - 3y = 12 \quad \dots\dots ③ \\ ② \times 4 \quad & -) \quad 4x - 8y = -8 \end{aligned}$$

ここを消すために引く

$$\begin{aligned} & \text{両辺5で割る} \quad 5y = 20 \\ & 20 \div 5 = 4 \quad y = 4 \end{aligned}$$

$$y = 4 \text{ を } ② \text{ に代入すると } x - 2 \times 4 = -2$$

$$x - 8 = -2$$

$$x = 6$$

答 $x = 6, y = 4$

【参考】(分数を解消しないまま筆算を行う)

ここを消すために引く

$$\begin{aligned} ① \times 3 \quad & x - \frac{3}{4}y = 3 \\ ② \quad & -) \quad x - 2y = -2 \end{aligned}$$

この部分の計算に
分数が残ってしまいます

$$\begin{aligned} & \text{両辺4倍} \quad \frac{5}{4}y = 5 \\ & \text{両辺5で割る} \quad y = 4 \end{aligned}$$

$$y = 4 \text{ を } ② \text{ に代入すると } x - 2 \times 4 = -2$$

$$x - 8 = -2$$

$$x = 6$$

答 $x = 6, y = 4$

$$\begin{aligned} & x \text{ を消す} \\ & \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1 \quad \xrightarrow{3\text{倍}} \quad x - \frac{3}{4}y = 3 \\ & x - 2y = -2 \quad \text{そのまま} \quad x - 2y = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{3}{4}y - (-2y) \\ & = -\frac{3}{4}y + 2y = -\frac{3}{4}y + \frac{8}{4}y = \frac{5}{4}y \\ & \text{両辺5で割る} \quad y = 4 \end{aligned}$$

$$y = 4 \text{ を } ② \text{ に代入すると } x - 2 \times 4 = -2$$

$$x = 6$$

答 $x = 6, y = 4$

【練習 25】 次の連立方程式を解きなさい。

$$(1) \quad \begin{cases} y = 2x + 3 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{9} = 2 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{1}{6}x + \frac{3}{4}y = -1 \\ 7x + 3y = 2x + 9 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{x-1}{3} + \frac{y+3}{2} = 2 \\ 4x + 5y = 8 \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} 1.2x - 0.7y = -1.3 \\ 0.4x - 0.5y = 0.9 \end{cases}$$

【解答】

(1)

$$\begin{cases} y = 2x + 3 & \dots\dots ① \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{9} = 2 & \dots\dots ② \end{cases}$$

②×9

$$3x + y = 18 \quad \dots\dots ③$$

①を③に代入すると

$$3x + (2x + 3) = 18$$

$$\text{両辺5で割る} \rightarrow 5x = 15$$

$$15 \div 5 = 3 \quad x = 3$$

$x = 3$ を①に代入すると

$$y = 2 \times 3 + 3 = 9$$

よって $x = 3, y = 9$

(2)

$$\begin{cases} \frac{1}{6}x + \frac{3}{4}y = -1 & \dots\dots ① \\ 7x + 3y = 2x + 9 & \dots\dots ② \end{cases}$$

①×12

$$2x + 9y = -12 \quad \dots\dots ③$$

②より

$$5x + 3y = 9 \quad \dots\dots ④$$

④×3

$$15x + 9y = 27$$

③

$$-) \quad 2x + 9y = -12$$

$$\text{両辺13で割る} \rightarrow 13x = 39$$

$$39 \div 13 = 3 \quad x = 3$$

$x = 3$ を④に代入すると

$$5 \times 3 + 3y = 9$$

$$15 + 3y = 9$$

$$\text{両辺3で割る} \rightarrow 3y = -6$$

$$(-6) \div 3 = -2 \quad y = -2$$

よって $x = 3, y = -2$

$$\begin{aligned} & \frac{x}{3} + \frac{y}{9} = 2 \\ & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \text{分母の最小公倍数} \\ & \frac{x}{3} \times 9 + \frac{y}{9} \times 9 = 2 \times 9 \end{aligned}$$

③と①で連立方程式を考える

「 $y = \text{なんとか}$ 」の形なので代入法

$$y = 2x + 3 \quad \dots\dots ①$$

$$3x + y = 18 \quad \dots\dots ③$$

代入法が苦手な人は
 $y = 2x + 3$ を
 $-2x + y = 3$ と変形して
 $\begin{cases} -2x + y = 3 & \dots\dots ① \\ 3x + y = 18 & \dots\dots ③ \end{cases}$
加減法を用いよう。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}x + \frac{3}{4}y = -1 \\ & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \text{分母の最小公倍数} \\ & \frac{1}{6}x \times 12 + \frac{3}{4}y \times 12 = -1 \times 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{移項} \quad \bigcirc x + \triangle y = \square \text{ の形にする} \\ & 7x + 3y = 2x + 9 \rightarrow 7x - 2x + 3y = 9 \end{aligned}$$

③と④で連立方程式を考える

$$\begin{aligned} & y \text{ を消す} \\ & \begin{aligned} 5x + 3y &= 9 & \xrightarrow{3\text{倍}} & 15x + 9y &= 27 \\ 2x + 9y &= -12 & \rightarrow & 2x + 9y &= -12 \end{aligned} \\ & \text{そのまま} \end{aligned}$$

$$x = 3 \rightarrow ④: 5x + 3y = 9$$

(3)
$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} + \frac{y+3}{2} = 2 & \dots\dots ① \\ 4x+5y=8 & \dots\dots ② \end{cases}$$

①×6
$$2(x-1)+3(y+3)=12$$

よって
$$2x-2+3y+9=12$$

③×2
$$4x+6y=10$$

②
$$\begin{array}{r} 4x+6y=10 \\ -) 4x+5y=8 \\ \hline y=2 \end{array}$$
 ここを消すために引く

$y=2$ を ② に代入すると

$$4x+5 \times 2 = 8$$

$$4x+10=8$$
 ②: $4x+5y=8$

両辺4で割る
$$4x=-2$$
 より
$$x=-\frac{1}{2}$$

$$(-2) \div 4 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

よって
$$x=-\frac{1}{2}, y=2$$

$$\frac{x-1}{3} + \frac{y+3}{2} = 2$$

分母の最小公倍数 6 倍

$$\frac{x-1}{\cancel{3}} \times \cancel{6} + \frac{y+3}{\cancel{2}} \times \cancel{6} = 2 \times 6$$

約分と かつこに 注意

$$(x-1) \times 2 + (y+3) \times 3 = 12$$

③と②で連立方程式を考える

x を消す

$$\begin{array}{r} 2x+3y=5 \quad \xrightarrow{2\text{倍}} \quad 4x+6y=10 \\ 4x+5y=8 \quad \rightarrow \quad 4x+5y=8 \end{array}$$

そのまゝ

(4)
$$\begin{cases} 1.2x - 0.7y = -1.3 & \dots\dots ① \\ 0.4x - 0.5y = 0.9 & \dots\dots ② \end{cases}$$

①×10
$$12x - 7y = -13$$

②×10
$$4x - 5y = 9$$

③
$$12x - 7y = -13$$

④×3
$$\begin{array}{r} 12x - 7y = -13 \\ -) 12x - 15y = 27 \\ \hline 8y = -40 \end{array}$$
 ここを消すために引く

両辺8で割る
$$8y = -40$$

$$(-40) \div 8 = -5$$

$$y = -5$$

$y = -5$ を ④ に代入すると

$$4x - 5 \times (-5) = 9$$

$$4x + 25 = 9$$
 ④: $4x - 5y = 9$

両辺4で割る
$$4x = 9 - 25$$

$$(-16) \div 4 = -4$$

$$4x = -16$$
 より
$$x = -4$$

よって
$$x = -4, y = -5$$

$$1.2x - 0.7y = -1.3$$

10 倍

$$1.2x \times 10 - 0.7y \times 10 = -1.3 \times 10$$

③と④で連立方程式を考える

x を消す

$$\begin{array}{r} 12x - 7y = -13 \quad \text{そのまゝ} \quad 12x - 7y = -13 \\ 4x - 5y = 9 \quad \xrightarrow{3\text{倍}} \quad 12x - 15y = 27 \end{array}$$

そのまゝ

①も②も, 小数の形を解消する。
 小数第1位までの数しか登場していないので,
 ①も②も10を両辺にかける。

$$-7y - (-15y)$$

$$= -7y + 15y = 8y$$

<A=B=Cの形をした方程式>

たとえば, $x+2y=4x+7y=1$ のような

$$A=B=C$$

の形をした方程式は, 連立方程式を使って解くことができる。

$A=B=C$ の形をした方程式は

$$\begin{cases} A=B \\ B=C \end{cases} \quad \begin{cases} A=B \\ A=C \end{cases} \quad \begin{cases} A=C \\ B=C \end{cases}$$

の, どの組み合わせを使って解いてもよい。

この3つの中から
2つ持ってきて
連立方程式を作る

$$A=B=C$$



$$A=B$$

$$B=C$$

$$A=C$$

例題 12 次の方程式を解きなさい。

$$x+2y=4x+7y=1$$

参考

$$x+2y=4x+7y=1 \begin{cases} \star & x+2y=4x+7y \\ \star & 4x+7y=1 \\ \star & x+2y=1 \end{cases}$$

この3つの式の中で
簡単そうな式を2つ使おう!

解答 次の連立方程式を解けばよい。

$$\begin{cases} x+2y=1 & \dots\dots ① \\ 4x+7y=1 & \dots\dots ② \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} ① \times 4 \\ ② \\ \hline 4x+8y=4 \\ -) 4x+7y=1 \\ \hline y=3 \end{array}$$

$y=3$ を ① に代入すると

$$y=3 \rightarrow ①: x+2 \times 3=1$$

$$x+2 \times 3=1$$

$$x=-5$$

答 $x=-5, y=3$

$$\begin{array}{c} ① \\ \hline x+2y=4x+7y=1 \\ \hline ② \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x \text{ を消す } \\ x+2y=1 \xrightarrow{4\text{倍}} 4x+8y=4 \\ 4x+7y=1 \xrightarrow{\text{そのまま}} 4x+7y=1 \end{array}$$

参考 次の組み合わせで連立方程式を解いてみます

$$\begin{cases} x+2y=4x+7y & \dots\dots ① \\ 4x+7y=1 & \dots\dots ② \end{cases}$$

①を移項すると

$$\begin{array}{l} \text{ここを消す} \quad x+2y-4x-7y=0 \\ \text{ために足す} \quad -3x-5y=0 \dots\dots ③ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ③ \times 4 \\ ② \times 3 \\ \hline -12x-20y=0 \\ +) 12x+21y=3 \\ \hline y=3 \end{array}$$

$y=3$ を ② に代入すると

$$4x+7 \times 3=1 \quad y=3 \rightarrow ②: 4x+7y=1$$

$$4x+21=1$$

$$\text{両辺4で割る} \rightarrow 4x=-20$$

$$(-20) \div 4 = -5 \quad x=-5$$

答 $x=-5, y=3$

$$\begin{array}{c} ① \\ \hline x+2y=4x+7y=1 \\ \hline ② \end{array}$$

③と②で連立方程式を考える

$$\begin{array}{l} x \text{ を消す } \\ -3x-5y=0 \xrightarrow{4\text{倍}} -12x-20y=0 \\ 4x+7y=1 \xrightarrow{3\text{倍}} 12x+21y=3 \end{array}$$

$A=B=\text{数字}$ のタイプの問題は, さきほどの解答のように

$\begin{cases} A=\text{数字} \\ B=\text{数字} \end{cases}$ とした方が計算が楽になります。

練習 26 次の方程式を解きなさい。

(1) $2x - 5y = 4x + 3y = 13$

(2) $5x + 3y = 3x + 2y - 4 = -9$

(3) $x - 2y = 7x = 5x - y - 1$

解答

(1)
$$\begin{array}{c} \text{①} \quad \text{②} \\ \boxed{2x-5y} = \boxed{4x+3y} = \boxed{13} \end{array}$$

を解くには、次の連立方程式を解けばよい。

$$\begin{cases} 2x - 5y = 13 & \cdots \cdots \text{①} \\ 4x + 3y = 13 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

② $\times 2$ $\rightarrow 8x + 6y = 26$

$$\begin{array}{r} 2x - 5y = 13 \\ -) 8x + 6y = 26 \\ \hline -6x - 11y = 13 \end{array}$$

① $\times 3$ $\rightarrow 6x - 15y = 39$

$$\begin{array}{r} 6x - 15y = 39 \\ +) -6x - 11y = 13 \\ \hline -4y = 26 \end{array}$$

両辺 -4 で割る $\rightarrow y = -\frac{13}{2}$

$y = -\frac{13}{2}$ を①に代入すると

$$2x - 5 \times \left(-\frac{13}{2}\right) = 13$$

$$2x + \frac{65}{2} = 13$$

$$2x = 13 - \frac{65}{2} = \frac{26 - 65}{2} = -\frac{39}{2}$$

$$x = -\frac{39}{4}$$

よって $x = -\frac{39}{4}, y = -\frac{13}{2}$

(2)
$$\begin{array}{c} \text{①} \quad \text{②} \\ \boxed{5x+3y} = \boxed{3x+2y-4} = \boxed{-9} \end{array}$$

を解くには、次の連立方程式を解けばよい。

$$\begin{cases} 5x + 3y = -9 & \cdots \cdots \text{①} \\ 3x + 2y - 4 = -9 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

②より $3x + 2y = -5$ $\cdots \cdots \text{③}$

① $\times 2$ $\rightarrow 10x + 6y = -18$

③ $\times 3$ $\rightarrow 9x + 6y = -15$

$$\begin{array}{r} 10x + 6y = -18 \\ -) 9x + 6y = -15 \\ \hline x = -3 \end{array}$$

③と①で連立方程式を考える

$$\begin{cases} 5x + 3y = -9 & \xrightarrow{2\text{倍}} 10x + 6y = -18 \\ 3x + 2y = -5 & \xrightarrow{3\text{倍}} 9x + 6y = -15 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 10x + 6y = -18 \\ -) 9x + 6y = -15 \\ \hline x = -3 \end{array}$$

$x = -3$ を③に代入すると

$$3 \times (-3) + 2y = -5$$

$$-9 + 2y = -5$$

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

よって $x = -3, y = 2$

両辺2で割る $\rightarrow y = 2$

$4 \div 2 = 2$ $y = 2$ $\rightarrow x = -3, y = 2$

注意 $A = B = \text{数字}$ のタイプの問題は
 $\begin{cases} A = \text{数字} \\ B = \text{数字} \end{cases}$
 とした方が計算が楽になる。

(3)
$$\begin{array}{c} \text{①} \quad \text{②} \\ \boxed{x-2y} = \boxed{7x} = \boxed{5x-y-1} \end{array}$$

を解くには、次の連立方程式を解けばよい。

$$\begin{cases} x - 2y = 7x & \cdots \cdots \text{①} \\ 7x = 5x - y - 1 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

①を移項して $x - 2y - 7x = 0$ よって $-6x - 2y = 0$ $\cdots \cdots \text{③}$

②を移項して $7x - 5x + y = -1$ よって $2x + y = -1$ $\cdots \cdots \text{④}$

③ $\times 4$ $\rightarrow -24x - 8y = 0$

④ $\times 6$ $\rightarrow 12x + 6y = -6$

$$\begin{array}{r} -24x - 8y = 0 \\ +) 12x + 6y = -6 \\ \hline -12x - 14y = -6 \end{array}$$

③と④で連立方程式を考える

$$\begin{cases} -6x - 2y = 0 & \xrightarrow{\text{そのまま}} -6x - 2y = 0 \\ 2x + y = -1 & \xrightarrow{3\text{倍}} 6x + 3y = -3 \end{cases}$$

③ $\times 4$ $\rightarrow -24x - 8y = 0$

④ $\times 6$ $\rightarrow 12x + 6y = -6$

$$\begin{array}{r} -24x - 8y = 0 \\ +) 12x + 6y = -6 \\ \hline -12x - 14y = -6 \end{array}$$

③と④で連立方程式を考える

$$\begin{cases} -6x - 2y = 0 & \xrightarrow{\text{そのまま}} -6x - 2y = 0 \\ 2x + y = -1 & \xrightarrow{3\text{倍}} 6x + 3y = -3 \end{cases}$$

$-6x - 2y = 0$ $\rightarrow -6x = 2y$ $\rightarrow x = -\frac{2}{3}y$

④: $2x + y = -1$

$x = -\frac{2}{3}y$ を④に代入すると

$$2 \times \left(-\frac{2}{3}y\right) + y = -1$$

$$-\frac{4}{3}y + y = -1$$

$$-\frac{1}{3}y = -1$$

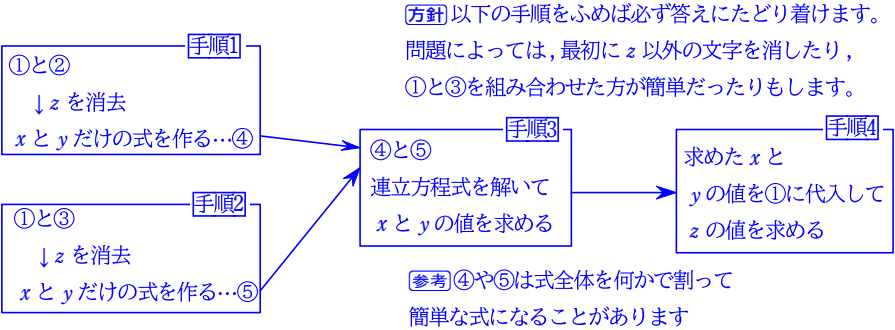
$$y = 3$$

よって $x = 1, y = 3$

<連立 3 元 1 次方程式> 文字が3種類だから 3元

3つの文字を含む1次方程式を **3 元 1 次方程式** という。

このような方程式を連立させた連立方程式を解くには、まず1つの文字を消去して、他の2つの文字の連立方程式を導き、それを解けばよい。



例題 13 次の連立 3 元 1 次方程式を解きなさい。

$\begin{cases} x+y+z=0 & \cdots \cdots \text{①} \\ 3x+4y+2z=-1 & \cdots \cdots \text{②} \\ 3x-y+z=10 & \cdots \cdots \text{③} \end{cases}$

解答

まず、z を消去する。

② $3x+4y+2z=-1$

①×2 $-) 2x+2y+2z=0$

$x+2y=-1 \cdots \cdots \text{④}$

③ $3x-y+z=10$

① $-) x+y+z=0$

$2x-2y=10 \cdots \cdots \text{⑤}$

よって $x-y=5$

④, ⑤ より

④ $x+2y=-1$

⑤ $-) x-y=5$

$3y=-6$

両辺3で割る $y=-2$

⑤ $(-6) \div 3 = -2$

$y=-2$ を ④ に代入すると

$$x+2 \times (-2) = -1$$
$$x-4 = -1$$
$$x = 3$$

よって $x=3, y=-2$

これらを ① に代入して

$$3+(-2)+z=0$$
$$1+z=0$$
$$z=-1$$

答 $x=3, y=-2, z=-1$

z を消す

$$\begin{array}{rcl} 3x+4y+2z & = & -1 \\ x+y+z & = & 0 \end{array} \xrightarrow{\text{そのまま}} \begin{array}{rcl} 3x+4y+2z & = & -1 \\ 2z+2y+2z & = & 0 \end{array} \xrightarrow{2\text{倍}}$$

①と③は何倍かしなくても、
引けば z が消える
この式を⑤にするのではなく、
この式を2で割って出てくる式を⑤とする。

$2x$
↓
 $2x \div 2$

$-2y$
↓
 $-2y \div 2$

$=10$
↓
 $=10 \div 2$

$2x \div 2 - 2y \div 2 = 10 \div 2$

2で割る

練習 27 次の連立 3 元 1 次方程式を解きなさい。

$$(1) \begin{cases} x - y + z = 8 \\ 2x + 2y + z = -6 \\ 3x + y + 4z = 6 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x + 3y + 2z = 8 \\ x - 2y + z = -3 \\ 4x - y + 3z = 2 \end{cases}$$

解答

$$(1) \begin{cases} x - y + z = 8 & \dots\dots ① \\ 2x + 2y + z = -6 & \dots\dots ② \\ 3x + y + 4z = 6 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

まず、 z を消去する。

$$\begin{array}{r} ② \\ ① \\ \hline 2x + 2y + z = -6 \\ -) x - y + z = 8 \\ \hline x + 3y = -14 \quad \dots\dots ④ \end{array}$$

①と②は何倍かしなくても、
引けば z が消える
 $2y - (-y) = 2y + y = 3y$

$$\begin{array}{r} ① \times 4 \\ ③ \\ \hline 4x - 4y + 4z = 32 \\ -) 3x + y + 4z = 6 \\ \hline x - 5y = 26 \quad \dots\dots ⑤ \end{array}$$

ここを消す
ために引く

$$\begin{array}{l} z \text{ を消す} \\ x - y + z = 8 \xrightarrow{4\text{倍}} 4x - 4y + 4z = 32 \\ 3x + y + 4z = 6 \xrightarrow{\text{そのまま}} 3x + y + 4z = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ④, ⑤ \text{ より} \\ ④ \\ ⑤ \\ \hline x + 3y = -14 \\ -) x - 5y = 26 \\ \hline 8y = -40 \end{array}$$

ここを消す
ために引く

$$\begin{array}{l} \text{両辺 8 で割る} \quad 8y = -40 \\ (-40) \div 8 = -5 \quad y = -5 \end{array}$$

$3y - (-5y) = 3y + 5y = 8y$

$y = -5$ を ④ に代入すると

$$\begin{array}{l} x + 3 \times (-5) = -14 \\ x - 15 = -14 \\ x = 1 \end{array}$$

$y = -5$ を ④ に代入すると
 $④: x + 3y = -14$

よって $x = 1, y = -5$

これらを ① に代入して

$$\begin{array}{l} 1 - (-5) + z = 8 \\ 1 + 5 + z = 8 \\ 6 + z = 8 \\ z = 2 \end{array}$$

$①: x - y + z = 8$

以上から $x = 1, y = -5, z = 2$

$$(2) \begin{cases} 2x + 3y + 2z = 8 & \dots\dots ① \\ x - 2y + z = -3 & \dots\dots ② \\ 4x - y + 3z = 2 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

まず、 z を消去する。

$$\begin{array}{r} ① \\ ② \times 2 \\ \hline 2x + 3y + 2z = 8 \\ -) 2x - 4y + 2z = -6 \\ \hline 7y = 14 \end{array}$$

ここを消す
ために引く
 z を消す
そのまま
 $2x + 3y + 2z = 8 \xrightarrow{\text{そのまま}} 2x + 3y + 2z = 8$
 $x - 2y + z = -3 \xrightarrow{2\text{倍}} 2x - 4y + 2z = -6$

$$\begin{array}{l} \text{ここも} \\ \text{たまたま消えた} \end{array}$$

両辺 7 で割る $y = 2$
 $14 \div 7 = 2$

$$\begin{array}{r} ② \times 3 \\ ③ \\ \hline 3x - 6y + 3z = -9 \\ -) 4x - y + 3z = 2 \\ \hline -x - 5y = -11 \quad \dots\dots ④ \end{array}$$

ここを消す
ために引く

①と③で z を消しにいてもいいが、 z の係数を
見ると①も③も何倍かしなければならない。
②と③ならば②の方だけ何倍かすると z が消える
ので、ここでは②と③を考えている。

$$\begin{array}{l} z \text{ を消す} \\ x - 2y + z = -3 \xrightarrow{3\text{倍}} 3x - 6y + 3z = -9 \\ 4x - y + 3z = 2 \xrightarrow{\text{そのまま}} 4x - y + 3z = 2 \end{array}$$

④ に $y = 2$ を代入して

$$\begin{array}{l} -x - 5 \times 2 = -11 \\ -x - 10 = -11 \\ -x = -1 \end{array}$$

$y = 2$ を代入して
 $④: -x - 5y = -11$

$$\begin{array}{l} \text{両辺に } (-1) \text{ をかける} \\ -x = -1 \\ x = 1 \end{array}$$

よって $x = 1, y = 2$

これらを ② に代入して

$$\begin{array}{l} 1 - 2 \times 2 + z = -3 \\ 1 - 4 + z = -3 \\ -3 + z = -3 \\ z = -3 + 3 \\ z = 0 \end{array}$$

$②: x - 2y + z = -3$

以上から $x = 1, y = 2, z = 0$

