数学発展課題

微分法の応用

（　）年（　）組（　）番 氏名（　　　　　　　　　　）

微分法の応用　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

1 関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ がある。ただし，対数は自然対数とする。

(1) $y = f(x)$ のグラフの増減を調べて，グラフの概形をかけ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^2} = 0$ であることは用いてよい。

(2) $a > \sqrt{e}$ とする。$y = f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ における接線と y 軸との交点を Q，また P から y 軸に下した垂線を PR とする。このとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3) (2) のとき，$S(a)$ の $a > \sqrt{e}$ のにおける最大値を求めよ。

微分法の応用

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

2 関数 $f(x) = \sqrt{2}e^x \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ がある。

(1) $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における最大値を M，最小値を m とするとき，$\log\left|\dfrac{M}{m}\right|$ の値を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

微分法の応用　　平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $f(x)=\dfrac{kx}{x^2+1}$ がある。ただし，k は正の定数である。

（1）導関数 $f'(x)$ を求めよ。

（2）$f(x)$ の極値を求めよ。

（3）$|x| \leqq k$ における最大値，最小値をそれぞれ M，m とする。$M-m=\dfrac{2}{3}$ となる k の値を求めよ。

微分法の応用

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{4}$ 関数 $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ があり，方程式 $f(x) = k$ は異なる正の解 α，β $(\alpha < \beta)$ をもっている。ただし，k は実数の定数とし，また必要ならば $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ であることを用いてよい。

(1) $x > 0$ とするとき，$f(x)$ の増減を調べ，その最大値を求めよ。

(2) k のとりうる値の範囲を求めよ。また，α のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $g(x) = f(1+x) - f(1-x)$ とするとき，正の実数 x に対して $g(x) > 0$ であることを示せ。また，それを用いて $\alpha + \beta > 2$ であることを示せ。

微分法の応用　　平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

$\boxed{5}$ 関数 $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4x+5}$ がある。

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $y = f(x)$ の増減，極値，グラフの漸近線を調べて，グラフの概形をかけ。

(3) $y = f(x)$ のグラフと傾き $\dfrac{3}{8}$ の直線が接するとき，接点の x 座標を求めよ。

微分法の応用

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

6 関数 $f(x) = (x+1)e^{-x}$ の表す曲線を C とする。

(1) $f'(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 C 上の点 P$(t,\ (t+1)e^{-t})$ (ただし，$t > 0$) における C の接線が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ A，B とする。A，B の座標を求めよ。

(3) O を原点とする。(2) の点 B の y 座標が最大となるとき，三角形 OAB の面積を求めよ。

微分法の応用　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

7 曲線 C ： $y=\cos 2x+1\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の上の点 $\mathrm{P}(t,\ \cos 2t+1)$ における接線を l とし，接線 l と y 軸との交点を $(0,\ a)$ とする。

(1) l の方程式を求めよ。また，a を t で表せ。

(2) 点 P が曲線上を動くとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $0<a<2$ のとき，点 $(0,\ a)$ から曲線 C に 2 本の接線を引く。この 2 本の接線が直交するような a の値を求めよ。

微分法の応用

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{8}$ O を原点とする xy 平面上に曲線 C ： $y = e\log x$ (e は自然対数の底) があり，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e\log t)$ における接線を l とする。また，接線 l が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ Q, R として，三角形 OQR の面積を S とする。ただし，$0 < t < 1$ とする。

(1) 直線 l の方程式を t を用いて表せ。

(2) S を t を用いて表せ。

(3) S の最大値とそのときの t の値を求めよ。

微分法の応用

平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

$\boxed{\mathbf{9}}$ 関数 $f(x) = \dfrac{(x-1)e^x + 1}{x}$ がある。ただし，e は自然対数の底とする。

（1）導関数 $f'(x)$ を求めよ。

（2）$x > 0$ において，$f(x)$ は単調増加であることを示せ。

微分法の応用　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

$\boxed{\mathbf{10}}$ 関数 $f(x) = e^x + ae^{-x}$ $(a > 0)$ がある。ただし，e は自然対数の底とする。

（1）$f'(x) = 0$ となる x の値を a で表せ。

（2）$f(x)$ の増減を調べ，極値を a で表せ。

（3）$0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最小値 m を a で表せ。

微分法の応用　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

11 $x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \dfrac{\log(1+x)}{x}$ がある。
ただし，対数は自然対数とする。

(1) $x > 0$ のとき，不等式 $\log(1+x) > \dfrac{x}{1+x}$ を示せ。

(2) $f(x)$ の増減を調べよ。

(3) $0 < a < b$ のとき，$(1+a)^b$ と $(1+b)^a$ の大小を調べよ。

微分法の応用

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

12 関数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ がある。ただし，e は自然対数の底とする。

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ に原点からひいた接線の方程式を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ。また，$y=f(x)$ のグラフを書け。ただし，グラフの凹凸は調べなくてもよい。また，必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty$ を用いてもよい。

微分法の応用

平成＿＿年＿＿月＿＿日

13 関数 $f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_n(x), \cdots$ を

$$\begin{cases} f_1(x) = x^2 - 10x + 30 \\ e^x f_{n+1}(x) = \dfrac{d}{dx}\{e^x f_n(x)\} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

で定義する。

(1) $f_n(x) = x^2 + a_n x + b_n$ とおいて数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ を定義する。$a_{n+1},\ b_{n+1}$ と $a_n,\ b_n$ との関係を求めよ。

(2) 関数 $f_n(x)$ を n を用いて表せ。

(3) $p,\ q$ を定数とするとき，曲線 $y = (x^2 + px + q)e^x$ が変曲点をもつための $p,\ q$ の条件を求めよ。

(4) 曲線 $y = f_n(x)e^x$ が変曲点をもつような n の値の範囲を求めよ。

微分法の応用　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{\mathbf{14}}$ n は 2 以上の自然数とする。
整式 $P(x) = x^n - na^{n-1}x + (n-1)a^n$ は $(x-a)^2$ で
割り切れることを示せ。

微分法の応用

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

15 $0 \leqq t \leqq 2\pi$ とする。
曲線 $x = a(t - \sin t)$，$y = a(1 - \cos t)$ 上の
点 P($a(\theta - \sin\theta)$，$a(1 - \cos\theta)$) における法線が，直線
$x = \pi a$ と交わる点を Q とする。ただし，a は正の定数
であり，点 P は点 $(\pi a,\ 2a)$ とは異なる点である。

（1）Q の y 座標を θ で表せ。

（2）θ を π に近づけるとき，Q はどのような点に近づくか。

微分法の応用

平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

16 2 つの曲線 $y=e^x$，$y=\sqrt{x+a}$ はともにある点 P を通り，しかも点 P において共通の接線をもっている。このとき，a の値と接線の方程式を求めよ。

微分法の応用

平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

17 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x} - e^{-ax}$ が $x > 0$ において極値をもつとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

微分法の応用

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

18 n を正の整数とする。関数 $f(x) = \dfrac{(\log x)^n}{x}$ の極大値を a_n とするとき，次の問いに答えよ。ただし，対数は自然対数とする。

(1) a_n を n を用いて表せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{na_n}$ を求めよ。

微分法の応用

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

19 関数 $f_n(x)$ $(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を
$f_n(x) = x^n e^{-(n-1)x}$ $(x \geqq 0)$ とするとき，次の問いに
答えよ。

（1）導関数 $f_n'(x)$ を求めよ。

（2）$f_n(x)$ が最大値をとるときの x の値 x_n と最大値 M_n を
求めよ。

（3）$\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^n M_n$ を求めよ。

微分法の応用

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{\mathbf{20}}$ 曲線 C ： $y = \log(x+1) + 1$ を考える。ただし，対数は自然対数とする。C 上の点 P から x 軸に下した垂線，P における C の法線，および x 軸で囲まれた三角形の面積を S とする。P の x 座標が負でないとき，S の最大値を求めよ。

微分法の応用

平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

$\boxed{\mathbf{21}}$ a は定数で，$0 < a < 1$ とする。
関数 $f(x) = -ax + \sqrt{x^2+1}$ の $0 \leqq x \leqq 3$ における最小値を場合分けをして求めよ。

微分法の応用

平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

$\boxed{\mathbf{22}}$ a を実数の定数とする。
方程式 $(a-1)e^x - x + 2 = 0$ の実数解の個数を a の値の範囲によって場合分けをして調べよ。

23 a, b を定数とするとき,
x の方程式 $\log x = ax + b$ について, 次の問いに答えよ。

(1) $a \leqq 0$ のとき, この方程式はただ 1 つの実数解をもつことを示せ。

(2) $a > 0$ のとき, この方程式が実数解をもつための条件を a, b で表せ。

(3) (2) で得られた条件を満たす点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を図示せよ。

微分法の応用　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

24 a を 0 でない実数とする。2 つの曲線 $y=e^x$，$y=ax^2$ の両方に接する直線の本数を求めよ。

微分法の応用

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{\mathbf{25}}$ 関数 $f(x) = \dfrac{a - \cos x}{x^2}$ が $0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で増加関数となるような定数 a のうちで最大のものを求めよ。

微分法の応用

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

26 $x > 0$ のとき，任意の自然数 n に対して不等式

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

が成り立つことを証明せよ。

微分法の応用　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

27 $f(x) = x^2 + 4n\cos x + 1 - 4n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ として次の問いに答えよ。

(1) 各 n に対して $f(x) = 0,\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 x がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) (1) の条件を満たす x を x_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ であることを示せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nx_n^2$ を求めよ。

微分法の応用

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

28 L を正の定数とし，周の長さが L の正 n 角形 $(n = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$ の外接円の半径を r_n とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) r_n を L と n を用いて表せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r_n$ を求めよ。

(3) $r_n > r_{n+1}$ を示せ。

微分法の応用

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

29 $0 < a < b$ のとき，不等式

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\log b - \log a} < \frac{a+b}{2}$$

を示せ。ただし，対数は自然対数とする。

微分法の応用

平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

$\boxed{\textbf{30}}$ 関数 $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^2}$ の増減，極値，凹凸，および変曲点を調べて，そのグラフを書け。