

第2章「式の計算」5 文字式の利用

問題1

奇数を2つ想像してください。そして、その2つを足してください。
いくつになりましたか？
その数は奇数ですか？偶数ですか？

問題2

偶数を2つ想像してください。そして、その2つを足してください。
いくつになりましたか？
4の倍数ですか？

研究

問題1ではクラス全員が偶数になりました(奇数になった人は計算ミスです)。
では、クラス全員が偶数になったから「2つの奇数の和は偶数である」と
言い切っていいのでしょうか？奇数と言っても無限にあります。全てを調べる
ことは不可能です。

→ 文字を用いて説明すれば、すべての奇数を表すことができます。
また、問題2ではクラスの何人かは4の倍数になったかもしれませんが
これでは「2つの偶数の和は4の倍数である」と言ってはダメです。
問題1の「2つの奇数の和は偶数である」とは
「どんな2つの奇数の和も必ず偶数である」ことを説明すると思ってください。

＜数に関する問題への利用＞

偶数は2でわり切れる数であるから、
 m を整数として、 $2m$ と表すことができる。
また、奇数は偶数に1を加えた数であるから、
 n を整数として、 $2n+1$ と表すことができる。
(偶数)+1

偶数 = 2の倍数 = $2 \times (\text{整数})$
(2の倍数は九九の2の段の数だから、
すべて $2 \times$ なんとか の形をしている)
整数の場所を m にすると $2 \times m$ より $2m$

文字が異なる理由
→ $2m$ と $2m+1$ は2と3や100と101など、連続する
偶数と奇数になる。以下の証明では自由に偶数と奇
数を考えたいので、文字を別にしている。

注意

「 m を整数として」などは必ず書きます。書かないとダメです。
例えば、「 $2m$ で表される数は偶数」と言ってしまうと
「 $2 \times 1.5 = 3$ だから、3も偶数ですね」と言い返されてしまいます。

これからは、偶数、奇数を、負の数を含めて考える。
偶数 ……， $-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots$
奇数 ……， $-5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots$
また、倍数は、0や負の数を含めて考える。

m	...	-2	-1	0	1	2	3	...
$2m$	...	-4	-2	0	2	4	6	...

n	...	-2	-1	0	1	2	3	...
$2n+1$	...	-3	-1	1	3	5	7	...

m や n にいろいろな数を代入していくと、 $2m$ の計算結果は偶数、 $2n+1$ の計算結果は奇数となります。

例題4 2つの奇数の和は偶数である。そのわけを、文字を用いて説明しなさい。

参考) <https://media.qikeru.me/mojishiki-riyo/>

- 手順1：問題文の中の数字を数学語(文字式)で表す
手順2：問題文の指示を文字式で計算する
手順3：手順2を無理矢理変形して結論を文字式で見せつける



2つの奇数の和は偶数である。
手順1 手順3

解答 2つの奇数は、 m, n を整数とすると
 $2m+1, 2n+1$
と表される。
この2つの数の和は
 $(2m+1) + (2n+1) = 2m+2n+2$
 $= 2(m+n+1)$
 $m+n+1$ は整数であるから、 $2(m+n+1)$ は偶数である。
よって、2つの奇数の和は偶数である。 終

これは絶対に書くこと(ちなみに、整数+整数+1は整数になります。小数にはなりませんよね。)
手順3
問題文で「和は偶数」と言っているので、 $2m+2n+2$ が偶数になることを見せつける。
つまり $2 \times (\text{整数})$ の数だと見せつけられたいので、分配法則を用いて2を括弧の前にもってくる。
 $2m+2n+2 = 2 \times m + 2 \times n + 2 \times 1 = 2 \times (m+n+1) = 2(m+n+1)$

練習 35 奇数と偶数の和は奇数である。そのわけを、文字を用いて説明しなさい。

手順1

奇数と偶数は、 m, n を整数とすると、それぞれ
 $2m+1, 2n$
と表される。

手順2

この2つの数の和は
 $(2m+1)+2n=2m+2n+1$
 $=2(m+n)+1$
 $m+n$ は整数であるから、 $2(m+n)+1$ は奇数である。
よって、奇数と偶数の和は奇数である。

手順3

問題文で「和は奇数」と言っているので、 $2m+2n+1$ が偶数になることを見せつける。
つまり $2\times(\text{整数})+1$ の形の数だと見せつけられたいので、分配法則を用いて $2m+2n$ の部分だけ
2を括弧の前にもってくる。 $2m+2n+1=2\times m+2\times n+1=2\times(m+n)+1=2(m+n)+1$

手順1

異なる文字で表す
ことに注意

手順2

問題文で「和」と言っ
ているのでとりあえず足す。

手順3

問題文で「和は3の倍数」と言っている。つまり $3\times(\text{整数})$ の形の数だと見せつけられたい。

別解

連続する3つの整数は、 n を整数とすると
 $n-1, n, n+1$
と表される。
この3つの数の和は
 $(n-1)+n+(n+1)=3n$
 $3n$ は3の倍数であるから、
連続する3つの整数の和は3の倍数である。

手順1

連続しているので同じ文字で
表すことに注意。真ん中の数
を n としている。

手順2

問題文で「和」と言っているのでとりあえず足す。
 $n-1+n+n+1=1n+1n+1n+1-1=3n+0$

手順3

問題文で「和は3の倍数」と言っている。つまり $3\times(\text{整数})$ の形の数だと見せつけられたい。

手順2の結果 $3n=3\times n$ とこの形になっている。

参考 数学語の一覧)

数学語も英語のようなもので、この日本語はこの数学語に変えるというものが決まっています。
ただし、練習36のように複数あるものもあります。例えば偶数も、偶数から1少ない数も奇数であることから $2m-1$ も奇数を表します。手順1での表し方によって手順3での変形は変わってきますが、正しく変形してあればどの解答も正解になります。

0
5)
3
0
3

3を5で割ると商が0で余り3

日本語	例	数学語(式)
偶数	2, 4, 6, ...	$2n$
奇数	1, 3, 5, ...	$2n+1$
3の倍数	3, 6, 9, ...	$3n$
7の倍数	7, 14, 21, ...	$7n$
5で割ると3余る数	3, 8, 13, ...	$5n+3$
6で割ると1余る数	1, 7, 13, ...	$6n+1$

$2n-1$ でもよい

$13=5\times 2+3$
← (割られる数)
= (割る数) $\times$ 商+余り

練習 36 連続する3つの整数の和は3の倍数である。そのわけを、文字を用いて説明しなさい。

手順1

連続する3つの整数は、 n を整数とすると
 $n-1, n, n+1$
と表される。
この3つの数の和は
 $(n-1)+n+(n+1)=3n$
 $3n$ は3の倍数であるから、
連続する3つの整数の和は3の倍数である。

手順2

問題文で「和」と言っているのでとりあえず足す。
 $n-1+n+n+1=1n+1n+1n+1-1=3n+0$

手順3

問題文で「和は3の倍数」と言っている。つまり $3\times(\text{整数})$ の形の数だと見せつけられたい。

手順2の結果 $3n=3\times n$ とこの形になっている。

別解

連続する3つの整数は、 n を整数とすると $n, n+1, n+2$ と表される。
この3つの数の和は
 $n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)$
 $n+1$ は整数であるから、 $3(n+1)$ は3の倍数である。
連続する3つの整数の和は3の倍数である。

手順1

連続しているので同じ文字で
表すことに注意。真ん中の数
を n としている。

手順2

問題文で「和」と言っているのでとりあえず足す。
 $n-1+n+n+1=1n+1n+1n+1-1=3n+0$

手順3

問題文で「和は3の倍数」と言っている。つまり $3\times(\text{整数})$ の形の数だと見せつけられたい。

手順2の結果 $3n=3\times n$ とこの形になっている。

「連続する〇〇」「となりあった〇〇」とあったら、基準となる数を文字で表して、そこから増やしたり減らしたりしていきます。

n と $n+1$ と $n+2$ でもよい

日本語	例	数学語(式)
連続する2つの整数	2 と 3, 100 と 101	n と $n+1$
連続する3つの整数	1 と 2 と 3, 50 と 51 と 52	$n-1$ と n と $n+1$
となりあった奇数	1 と 3, 99 と 101	$2n-1$ と $2n+1$

$2n+1$ と $2n+3$ でもよい
($2n+1$ と $2n+2$ ではない)

「〇桁の整数」は次のように表します

日本語	例	数学語(式)
2けたの整数	$23=10\times 2+3$	$10a+b$
3けたの整数	$345=100\times 3+10\times 4+5$	$100a+10b+c$
4けたの整数	$4567=1000\times 4+100\times 5+10\times 6+7$	$1000a+100b+10c+d$

十の位が a で一の位が b である整数です。
(この数を ab と表してはダメです。 ab は $a\times b$ の省略です)

3けたの自然数を文字を用いて表してみよう。

百の位(くらい)の数を x
十の位の数を y
一の位の数を z

$$274 = 100 \times 2 + 10 \times 7 + 4$$

↓

↓

↓

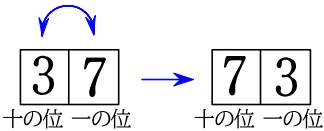
$$100 \times x + 10 \times y + z$$

とすると、3けたの自然数は、 $100x + 10y + z$ と表される。このとき、 x は1から9までの整数であり、 y, z は0から9までの整数である。

例題 5 2けたの自然数から、この自然数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数をひくと、その結果は9の倍数である。そのわけを説明しなさい。

手順2 手順3

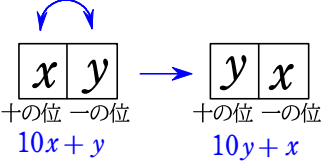
例 37 という自然数で考えます。すると
「この自然数の十の位の数と一の位の数を
入れかえた数」は73になります。
 $37 - 73 = -36$ となって、 -36 は9で割り切れます。



十の位や一の位にくる数は必ず自然数

解答 もとの自然数の十の位の数を x 、一の位の数を y とすると
もとの自然数は $10x + y$ 、入れかえた数は $10y + x$
と表される。

もとの数から入れかえた数をひくと



かつこの中の符号がすべて変わる

$$(10x + y) - (10y + x) = 10x + y - 10y - x$$

$$= 9x - 9y$$

$$= 9(x - y)$$

$$10x - 1x + 1y - 10y = (10 - 1)x + (1 - 10)y = 9x + (-9)y$$

$x - y$ は整数であるから、 $9(x - y)$ は9の倍数である。
よって、もとの数から入れかえた数をひいた結果は、
9の倍数である。 終

必ず書くこと 手順3

問題文で「結果は9の倍数」と言っているので、 $9x - 9y$ が9の倍数になることを見せつける。
つまり $9 \times (\text{整数})$ の形の数だと見せつけられたいので、分配法則を用いて9を括弧の前に持ってくる。

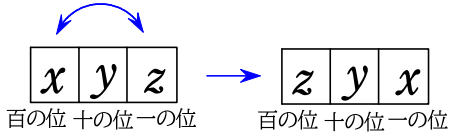
例題 4、例題 5 のような問題では、具体的な数で説明しても、すべての数について説明したことにはならない。このような場合、文字を用いて数を一般的に表すと、すべての数について説明することができる。

練習 37 3けたの自然数から、この自然数の百の位の数と一の位の数を入れかえた数をひくと、その結果は99の倍数である。そのわけを説明しなさい。

解答 手順2 手順3 たまに $100x + y$ などとして、十の位を忘れる人がいます
もとの自然数の百の位の数を x 、十の位の数を y 、一の位の数を z とすると

もとの自然数は $100x + 10y + z$

入れかえた数は $100z + 10y + x$



と表される。

もとの数から入れかえた数をひくと

かつこの中の符号がすべて変わる

$$(100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) = 100x + 10y + z - 100z - 10y - x$$

手順2

問題文で「ひく」と言っている。

$$= 99x - 99z$$

$$= 99(x - z)$$

$$100x - 1x + 10y - 10y + 1z - 100z = (100 - 1)x + (10 - 10)y + (1 - 100)z = 99x + 0y + (-99)z$$

$x - z$ は整数であるから、 $99(x - z)$ は99の倍数である。
よって、もとの数から入れかえた数をひいた結果は、99の倍数である。

必ず書くこと 手順3

問題文で「結果は99の倍数」と言っているので、 $99x - 99z$ が99の倍数になることを見せつける。
つまり $99 \times (\text{整数})$ の形の数だと見せつけられたいので、分配法則を用いて99を括弧の前に持ってくる。

＜図形に関する問題への利用＞

【例題6】 半径の差が a である大小2つの円がある。このとき、2つの円の周の長さの差を求めなさい。

【考え方】 2つの円の半径はわからないから、小さい円の半径を文字で表して考える。

【参考】 円周＝直径×円周率、円の面積＝半径×半径×円周率 円周率は3.14でなく π です。

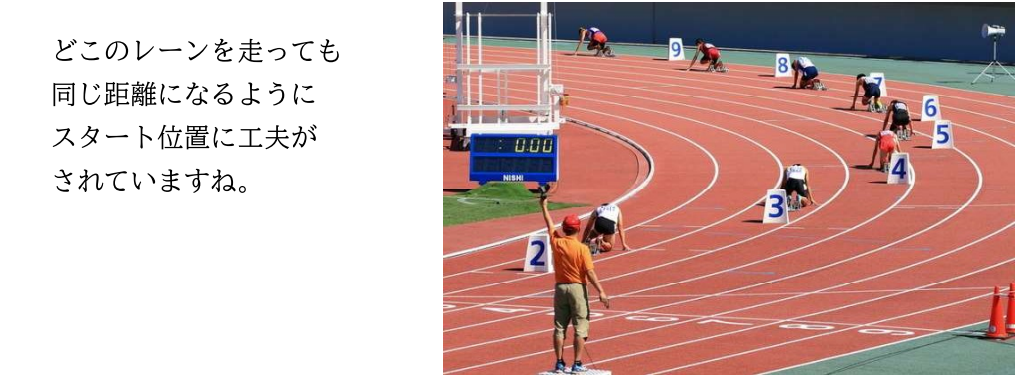
【解答】 小さい円の半径を r とすると、
大きい円の半径は $r+a$ と表される。
小さい円の周の長さは $2r \times \pi = 2\pi r$
大きい円の周の長さは $2(r+a) \times \pi = 2\pi(r+a)$
であるから、その差は

$$2\pi(r+a) - 2\pi r = \cancel{2\pi r} + 2\pi a - \cancel{2\pi r} = 2\pi a \quad \text{答}$$

直径＝半径 $\times 2 = r \times 2 = 2r$
(直径＝半径＋半径＝ $r+r=2r$)

【参考】

どこのレーンを走りますか？
内側？外側？



どこのレーンを走っても
同じ距離になるように
スタート位置に工夫が
されていますね。

<https://www.homemate-research-sports.com/spoguide/218/>

【練習38】 下の図のようなトラックがある。走る距離を、各レーンの内側のラインの長さ
と考えるとき、内側から1番目と2番目のレーンについて、次の問いに答えなさい。

- (1) 2つのレーンを1周するときの距離をそれぞれ求めなさい。
- (2) このトラックを1周するとき、ゴールは同じとして、2つのレーンの走る距離を
同じにするには、スタート地点をどのようにすればよいか答えなさい。

レーンの幅 (はば) a m
直線部分 s m
半円部分の半径 r m
ゴール

直線部分は内側のコースも
外側のコースも同じ長さ

- 【解答】
- (1) 内側から1番目のレーンの走る距離は、半径 r m の円の周の長さ、 s m の直線
2本分を加えたものであるから $2r \times \pi + s \times 2 = 2\pi r + 2s$ よって $(2\pi r + 2s)$ m
内側から2番目のレーンの走る距離は、半径 $(r+a)$ m の円の周の長さ、 s m の直
線2本分を加えたものであるから
- $$2(r+a) \times \pi + s \times 2 = 2\pi(r+a) + 2s \quad \text{よって } \{2\pi(r+a) + 2s\} \text{ m}$$
- (2) (1) より、2つのレーンの走る距離の差は

$$\{2\pi(r+a) + 2s\} - (2\pi r + 2s) = 2\pi(r+a) + 2s - 2\pi r - 2s = 2\pi r + 2\pi a - 2\pi r = 2\pi a$$

より、 $2\pi a$ m である。
つまり、内側から2番目のレーンの走る距離は、1番目のレーンの走る距離よりも
 $2\pi a$ m 長いということがわかる。よって、内側から2番目のレーンのスタート地点を
ゴール地点から $2\pi a$ m 先に設定すればよい。

内側から1番目のレーンのスタート位置
内側から2番目のレーンのスタート位置
ゴール
 $2\pi a$ m

【参考】
スタート位置の差は
 $2\pi a = 2 \times \pi \times \text{幅}$
で求められる。幅1 m のレーンなら
ば、 $2 \times 3.14 \times 1 = 6.28$ m だけ
スタート位置を離せば、全員同じ
距離を走ることになる。

40 ページの数あてゲームをして遊んでいます。



たいちさん

数字はいくつになった？

74 だよ。



けいこさん

最初に思い浮かべた数は 47 だよな？

正解！ どうして計算結果は、最初に思い浮かべた数の十の位と一の位を入れかえた数になるのかな？



第 2 章で学んだ「文字式」を用いて説明してみようよ。最初に思い浮かべた数の十の位を x ，一の位を y とすると，最初に思い浮かべた数は $10x + y$ と表すことができるよ。

計算のルールにしたがって，計算すると

- ① $(10x + y) + 9 \times y = 10x + y + 9y = 10x + 10y$
 - ② $(10x + 10y) \div 10 = x + y$
 - ③ $(x + y) + 9y = x + 10y$
- ③ で求めた $x + 10y$ は $10y + x$ だから，計算結果は最初に思い浮かべた数の十の位と一の位を入れかえた数になるよ。だから，数をあてることができるんだね。



文字を使うことの意味

たとえば，3 の倍数の判定法として，「ある自然数の各位の数の和が 3 でわり切れると，その自然数は 3 の倍数である」というものがあります。

この判定法が，すべての自然数において正しいかどうかを一度に確認することはできません。しかし，それを可能にするのが文字です。

3 けたの自然数の百の位を x ，十の位を y ，一の位を z とします。各位の数の和は 3 の倍数ですから，整数 n を用いて $x + y + z = 3n$ と表します。

$$\begin{aligned}
 \text{よって} \quad 100x + 10y + z &= (99 + 1)x + (9 + 1)y + z \\
 &= 99x + 9y + (x + y + z) && \leftarrow x + y + z = 3n \\
 &= 3(33x + 3y) + 3n && \leftarrow 3(33x + 3y + n)
 \end{aligned}$$

したがって，この 3 けたの自然数は 3 の倍数であることがわかります。同じように考えると，この判定法はすべての自然数でも成り立ちます。このように，文字を使うと，より広い範囲で一度に説明することができるのです。