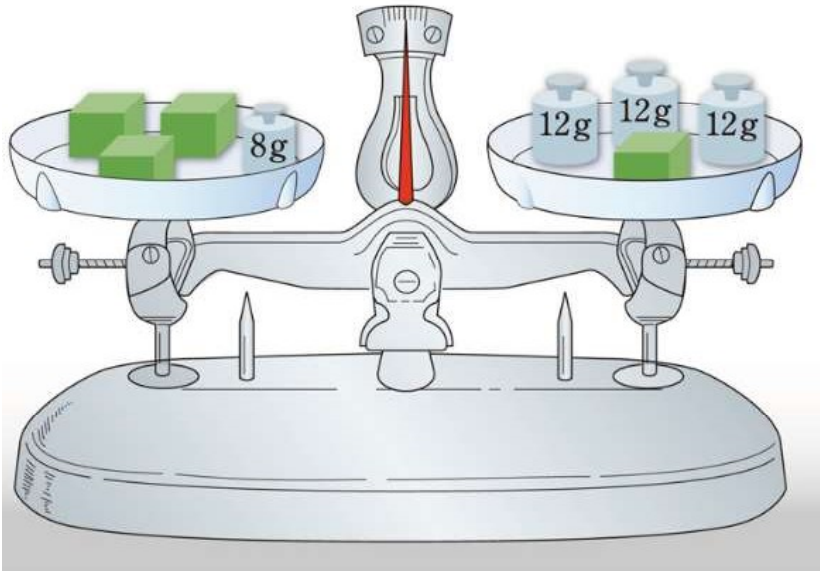


第3章「方程式」1 方程式とその解

重さの分からない緑の物体があります。天びんに乗せたら下のようになりました。
物体の重さを求めることができますか？



<等式>

数量が等しいという関係を式で表してみよう。

$$a \times 2 + b \times 5 = 2a + 5b$$

1個 a 円のケーキを2個と、1個 b 円のクッキーを5個買ったとき、
代金の合計は1200円であった。

このとき、代金の関係は、等号 $=$ を用いて

$$2a + 5b = 1200$$

と表すことができる。

このように、等号を用いて数量が等しいという関係を表した式を **等式 (とうしき)** という。等式において、等号の左側の式を **左辺 (さへん)**、右側の式を **右辺 (うへん)**、左辺と右辺を合わせて **両辺 (りょうへん)** という。

等式

$2a + 5b = 1200$

左辺 右辺

└── 両辺 ─┘

参考

$2a + 5b = 1200$ について、左辺と右辺を入れ替えて $1200 = 2a + 5b$ としてもよい。
しかし、文字式は左辺で数字は右辺にすることが多い。

例1 20 km の道のりを、時速 6 km で a 時間走ると、残りが b km
であった。残りの道のりについて、等式で表すと

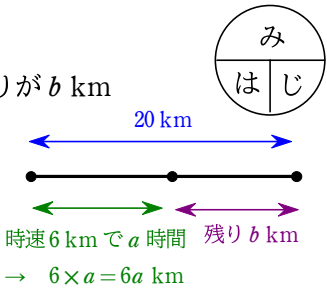
$$20 - 6a = b$$

また、全体の道のりについて、等式で表すと

$$6a + b = 20$$

何に着目するかによって、いろいろな等式ができる

$20 - b = 6a$ でもよい。

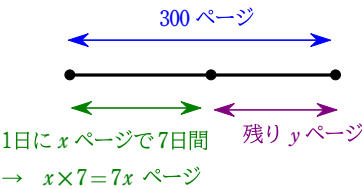


練習1 次の数量の関係を等式で表しなさい。

- (1) 300 ページの本を、1 日に x ページずつ 7 日間読むと、 y ページ残った。
- (2) 時速 9 km で a 時間走ったあと、時速 3 km で b 時間歩くと、合わせて 10 km 進んだ。
- (3) 3 個のおもりがある。おもりの重さはそれぞれ x g、 y g、15 g で、その重さの平均は z g であった。

解答

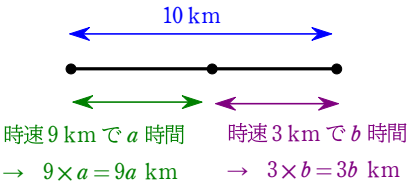
- (1) 300 ページの本を、1 日に x ページずつ
7 日間読んだとき、残ったページ数は
 $300 - x \times 7 = 300 - 7x$
よって、等式は $300 - 7x = y$



参考

全体のページ数について $7x + y = 300$ としてもよい。

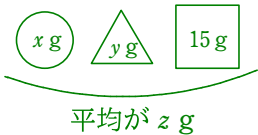
- (2) 時速 9 km で a 時間走ったあと、
時速 3 km で b 時間歩くとき、進んだ道のりは
 $9 \times a + 3 \times b = 9a + 3b$
よって、等式は $9a + 3b = 10$



- (3) 重さが、それぞれ x g、 y g、15 g である 3 個のおもりの重さの平均は

$$(x + y + 15) \div 3 = \frac{x + y + 15}{3}$$

よって、等式は $\frac{x + y + 15}{3} = z$



参考

3 個の平均が z g であるから、重さの合計は $z \times 3 = 3z$ g になる。
一方で重さの合計は $(x + y + 15)$ g であるから、 $x + y + 15 = 3z$ という等式でもよい。

<方程式>

ある自然数 x を 4 倍して 3 をひくと 17 になった。
この関係は、等号を用いて

$$4x - 3 = 17 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

と表すことができる。

① の等式の左辺の x に、自然数を代入すると、 $4x - 3$ の値は右の表のようになる。

x	1	2	3	4	5	6	7	...
$4x - 3$	1	5	9	13	17	21	25	...

$x = 5$ のとき、① について

(左辺) $= 4 \times 5 - 3 = 17$

(右辺) $= 17$ となる。

表から、 $x = 5$ のとき、① の等式の

左辺と右辺の値が等しくなり、等式は成り立つ。

すなわち、5 は① の等式を成り立たせる x の値である。

左辺

$4x - 3 = 17$

$x = 1$ のとき $4 \times 1 - 3 \neq 17$

$x = 2$ のとき $4 \times 2 - 3 \neq 17$

$x = 5$ のとき $4 \times 5 - 3 = 17$

① のように、 x の値によって、成り立ったり成り立たなかったりする等式を、 x についての 方程式 (ほうていしき) という。

また、方程式を成り立たせる文字の値を、その方程式の 解 (かい) といい、
解を求めることを、方程式を 解 (と) く という。

つまり、5 は、方程式① の解である。「解は $x = 5$ 」と書くこともある。

参考

x が入った等式がすべて方程式ではありません。ある特定の x しかイコールにならない等式を方程式といいます。上で見たように $4x - 3 = 17$ の x に何を代入しても、必ずイコールにはならないですね。

前の章で習った $2x + 3x = 5x$ はどうでしょう。 $2x$ と $3x$ は同類項なので、まとめられますね。この式の x に数を代入してみましょう。

左辺

右辺

$2x + 3x = 5x$

$x = 1$ のとき $2 \times 1 + 3 \times 1 = 5 \times 1$

$x = 2$ のとき $2 \times 2 + 3 \times 2 = 5 \times 2$

$x = 5$ のとき $2 \times 5 + 3 \times 5 = 5 \times 5$

このように、どんな x を代入しても両辺は同じ計算結果となり、イコールが成り立ちます。このような式は方程式とはいいません。

練習 2 次の方程式のうち、 -3 が解であるものを選びなさい。

(ア) $2x+5=-3$

(イ) $-3x=-x+6$

(ウ) $x-1=3x+5$

(エ) $2(x-1)=4x-3$

解答

(ア) $2x+5=-3$ の左辺に $x=-3$ を代入すると $2 \times (-3) + 5 = -1$

よって、等式は成り立たないから、

$$2 \times x + 5 = -3$$

-3 はこの方程式の解ではない。

$$2 \times (-3) + 5 \neq -3$$

(イ) $-3x=-x+6$ の両辺に $x=-3$ を代入すると、

左辺は $-3 \times (-3) = 9$

$$-3 \times x = -x + 6$$

右辺は $-(-3) + 6 = 9$

$$-3 \times (-3) = -(-3) + 6$$

よって、等式は成り立つから、 -3 はこの方程式の解である。

(ウ) $x-1=3x+5$ の両辺に $x=-3$ を代入すると、

左辺は $-3-1=-4$

$$x-1=3x+5$$

右辺は $3 \times (-3) + 5 = -4$

$$(-3)-1=3 \times (-3)+5$$

よって、等式は成り立つから、 -3 はこの方程式の解である。

(エ) $2(x-1)=4x-3$ の両辺に $x=-3$ を代入すると、

左辺は $2 \times (-3-1) = -8$

$$2 \times (x-1) = 4x - 3$$

右辺は $4 \times (-3) - 3 = -15$

$$2 \times [(-3)-1] \neq 4 \times (-3) - 3$$

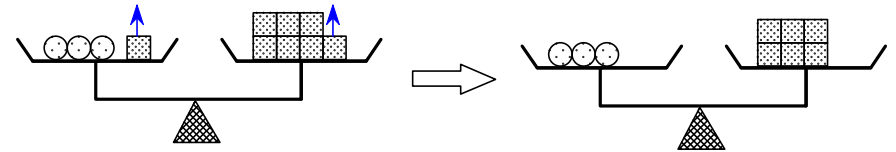
よって、等式は成り立たないから、 -3 はこの方程式の解ではない。

したがって、 -3 が解である方程式は

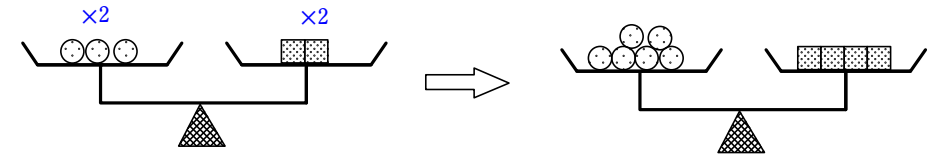
(イ), (ウ)

方程式の解は整数とは限らない。そのため、いろいろな値を代入しても、解がなかなか見つからないことがある。これからは、等式の性質を用いることも考えてみよう。

右の図のようにつり合っている天びんについて、左右の皿に同じ重さのものをのせたり、左右の皿から同じ重さのものを取り除いたりしても、天びんはつり合ったままである。



また、左右の皿にのっているものをそれぞれ2倍、3倍、……としたり、それぞれ2でわる、3でわる、……としたりしても、天びんはつり合ったままである。



等式も、つり合っている天びんと同じような性質をもっている。

一般に、等式には次の性質がある。

等式の性質

[1] 等式の両辺に同じ数をたしても、等式は成り立つ。

$$A = B \quad \text{ならば} \quad A + C = B + C$$

[2] 等式の両辺から同じ数をひいても、等式は成り立つ。

$$A = B \quad \text{ならば} \quad A - C = B - C$$

[3] 等式の両辺に同じ数をかけても、等式は成り立つ。

$$A = B \quad \text{ならば} \quad AC = BC$$

[4] 等式の両辺を同じ数でわっても、等式は成り立つ。

$$A = B \quad \text{ならば} \quad \frac{A}{C} = \frac{B}{C} \quad \text{ただし, } C \neq 0$$

注意 [4] の $C \neq 0$ は、 C が 0 に等しくないことを表す。

また、等式の両辺を入れかえても、その等式は成り立つ。

$$A = B \quad \text{ならば} \quad B = A$$

方程式は，等式の性質を用いて， $x=\square$ の形になるように変形して解くことができる。

例 2

方程式 $x+3=2$ を解く。

両辺から 3 をひくと

$$\begin{array}{rcl} x+3 & -3 & =2-3 \\ \hline x & & =-1 \end{array}$$

0になる

$x=-1$

左辺の+3が邪魔なので
符号を変えたものを足す

← 等式の性質 [2]

例 2 において，方程式 $x+3=2$ の左辺に， $x=-1$ を代入すると 2 になるから， -1 が方程式 $x+3=2$ の解であることが確かめられる。

練習 3 次の方程式を解きなさい。 「解きなさい」は「 $x=$ 」にすること

- (1) $x+4=8$
- (2) $x-9=-2$
- (3) $-5+x=1$

解答

(1)

$$\begin{array}{rcl} x+4 & = & 8 \\ \hline x+4-4 & = & 8-4 \\ x & = & 4 \end{array}$$

両辺から 4 をひくと

左辺の+4が邪魔なので
符号を変えたものを足す

(2)

$$\begin{array}{rcl} x-9 & = & -2 \\ \hline x-9+9 & = & -2+9 \\ x & = & 7 \end{array}$$

両辺に 9 をたすと

左辺の-9が邪魔なので
符号を変えたものを足す

(3)

$$\begin{array}{rcl} -5+x & = & 1 \\ \hline -5+x+5 & = & 1+5 \\ x & = & 6 \end{array}$$

両辺に 5 をたすと

左辺の-5が邪魔なので
符号を変えたものを足す

例3 方程式 $4x = -12$ を解く。

両辺を4でわると

$$\frac{4x}{4} = \frac{-12}{4}$$

← 等式の性質[4]

$$x = -3$$

左辺の×4が邪魔なので邪魔なもので割る。もしくは逆数を掛ける。

x の係数が1になる

注意 (よくある間違い)

$$4x = -12$$

$$4x - 4 = -12 - 4$$

$$x = -16$$

注意 例3は、等式の性質[3]を用いて、両辺に $\frac{1}{4}$ をかけてもよい。

$$4x \times \frac{1}{4} = -12 \times \frac{1}{4}$$

$$x = -3$$

足し算が邪魔なら引き算を、掛け算が邪魔なら割り算を。

練習4 次の方程式を解きなさい。

(1) $-2x = 10$

(2) $6x = -4$

(3) $\frac{x}{3} = -2$

(4) $-\frac{3}{4}x = -9$

解答

(1) $-2x = 10$

両辺を -2 でわると

$$\frac{-2x}{-2} = \frac{10}{-2}$$

約分

$$x = -5$$

← マイナスに注意

(2) $6x = -4$

両辺を6でわると

$$\frac{6x}{6} = \frac{-4}{6}$$

約分

$$x = -\frac{2}{3}$$

(3) $\frac{x}{3} = -2$

両辺に3をかけると

$$\frac{x}{3} \times 3 = -2 \times 3$$

$$x = -6$$

(4) $-\frac{3}{4}x = -9$

両辺に $-\frac{4}{3}$ をかけると

$$-\frac{3}{4}x \times \left(-\frac{4}{3}\right) = -9 \times \left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$x = 12$$

負×負=正に注意

参考

両辺に (-1) を掛けて

$$2x = -10$$

両辺2で割って

$$\frac{2x}{2} = \frac{-10}{2}$$

$$x = -5$$

苦手な人は左辺にマイナスがつかないようにしてから割ってもよい。

左辺の×(-2)が邪魔なので邪魔なもので割る。

左辺の×6が邪魔なので邪魔なもので割る。

左辺の× $\frac{1}{3}$ が邪魔なので邪魔なもので割りたいがそれよりも逆数の3を掛けた方が楽である。

左辺の× $\left(-\frac{3}{4}\right)$ が邪魔なので邪魔なもので割りたいがそれよりも逆数の $\left(-\frac{4}{3}\right)$ を掛けた方が楽である。

両辺に (-4) を掛けて

$$-\frac{3}{4}x \times (-4) = -9 \times (-4)$$

$$3x = 36$$

両辺3で割って

$$\frac{3x}{3} = \frac{36}{3}$$

$$x = 12$$

苦手な人は左辺にマイナスがつかないように、そして左辺が分数にならないようにしてから割ってもよい。