

①

(1)

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2} \quad \text{定義域は } x > 0$$

$$f'(x) = \frac{(\log x)' x^2 - (\log x) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \log x \cdot 2x}{x^4}$$

$$= \frac{x - 2x \log x}{x^4}$$

$$= \frac{1 - 2 \log x}{x^3}$$

分子・分母
xで割る

$$f'(x) = 0 \text{ とするとき}$$

$$1 - 2 \log x = 0 \quad \text{より} \quad \log x = \frac{1}{2}$$

$$\text{より} \quad x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

増減表は

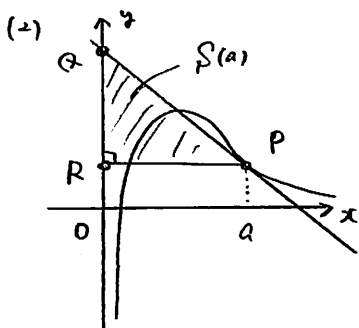
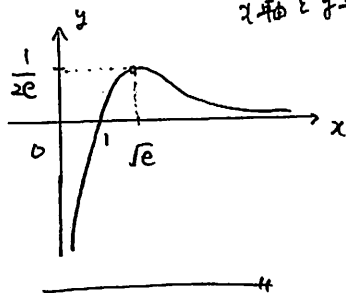
x	0	...	$\sqrt{e}$	...
$f'(x)$	/	+	0	-
$f(x)$	/	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{x^2} = -\infty \quad \left(\frac{-\infty}{(+0)^2} \right)$$

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\log \sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{e} = \frac{1}{2e}$$

ゆえに、グラフの概形は下図。

x軸とy軸に漸近線。



$$P(a, \frac{\log a}{a^2}) \text{ とするとき } R(0, \frac{\log a}{a^2})$$

とある。

$$\text{また (1) より } f'(x) = \frac{1 - 2 \log x}{x^3}$$

$$\text{とあるから、点 } P(a, \frac{\log a}{a^2}) \text{ において}$$

接線の方程式は

$$y - \frac{\log a}{a^2} = \frac{1 - 2 \log a}{a^3} (x - a) \quad (*)$$

$$\text{よって } a > \sqrt{e} \text{ とき } 1 - 2 \log a < 0$$

とある。つまりこの接線の傾きは

負であるから、接線のy切片Qは

Rより上方に存在する。

点Qの座標は、(*)に $x=0$ を

代入して

$$y - \frac{\log a}{a^2} = \frac{1 - 2 \log a}{a^3} (0 - a)$$

$$y = \frac{\log a}{a^2} + \frac{1 - 2 \log a}{a^2} (-a)$$

$$= \frac{\log a}{a^2} + \frac{2 \log a - 1}{a^2} = \frac{3 \log a - 1}{a^2}$$

ゆえに

$$S(a) = \frac{1}{2} \times QR \times PR$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{3 \log a - 1}{a^2} - \frac{\log a}{a^2} \right) \times a$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2 \log a - 1}{a^2} \times a$$

$$= \frac{2 \log a - 1}{2a}$$

ゆえに

$S(a)$ は a の関数と見做す

$$S'(a) = \frac{(2 \log a - 1)' a - (2 \log a - 1) \cdot (a)'}{a^2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\frac{2}{a} \times a - (2 \log a - 1) \cdot 1}{a^2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2 - 2 \log a + 1}{a^2} \times \frac{1}{2}$$

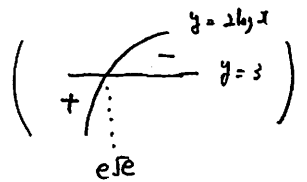
$$= \frac{3 - 2 \log a}{2a^2}$$

$$\text{よって } a > \sqrt{e} \text{ とき } S'(a) = 0 \text{ とするとき}$$

$$3 - 2 \log a = 0 \quad \text{より} \quad \log a = \frac{3}{2}$$

$$\text{よって } a = e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e}$$

$$(e > 1 \text{ より } e^{\frac{3}{2}} > e^{\frac{1}{2}} \text{ とある})$$



増減表

a	$\sqrt{e}$	...	$e\sqrt{e}$	...
$S'(a)$	/	+	0	-
$S(a)$	/	$\nearrow$	最大値	$\searrow$

よって $S(a)$ は $a > \sqrt{e}$ において

$a = e\sqrt{e}$ で最大とある

最大値は

$$S(e^{\frac{3}{2}}) = \frac{2 \log e^{\frac{3}{2}} - 1}{2e^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2 \times \frac{3}{2} - 1}{2e^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2}{2e^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}} = e^{-\frac{3}{2}}$$

よって

$$\text{最大値 } e^{-\frac{3}{2}} \quad (a = e^{\frac{3}{2}})$$

[2]

(1)

$$f(x) = \sqrt{2} e^x \cos(x - \frac{\pi}{4}) \quad \text{より}$$

$$f'(x) = \sqrt{2} \left[(e^x)' \cos(x - \frac{\pi}{4}) + e^x \cdot \left\{ \cos(x - \frac{\pi}{4}) \right\}' \right]$$

$$= \sqrt{2} \left[e^x \cdot \cos(x - \frac{\pi}{4}) + e^x \cdot \left\{ -\sin(x - \frac{\pi}{4}) \right\} \cdot (x - \frac{\pi}{4})' \right]$$

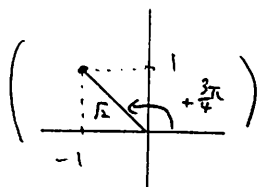
$$= \sqrt{2} \left\{ e^x \cos(x - \frac{\pi}{4}) - e^x \sin(x - \frac{\pi}{4}) \cdot 1 \right\}$$

$$= \sqrt{2} e^x \left\{ -\sin(x - \frac{\pi}{4}) + \cos(x - \frac{\pi}{4}) \right\} \quad \text{合成}$$

$$= \sqrt{2} e^x \times \sqrt{2} \sin \left\{ (x - \frac{\pi}{4}) + \frac{3\pi}{4} \right\}$$

$$= 2 e^x \sin(x + \frac{\pi}{2}) \quad \sin(0 + \frac{\pi}{2})$$

$$= \underline{2 e^x \cos x} \quad = \cos 0$$



(2)

$$0 < x < 2\pi \text{ において } f'(x) = 0 \text{ となる } x \text{ は}$$

$$e^x > 0 \text{ より } \cos x = 0 \quad \text{より } x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

増減表

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3\pi}{2}$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(\frac{\pi}{2})$	$\searrow$	$f(\frac{3\pi}{2})$	$\nearrow$	$f(2\pi)$

最大値 M は

$$\text{増減表より候補は } f(\frac{\pi}{2}) \text{ と } f(2\pi)$$

より

$$f(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{2}} \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$$

$$= \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{4}$$

$$= \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$f(2\pi) = \sqrt{2} e^{2\pi} \cos(2\pi - \frac{\pi}{4})$$

$$= \sqrt{2} e^{2\pi} \cos \frac{7\pi}{4}$$

$$= \sqrt{2} e^{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = e^{2\pi}$$

$$e > 1 \text{ であり } \frac{\pi}{2} < 2\pi \text{ より } e^{\frac{\pi}{2}} < e^{2\pi}$$

よって 最大値 M は

$$M = f(2\pi) = e^{2\pi} \quad \dots \textcircled{1}$$

また 最小値 m は

候補は $f(0)$, $f(\frac{3\pi}{2})$ より

$$f(0) = \sqrt{2} e^0 \cos(0 - \frac{\pi}{4})$$

$$= \sqrt{2} \times \cos(-\frac{\pi}{4})$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

$$f(\frac{3\pi}{2}) = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{2}} \cos(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$$

$$= \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{2}} \cos \frac{5\pi}{4}$$

$$= \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{2}} (-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$= -e^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$\text{よって } f(0) > 0, f(\frac{3\pi}{2}) < 0 \text{ より}$$

最小値 m は

$$m = f(\frac{3\pi}{2}) = -e^{\frac{3\pi}{2}} \quad \dots \textcircled{2}$$

また (1), (2) より

$$\log \left| \frac{M}{m} \right| = \log \left| \frac{e^{2\pi}}{-e^{\frac{3\pi}{2}}} \right|$$

$$= \log | -e^{2\pi - \frac{3\pi}{2}} |$$

$$= \log | -e^{\frac{\pi}{2}} |$$

$$= \log e^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \pi$$

(3) (1) より

$$f(x) = \sqrt{2} e^x \cos(x - \frac{\pi}{4})$$

$$= \sqrt{2} e^x (\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4})$$

$$= e^x (\cos x + \sin x)$$

よって

$$f'(x) = (e^x)' (\cos x + \sin x) + e^x (\cos x + \sin x)'$$

$$= e^x (\cos x + \sin x) + e^x (-\sin x + \cos x)$$

$$= e^x (\cos x + \sin x - \sin x + \cos x) = \underline{2 e^x \cos x}$$

3

(1)

$$f(x) = kx \frac{x}{x^2+1} \quad (x \neq 1)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= kx \frac{(x)'(x^2+1) - x \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= kx \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= kx \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{k(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

(2)

(1)の結果より、 $f'(x) = 0$ となる x は

$$1-x^2=0 \quad \therefore x = \pm 1$$

増減表は、 $k > 0$ と仮定して (図)

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		極小		極大	

と仮定。よって

$$\text{極大値は } f(1) = \frac{k \cdot 1}{1^2+1} = \frac{k}{2}$$

$$\text{極小値は } f(-1) = \frac{k \cdot (-1)}{(-1)^2+1} = -\frac{k}{2}$$

以上より

$$\text{極大値 } \frac{k}{2} \quad (x=1), \quad \text{極小値 } -\frac{k}{2} \quad (x=-1)$$

(3)

$|x| \leq k$ より $-k \leq x \leq k$ と仮定。

また、関数 $y = f(x)$ のグラフは、

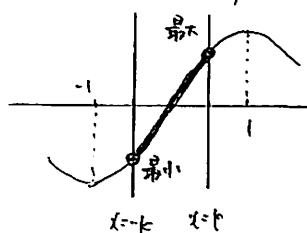
$$f(-x) = \frac{k(-x)}{(-x)^2+1} = -\frac{kx}{x^2+1} = -f(x)$$

が成り立つので、原点に関して対称である。

定義域内に極値が入るかどうかで

場合分けをする。

(I) $0 < k < 1$ の時



(II) $x = k$ で最大, $x = -k$ で

最小となる。

$$\text{最大値 } f(k) = \frac{k \cdot k}{k^2+1} = \frac{k^2}{k^2+1}$$

$$\text{最小値 } f(-k) = \frac{k \cdot (-k)}{(-k)^2+1} = -\frac{k^2}{k^2+1}$$

$$\therefore M = \frac{k^2}{k^2+1}, \quad m = -\frac{k^2}{k^2+1}$$

$$\therefore M - m = \frac{2}{3} \quad \text{より}$$

$$\frac{k^2}{k^2+1} - \left(-\frac{k^2}{k^2+1}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2k^2}{k^2+1} = \frac{2}{3}$$

したがって、

$$3 \times 2k^2 = 2(k^2+1)$$

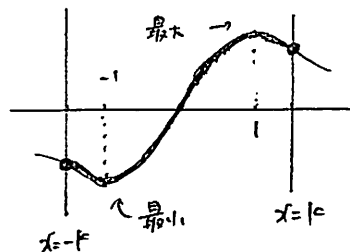
$$3k^2 = k^2+1$$

$$k^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore k = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0 < k < 1 \quad \therefore \text{両方とも } k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(II) $k > 1$ の時



$x > 0$ で $f(x) > 0$ であり、

(II) $x = 1$ で最大, $x = -1$ で

最小となる。

$$\text{最大値 } f(1) = \frac{k}{2}$$

$$\text{最小値 } f(-1) = -\frac{k}{2}$$

より

$$M = \frac{k}{2}, \quad m = -\frac{k}{2}$$

$$\therefore M - m = \frac{2}{3} \quad \text{より}$$

$$\frac{k}{2} - \left(-\frac{k}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

$$k = \frac{2}{3}$$

(k) = 412 $k > 1$ と仮定して II である。

(I) (II) より

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

④

(1)

$$f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)'e^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot (e^{-\frac{x^2}{2}})' \\ &= 1 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-\frac{x}{1})' \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} + x e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x) \\ &= (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とする } x \text{ は } (1-x^2) = 0$$

$$\text{よって } x = \pm 1, \quad x > 0 \text{ より } x = 1$$

増減表

x	0	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	↗	$e^{-\frac{1}{2}}$	↘

増減表より

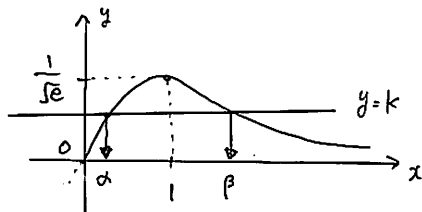
$$\text{最大値 } \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (x=1)$$

(2)

$$\text{条件より } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \text{ より}$$

$$y = f(x) \text{ の } y > 0 \text{ の範囲は}$$

下図の通りである。



$$\text{方程式 } f(x) = k \text{ の異なる2つの}$$

正の解を持つとき、2つの範囲は

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = k \end{cases}$$

は $x > 0$ で必ず2点に交わる。

2つの交点をもつ。このように k の範囲は

図より

$$0 < k < \frac{1}{\sqrt{e}}$$

また、交点の x 座標のうち、小さい方が α であり、大きい方が β である。

α と β は $0 < \alpha < 1 < \beta$ である。

$$0 < \alpha < 1$$

(1)

$$\begin{aligned} g(x) &= f(1+x) - f(1-x) \\ &= (1+x)e^{-\frac{1}{2}(1+x)^2} - (1-x)e^{-\frac{1}{2}(1-x)^2} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(1+x)^2} \{ (1+x) - (1-x)e^{2x} \} \end{aligned}$$

$$\text{よって } e^{-\frac{1}{2}(1+x)^2} > 0 \text{ であるから}$$

$$h(x) = 1+x - (1-x)e^{2x}$$

$$x < 0 \text{ のとき } x > 0 \text{ であるから } h(x) > 0$$

を示せばよい。

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1 - \{ (1-x)'e^{2x} + (1-x)(e^{2x})' \} \\ &= 1 - \{ -e^{2x} + (1-x) \cdot 2e^{2x} \} \\ &= 1 - (-1 + 2 - 2x)e^{2x} \\ &= 1 + (2x-1)e^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h''(x) &= (2x-1)'e^{2x} + (2x-1)(e^{2x})' \\ &= 2e^{2x} + (2x-1) \cdot 2e^{2x} \\ &= (2+4x-2)e^{2x} \\ &= 4xe^{2x} > 0 \quad (x > 0 \text{ より}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{また } h'(0) &= 1 + (2 \times 0 - 1)e^{2 \times 0} \\ &= 1 + (-1)e^0 = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

よって $h'(x)$ の増減表より

x	0	...
$h''(x)$		+
$h'(x)$	0	↗

$$x > 0 \text{ であるから } h'(x) > 0 \text{ が成り立つ。}$$

よって

$$\begin{aligned} h(0) &= 1 + 0 - (1-0)e^{2 \times 0} \\ &= 1 - 1 \times e^0 = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

よって $h(x)$ の増減表から

x	0	...
$h'(x)$		+
$h(x)$	0	↗

$$x > 0 \text{ であるから } h(x) > 0$$

が成り立つ。

$$\text{したがって } x > 0 \text{ であるから}$$

$$g(x) > 0 \text{ が成り立つ。}$$

また、(1)の結果より

$$0 < \alpha < 1 \text{ であるから}$$

$$(1-\alpha) > 0 \text{ であるから}$$

$$\text{よって正の数 } 1-\alpha \text{ に対して}$$

$$g(1-\alpha) > 0 \text{ が成り立つ。}$$

$$g(1-\alpha) = f(2-\alpha) - f(\alpha) > 0$$

$$\text{よって } f(2-\alpha) > f(\alpha) \dots (*)$$

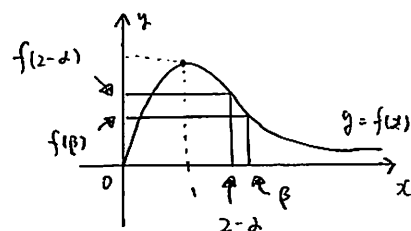
が成り立つ。

$$\text{よって } k = f(\alpha) = f(\beta) \text{ より}$$

(*) 式は

$$f(2-\alpha) > f(\beta)$$

が成り立つことは正しい。



$$0 < \alpha < 1 \text{ より } 2-\alpha > 1$$

である。よって

$$x > 1 \text{ であるから } f(x) \text{ は}$$

単調減少である。

$$f(2-\alpha) > f(\beta)$$

$$\Leftrightarrow 2-\alpha < \beta$$

$$\text{つまり } \alpha + \beta > 2$$

が成り立つ。

5

(1)

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4x+5} \quad (*)$$

$$f'(x) = \frac{(x-2)'(x^2-4x+5) - (x-2)(x^2-4x+5)'}{(x^2-4x+5)^2}$$

$$= \frac{1 \cdot (x^2-4x+5) - (x-2)(2x-4)}{(x^2-4x+5)^2}$$

$$= \frac{x^2-4x+5 - (2x^2-8x+8)}{(x^2-4x+5)^2}$$

$$= - \frac{x^2-4x+3}{(x^2-4x+5)^2}$$

-----++

(2)

$$f(x) = \frac{x-2}{(x-2)^2+1} \quad \text{よ! } (x-2) \neq 0 \text{ が必要}$$

x は存在 (なし)。よ! $f(x)$ の定義域は
 $x=2$ の実数でなく。

(1) よ! $f'(x) = 0$ とおき x は

$$\left(\begin{array}{c} \text{+} \\ \text{---} \end{array} \right) \rightarrow x$$

$$x^2-4x+3=0.$$

$$(x-1)(x-3)=0 \quad \text{よ! } x=1, 3$$

また.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{x^2-4x+5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}$$

$$= \frac{0-0}{1-0+0} = 0$$

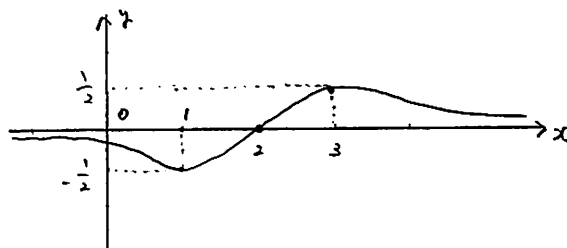
よ! x 軸が漸近線である。

増減表は

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

$$\left(f(1) = \frac{1-2}{1-4+5} = -\frac{1}{2}, f(3) = \frac{3-2}{9-12+5} = \frac{1}{2} \right)$$

グラフの概形は F 図, x 軸が漸近線



(3)

接点の x 座標を t とおき、グラフ上の点 $(t, f(t))$ における
 接線の傾きが $\frac{3}{8}$ となる t の値を求めよ。

(1) の結果より

$$f'(t) = - \frac{t^2-4t+3}{(t^2-4t+5)^2}$$

である。

$$- \frac{t^2-4t+3}{(t^2-4t+5)^2} = \frac{3}{8}$$

$$t \neq 2 \quad \therefore M = t^2-4t+5 \quad \text{とおく}$$

$$- \frac{M-2}{M^2} = \frac{3}{8}$$

(6) 同様

$$3M^2 = -8(M-2)$$

$$3M^2 + 8M - 16 = 0$$

$$(3M-4)(M+4) = 0$$

$$M = \frac{4}{3}, -4$$

M を戻す。

$$t^2-4t+5 = \frac{4}{3}, \quad t^2-4t+5 = -4$$

$$3t^2-12t+11=0, \quad t^2-4t+9=0$$

$$t = \frac{-(-6) \pm \sqrt{36-33}}{3}, \quad t = 2 \pm \sqrt{4-9}$$

(解なし)

$$= \frac{6 \pm \sqrt{3}}{3}$$

以上より 接点の x 座標は $\frac{6 \pm \sqrt{3}}{3}$

6

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)e^{-x} \text{ より} \\ f'(x) &= (x+1)'e^{-x} + (x+1)(e^{-x})' \\ &= 1 \cdot e^{-x} + (x+1)(-e^{-x}) \\ &= \{1 - (x+1)\}e^{-x} \\ &= -xe^{-x} \end{aligned}$$

(2)

曲線 C 上の点 P(t, (t+1)e^{-t})

(= 接線の方程式は

$$y - (t+1)e^{-t} = -te^{-t}(x-t) \quad \cdots (4)$$

x 軸との交点 A の座標は

(4) に y=0 を代入して

$$\begin{aligned} 0 - (t+1)e^{-t} &= -te^{-t}(x-t) \\ -(t+1)e^{-t} &= -te^{-t}x + t^2e^{-t} \\ te^{-t}x &= t^2e^{-t} + (t+1)e^{-t} \end{aligned}$$

両辺 e^{-t} を割って

$$tx = t^2 + (t+1)$$

$$t > 0 \text{ より } x = \frac{t^2+t+1}{t}$$

$$\text{よって } A\left(\frac{t^2+t+1}{t}, 0\right)$$

y 軸との交点 B の座標は

(4) に x=0 を代入して

$$\begin{aligned} y - (t+1)e^{-t} &= -te^{-t}(0-t) \\ y &= t^2e^{-t} + (t+1)e^{-t} \\ &= (t^2+t+1)e^{-t} \end{aligned}$$

よって

$$B(0, (t^2+t+1)e^{-t})$$

したがって

$$A\left(\frac{t^2+t+1}{t}, 0\right), B(0, (t^2+t+1)e^{-t})$$

(3)

t > 0 より A の x 座標は

B の y 座標も正である。

B の y 座標を g(t) とおく

$$g(t) = (t^2+t+1)e^{-t}$$

よって

$$\begin{aligned} g'(t) &= (t^2+t+1)'e^{-t} + (t^2+t+1)(e^{-t})' \\ &= (2t+1)e^{-t} + (t^2+t+1)(-e^{-t}) \\ &= \{2t+1 - (t^2+t+1)\}e^{-t} \\ &= (-t^2+t)e^{-t} \\ &= -t(t-1)e^{-t} \end{aligned}$$

$$g'(t) = 0 \text{ とおき } t \text{ は } t > 0 \text{ より}$$

$$t = 1 \text{ とおき } \left(\begin{array}{c} 0 \quad + \quad 1 \\ - \quad \quad - \end{array} \right)$$

増減表より

t	0	..	1	...
g'(t)		+	0	-
g(t)		↗	最大	↘

よって g(t) は t=1 のとき最大となる。

t=1 のとき (2) の結果より

$$A\left(\frac{1+1+1}{1}, 0\right), B(0, (1+1+1)e^{-1})$$

よって

$$A(3, 0), B(0, \frac{3}{e})$$

よって ΔOAB の面積は

$$\begin{aligned} \Delta OAB &= \frac{1}{2} \times OA \times OB \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{e} = \frac{9}{2e} \end{aligned}$$

7

(1)

$$y = \cos 2x + 1 \quad \text{より}$$

$$y' = -\sin 2x \cdot (2x)'$$

$$= -2 \sin 2x$$

よって曲線上の点 $P(t, \cos 2t + 1)$

に接する接線の方程式は

$$y - (\cos 2t + 1) = (-2 \sin 2t)(x - t)$$

よってこの方程式は

$$y = -2x \sin 2t + 2t \sin 2t + \cos 2t + 1$$

また、 y 軸との交点 $Q(0, a)$ より

得られる

$$a = 2t \sin 2t + \cos 2t + 1$$

(2)

点 P が曲線 C 上に重なること

$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ を満たす。

$$f(t) = 2t \sin 2t + \cos 2t + 1$$

とあるとき $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ にあてはまる

値域を求めよう。

$$f'(t) = 2 \{ (t)' \sin 2t + t \cdot (\sin 2t)' \} + (\cos 2t)'$$

$$= 2 \{ 1 \cdot \sin 2t + t \cdot \cos 2t \cdot 2 \} - \sin 2t \cdot 2$$

$$= 2 \sin 2t + 4t \cos 2t - 2 \sin 2t$$

$$= 4t \cos 2t$$

よって $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ にあてはまる $f'(t) = 0$ とおける t は

$$t = 0, \cos 2t = 0 \quad \text{より} \quad (-\pi < 2t < \pi) \quad 0 < 2t < \frac{\pi}{2} \quad \text{より} \quad 0 < 2t < \pi.$$

$$2t = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$$

$$\text{より} \quad t = -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$$

$$\text{以上より} \quad t = -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}$$

$$\left(\frac{0}{+} \rightarrow + \right) \left(\frac{\pi}{-} \rightarrow - \right) \quad \cos 2t$$

増減表は

t	$-\frac{\pi}{2}$	$\dots$	$-\frac{\pi}{4}$	$\dots$	0	$\dots$	$\frac{\pi}{4}$	$\dots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$			$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2} + 1$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2} + 1$	$\searrow$	0

よって増減表より $f(t)$ の極値は

$$0 < f(t) \leq \frac{\pi}{2} + 1. \quad \text{よって} \quad 0 < a \leq \frac{\pi}{2} + 1$$

(3)

(1) の結果より $0 < a < 2$ にあてはまる

点 $(0, a)$ を通る接線は 2 本である。

また、

$$f(-t) = 2(-t) \sin 2(-t) + \cos 2(-t) + 1$$

$$= -2t(-\sin 2t) + \cos 2t + 1$$

$$= 2t \sin 2t + \cos 2t + 1 = f(t)$$

よって $f(-t) = f(t)$ が成り立ち、 $y = f(t)$ のグラフは

y 軸 (= $t=0$) に対して対称である。

よって $0 < a < 2$ である a は

方程式 $a = f(t)$ の解は $a > 0$ より

$$t = d, -d \quad \text{と} \quad \text{成り立つ。}$$

また、2本の接線が直交するから

$$(-2 \sin 2d) \times \{-2 \sin 2(-d)\} = -1$$

が成り立つ。よって

$$4 \sin 2d (-\sin 2d) = -1$$

$$-4 \sin^2 2d = -1$$

$$\sin^2 2d = \frac{1}{4}$$

$$\sin 2d = \pm \frac{1}{2}$$

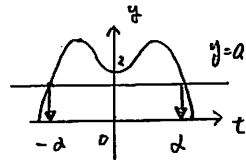
$$\sin 2d > 0 \quad \text{と} \quad \text{おける} \quad \sin 2d = -\frac{1}{2} \quad \text{は不適。}$$

$$\text{よって} \quad \sin 2d = \frac{1}{2} \quad \text{より} \quad 2d = \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi$$

(1) の上より $d = \frac{1}{12}\pi$ かつ $0 < d < 2$

を満たす不適、よって $d = \frac{5}{12}\pi$ より

$$a = 2 \times \frac{5}{12}\pi \times \sin \frac{5}{6}\pi + \cos \frac{5}{6}\pi + 1 = \frac{5}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$$



傾きの積
 $\times (-1)$

8

(1)

$$y = e \log x \text{ より}$$

$$y' = e \cdot \frac{1}{x} \text{ である。}$$

曲線 C 上の点 P (t, e log t)

1=における接線の方程式は

$$y - e \log t = \frac{e}{t} (x - t)$$

よって

$$y = \frac{e}{t} x - e + e \log t$$

(2)

接線 l と x 軸との交点 Q について

(1)の結果より $y = 0$ とすると

$$0 = \frac{e}{t} x - e + e \log t$$

$$\text{よって } \frac{e}{t} x = e - e \log t$$

$$\frac{1}{t} x = 1 - \log t$$

$$x = t(1 - \log t)$$

$$\text{よって } Q(t(1 - \log t), 0)$$

また、接線 l と y 軸との交点 R について

(1)の結果より $x = 0$ とすると

$$y = \frac{e}{t} \times 0 - e + e \log t$$

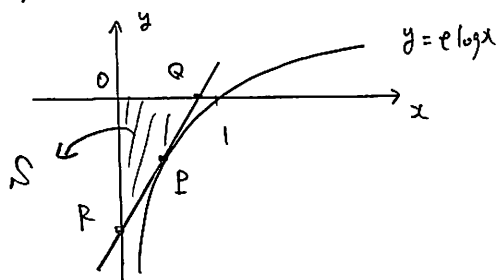
$$= -e + e \log t$$

$$\text{よって } R(0, -e + e \log t)$$

ここで $0 < t < 1$ より $\log t < 0$.

よって Q の x 座標は正であり

R の y 座標は負である。



よって $\triangle OQR$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \times OQ \times OR$$

$$= \frac{1}{2} \times t(1 - \log t) \times \{-(-e + e \log t)\}$$

$$= \frac{1}{2} \times t(1 - \log t) \times e(1 - \log t)$$

$$= \frac{e}{2} t(1 - \log t)^2$$

(3)

(2)の結果より

$$f(t) = \frac{e}{2} t(1 - \log t)^2$$

とすると

$$f'(t) = \frac{e}{2} \times \left[(t)'(1 - \log t)^2 + t \times \{ (1 - \log t)^2 \}' \right]$$

$$= \frac{e}{2} \times \left\{ 1 \cdot (1 - \log t)^2 + t \cdot 2(1 - \log t) \cdot (-\frac{1}{t}) \right\}$$

$$= \frac{e}{2} \left\{ (1 - \log t)^2 + t \cdot 2(1 - \log t) \cdot (-\frac{1}{t}) \right\}$$

$$= \frac{e}{2} \left\{ (1 - \log t)^2 - 2(1 - \log t) \right\}$$

$$= \frac{e}{2} (1 - \log t) \left\{ (1 - \log t) - 2 \right\}$$

$$= \frac{e}{2} (1 - \log t)(-1 - \log t)$$

$$= -\frac{e}{2} (1 - \log t)(1 + \log t)$$

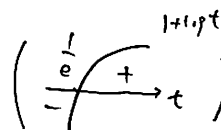
ここで $f'(t) = 0$ とすると $0 < t < 1$ より

$$1 + \log t = 0 \text{ より } \log t = -1. \quad t = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

また、 $1 - \log t$ は正の数、 $\frac{e}{2} > 0$ であるから

考慮すると、増減表は

0	0	...	$\frac{1}{e}$	...	1
$f'(t)$			+	0	-
$f(t)$			↗	最大	↘



よって、よって $f(t)$ は $t = \frac{1}{e}$ で最大。

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{e}{2} \times \frac{1}{e} \left(1 - \log \frac{1}{e}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \{1 - (-1)\}^2 = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

以上より S は $t = \frac{1}{e}$ のとき最大値 2 をとる。

9

(1)

$$f(x) = \frac{(x-1)e^x + 1}{x}$$

f')

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\{(x-1)e^x + 1\}' - \{(x-1)e^x + 1\}(x)'}{x^2} \\ &= \frac{\{x-1\}'e^x + (x-1)(e^x)' - \{(x-1)e^x + 1\}}{x^2} \\ &= \frac{\{1 \cdot e^x + (x-1)e^x\} - \{(x-1)e^x + 1\}}{x^2} \\ &= \frac{(1+x-1)xe^x - (x-1)e^x - 1}{x^2} \\ &= \frac{x^2e^x - (x-1)e^x - 1}{x^2} \\ &= \frac{(x^2 - x + 1)e^x - 1}{x^2} \end{aligned}$$

———H

(2)

$x > 0$ において $f(x)$ が単調増加

であることを示す。 $x > 0$ において

常に $f'(x) \geq 0$ であることを示せばよい。

$x > 0$ において、 x^2 は常に正である。

$g(x) = (x^2 - x + 1)e^x - 1$ とおく。

$x > 0$ において $g(x) \geq 0$ を示せばよい。

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^2 - x + 1)'e^x + (x^2 - x + 1)(e^x)' \\ &= (2x - 1)e^x + (x^2 - x + 1)e^x \\ &= (x^2 + x)e^x > 0 \quad (x > 0 \text{ において}) \end{aligned}$$

$$\text{また、} g(0) = (0^2 - 0 + 1)e^0 - 1$$

$$= e^0 - 1$$

$$= 1 - 1 = 0 \quad \text{より}$$

$g(x)$ は単調増加より

x	0	...
$g'(x)$		+
$g(x)$	0	↗

$x > 0$ において $g(x) > 0$

が成り立つ。よって $x > 0$ において

$f'(x) > 0$ が成り立つ。

$x > 0$ において単調増加である。

10

(1)

$$f(x) = e^x + ae^{-x} \quad \text{for } x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x + a(e^{-x})' \\ &= e^x + ae^{-x}(-x)' \\ &= e^x - ae^{-x} \end{aligned}$$

$$\text{Let } f'(x) = 0 \text{ for } x \text{ is}$$

$$e^x - ae^{-x} = 0$$

$$e^x - \frac{a}{e^x} = 0$$

$$\text{Then } e^{2x} = a$$

$$(e^x)^2 = a$$

$$e^{2x} = a$$

$$\text{Let } x = \frac{1}{2} \log a$$

$$2x = \log a$$

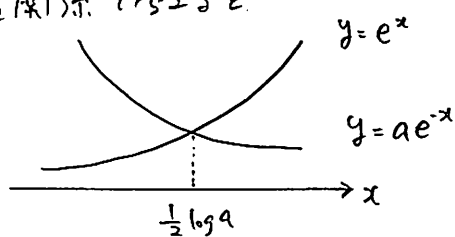
$$x = \frac{1}{2} \log a$$

(2)

Definition: Let $a > 0$ be a real number.

Let $a > 0$ be a real number. $f'(x)$ is positive or negative.

Let $y = e^x$, $y = ae^{-x}$ and their position relationship.



$$x < \frac{1}{2} \log a \text{ then } y = ae^{-x} \text{ is larger than } y = e^x$$

$$y = e^x \text{ is increasing}$$

$$f'(x) = e^x - ae^{-x} < 0$$

$$x > \frac{1}{2} \log a \text{ then } y = e^x \text{ is larger than } y = ae^{-x}$$

$$y = ae^{-x} \text{ is decreasing}$$

$$f'(x) = e^x - ae^{-x} > 0$$

Increasing/Decreasing

x	...	$\frac{1}{2} \log a$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	>	local min	>

Local minimum is at $x = \frac{1}{2} \log a$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2} \log a\right) &= e^{\frac{1}{2} \log a} + ae^{-\frac{1}{2} \log a} \\ &= (e^{\log a})^{\frac{1}{2}} + a(e^{\log a})^{-\frac{1}{2}} \\ &= a^{\frac{1}{2}} + a \times a^{-\frac{1}{2}} \\ &= a^{\frac{1}{2}} + a^{1-\frac{1}{2}} \\ &= a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a} \end{aligned}$$

$$e^{\log a} = a$$

Let $f(x)$ have a local minimum at $x = \frac{1}{2} \log a$.

Local minimum is at $x = \frac{1}{2} \log a$.

$$\text{Local minimum is } 2\sqrt{a} \text{ at } x = \frac{1}{2} \log a$$

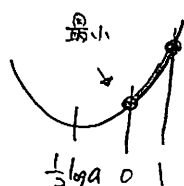
(3)

$a > 0$ then $\frac{1}{2} \log a$ is a real number.

Let $x = \frac{1}{2} \log a$ and $0 \leq x \leq 1$ in the interval $[0, 1]$.

Let $x = \frac{1}{2} \log a$ and $0 \leq x \leq 1$ in the interval $[0, 1]$.

$$(I) \frac{1}{2} \log a < 0 \text{ (that is } 0 < a < 1) \text{ then}$$



Let $x = 0$ then the minimum is at $x = 0$.

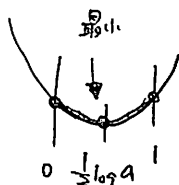
Then

$$f(0) = e^0 + ae^{-0} = 1 + a$$

$$\text{Let } \frac{1}{2} \log a < 0 \text{ then the minimum is } 1 + a.$$

(II)

$$0 \leq \frac{1}{2} \log a \leq 1 \text{ (that is } 1 \leq a \leq e^2) \text{ then}$$



Let $x = \frac{1}{2} \log a$ then the minimum is at $x = \frac{1}{2} \log a$.

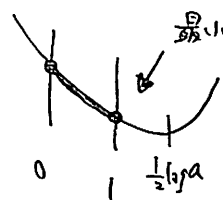
Then (2) result is

$$f\left(\frac{1}{2} \log a\right) = 2\sqrt{a}$$

$$\text{Let } \frac{1}{2} \log a < 0 \text{ then } 2\sqrt{a}$$

$$(III) 1 < \frac{1}{2} \log a$$

$$\text{(that is } e^2 < a) \text{ then}$$



Let $x = 1$ then the minimum is at $x = 1$.

Then

$$f(1) = e^1 + ae^{-1}$$

$$= e + \frac{a}{e}$$

$$\text{Let } \frac{1}{2} \log a > 1 \text{ then } e + \frac{a}{e}$$

Let $x = 1$

$$m = \begin{cases} 1 + a & (0 < a < 1) \\ 2\sqrt{a} & (1 \leq a \leq e^2) \\ e + \frac{a}{e} & (e^2 < a) \end{cases}$$

(11)

(1)

$$g(x) = (f_2(x)) - (f_0(x))$$

$$= \log(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

とある。

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} \cdot (1+x)' - \frac{(x)'(1+x) - x(1+x)'}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x} - \frac{1 \cdot (1+x) - x \cdot 1}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x} - \frac{1+x-x}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{(1+x) - 1}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{x}{(1+x)^2}$$

∴ $x > 0$ かつ $(1+x)^2 > 0$

より、 $x > 0$ のとき、 $g'(x)$ は

常に正の数となる。

また、

$$g(0) = \log(1+0) - \frac{0}{1+0}$$

$$= \log 1 - 0$$

$$= 0 - 0 = 0$$

よって、 $g(x)$ は常に増加する。

x	0	...
$g'(x)$		+
$g(x)$	0	↗

よって、 $x > 0$ のとき、 $g(x)$ は常に増加する。

$x > 0$ のとき、 $g(x) > 0$

よって、

$$(f_2(x)) - (f_0(x)) > 0$$

$$\therefore (f_2(x)) > (f_0(x))$$

よって、 $x > 0$ のとき、

(2)

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$$

よって、

$$f'(x) = \frac{\{\log(1+x)\}' \cdot x - \log(1+x) \cdot (x)'}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x} \cdot (1+x)' \cdot x - \log(1+x) \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{x}{1+x} - \log(1+x)}{x^2}$$

よって、(1) の $f(x)$ は常に増加する。

$$f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$$

よって、(1) のとき、 $x > 0$ のとき、常に

$g(x) > 0$ であり、 $x > 0$ のとき、

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2} \text{ は常に負の数となる。}$$

(2) のとき、 $f(x)$ は $x > 0$ のとき、

単調に減少する。

(3)

(2) のとき、 $f(x)$ は $x > 0$ のとき、

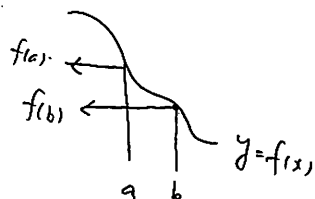
単調に減少する。

2つの正の数 a, b は

とあり、

$$a < b \text{ であり、}$$

$$f(a) > f(b) \text{ であり、}$$



⇒

$$f(a) > f(b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log(1+a)}{a} > \frac{\log(1+b)}{b}$$

ଅର୍ଥାତ୍, $\frac{\log(1+a)}{a} > \frac{\log(1+b)}{b}$

$$b \log(1+a) > a \log(1+b)$$

∴

$$\log(1+a)^b > \log(1+b)^a$$

ଅର୍ଥାତ୍, $(1+a)^b > (1+b)^a$

$$(1+a)^b > (1+b)^a$$

ଅର୍ଥାତ୍, $(1+a)^b > (1+b)^a$ //

12

(1)

$$f(x) = \frac{e^x}{x} \quad x \neq 0$$

$$f'(x) = \frac{(e^x)'x - e^x(x)'}{x^2}$$

$$= \frac{e^x x - e^x \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

(2)

定義域は $x \neq 0$ である。

また (1) より

$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

より $f'(x) = 0$ となる x は $x = 1$

増減表は、

x	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$
$f'(x)$	$-$	$/$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$0 \searrow$	$/$	$\infty \searrow$	e	$\nearrow \infty$

← 問題より

(2)

曲線 $y = \frac{e^x}{x}$ 上の点 $(t, \frac{e^t}{t})$

(= 2点の接線の方程式は

$$y - \frac{e^t}{t} = \frac{(t-1)e^t}{t^2} (x-t)$$

とある。= 2接線が原点を

通るから、 $x=y=0$ を代入して

$$0 - \frac{e^t}{t} = \frac{(t-1)e^t}{t^2} (0-t)$$

$$\frac{e^t}{t} = \frac{(t-1)e^t}{t}$$

($\div e^t$)

$$\frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$$

($\times t$)

$$1 = t-1 \quad \text{より } t=2$$

ゆえに、

$$y - \frac{e^2}{2} = \frac{(2-1)e^2}{2^2} (x-2)$$

$$y - \frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{4} (x-2)$$

$$y - \frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{4} x - \frac{e^2}{2}$$

以上より

$$y = \frac{e^2}{4} x$$

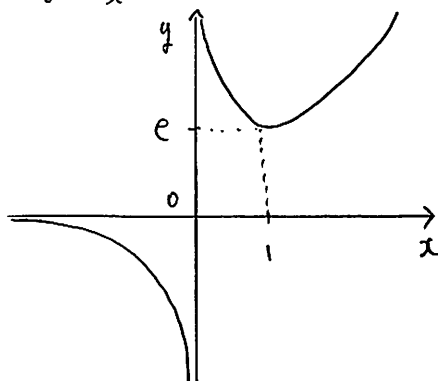
$$\left(\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-t}}{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{te^t} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x}{x} &= +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{e^x}{x} = -\infty \end{aligned} \right)$$

よって、 $y = f(x)$ の極値は

極大値なし

極小値 e ($x=1$)

また、 $y = \frac{e^x}{x}$ のグラフの概形は下図



———

13

$$\begin{cases} f_1(x) = x^2 - 10x + 30 \\ e^x f_{n+1}(x) = \frac{d}{dx} (e^x f_n(x)) \end{cases} \dots (*)$$

(1)

$$f_n(x) = x^2 + a_n x + b_n \quad x \geq 1$$

$$f_1(x) = x^2 + a_1 x + b_1 \quad x \geq 1 \quad (*)$$

(*)より

$$a_1 = -10, b_1 = 30$$

$$f_n(x) = x^2 + a_n x + b_n \quad x \geq 1$$

$$f_{n+1}(x) = x^2 + a_{n+1} x + b_{n+1} \quad x \geq 1$$

(*)より

$$(f_{n+1})' = e^x f_{n+1}(x)$$

$$= e^x (x^2 + a_{n+1} x + b_{n+1})$$

$$(f_n)' = \frac{d}{dx} (e^x f_n(x))$$

$$= \frac{d}{dx} \{ e^x (x^2 + a_n x + b_n) \}$$

$$= (e^x)' (x^2 + a_n x + b_n) + e^x (x^2 + a_n x + b_n)'$$

$$= e^x (x^2 + a_n x + b_n)$$

$$+ e^x (2x + a_n)$$

$$= e^x \{ (x^2 + a_n x + b_n) + (2x + a_n) \}$$

$$= e^x \{ x^2 + (a_n + 2)x + (a_n + b_n) \}$$

よって

$$e^x (x^2 + a_{n+1} x + b_{n+1})$$

$$= e^x \{ x^2 + (a_n + 2)x + (a_n + b_n) \}$$

$$\text{両辺 } e^x \text{ を割ると}$$

$$x^2 + a_{n+1} x + b_{n+1} = x^2 + (a_n + 2)x + (a_n + b_n)$$

係数比較して

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2 \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

(2)

(1)より

$$a_1 = -10, a_{n+1} = a_n + 2$$

よって a_n は初項 -10 、

公差 2 の等差数列より

$$a_n = -10 + (n-1) \cdot 2$$

$$= 2n - 12$$

階差型

また

$$b_1 = 30, b_{n+1} = a_n + b_n$$

よって $n \geq 2$ のとき

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$$= 30 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k - 12)$$

$$= 30 + 2 \cdot \frac{1}{2} (n-1) \cdot n - 12(n-1)$$

$$= 30 + (n-1)n - 12(n-1)$$

$$= n^2 - n - 12n + 12 + 30$$

$$= n^2 - 13n + 42 \dots (*)$$

(*)より $n=1$ のとき

$$1 - 13 + 42 = 30$$

よって $b_1 = 30$ と一致

よって

$$a_n = 2n - 12$$

$$b_n = n^2 - 13n + 42$$

よって

$$f_n(x) = x^2 + (2n-12)x + (n^2-13n+42)$$

(3)

$$y = (x^2 + px + q)e^x \quad (*)$$

$$y' = (x^2 + px + q)'e^x + (x^2 + px + q)(e^x)'$$

$$= (2x + p)e^x$$

$$+ (x^2 + px + q)e^x$$

$$= \{ (2x + p) + (x^2 + px + q) \} e^x$$

$$= \{ x^2 + (p+2)x + (p+q) \} e^x$$

また (*)より

$$y'' = \{ x^2 + (p+2)x + (p+q) \}' e^x$$

$$+ \{ x^2 + (p+2)x + (p+q) \} (e^x)'$$

$$= (2x + p + 2)e^x$$

$$+ \{ x^2 + (p+2)x + (p+q) \} e^x$$

$$= \{ x^2 + (p+4)x + (2p+q+2) \} e^x$$

よって (*)より $y'' = 0$ のとき

$$x^2 + (p+4)x + (2p+q+2) = 0$$

$$x^2 + (p+4)x + (2p+q+2) = 0$$

の解が $x=1$ であるから

$$1 + (p+4) + (2p+q+2) = 0$$

$$p + q + 7 = 0$$

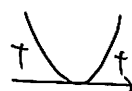
$$p + q = -7$$

$$p + q = -7$$

$$p + q = -7$$

$$p + q = -7$$

$$\begin{cases} p + q = -7 \\ p - q = 1 \end{cases}$$



42) 1st part is given that p, q, r are in A.P.

1st part is D is

$$\begin{aligned} D &= (p+q)^2 - 4(p+q+r) \\ &= p^2 + 2pq + q^2 - 4p - 4q - 4r \\ &= p^2 - 4q + 8 \end{aligned}$$

$\therefore$

$$\underline{p^2 - 4q + 8 > 0}$$

(4)

$$\begin{aligned} y &= f_n(x) e^x \\ &= (x^2 + a_n x + b_n) e^x \end{aligned}$$

51. (3) is given that $p = a_n, q = b_n$

Let p, q, r are in A.P.

$$a_n^2 - 4b_n + 8 > 0$$

(2) as given that p, q, r are in A.P.

$$(2n-1)^2 - 4(n^2 - 13n + 42) + 8 > 0$$

$$4n^2 - 48n + 144 - 4n^2 + 52n - 168 + 8 > 0$$

$$4n - 16 > 0$$

$$\therefore n > 4$$

Let p, q, r are in A.P. n is 5th term of A.P.

Answer

14

証明

$P(x)$ は $(x-a)^2$ で割り切れ、 $T = \frac{1}{n}$ である。

したがって $Ax + B$ である。

よって $A = 0$ かつ $B = 0$ である。

したがって $P(x) = 0$ である。

$P(x)$ は $(x-a)^2$ で割り切れ、 $T = \frac{1}{n}$ である。

$Q(x)$ である。

$$P(x) = (x-a)^2 Q(x) + Ax + B \dots (*)$$

ここで $x = a$ とすると $(*)$ の右辺は $x = a$ である。

したがって $P(a) = 0$ である。

$$P(a) = (a-a)^2 Q(a) + Aa + B$$

よって

$$P(a) = Aa + B \dots ①$$

したがって $x = a$ かつ $(*)$ の右辺は $x = a$ である。

したがって $P'(x)$ は $(x-a)^2$ で割り切れ、 $P'(a) = 0$ である。

$$P'(x) = \{(x-a)^2\}' Q(x) + (x-a)^2 Q'(x) + A + 0$$

よって

$$P'(x) = 2(x-a)Q(x) + (x-a)^2 Q'(x) + A \dots (**)$$

したがって $x = a$ とすると $(**)$ の右辺は $x = a$ である。

$$P'(a) = 2(a-a)Q(a) + (a-a)^2 Q'(a) + A$$

よって

$$P'(a) = A \dots ②$$

したがって $x = a$ である。

よって $P(x) = 0$ である。

$$P(x) = x^n - na^{n-1}x + (n-1)a^n$$

よって

$$x = a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$$\begin{aligned} P(a) &= a^n - na^{n-1} \cdot a + (n-1) \cdot a^n \\ &= \underline{a^n} - \underline{na^n} + \underline{na^n} - \underline{a^n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって $x = a$ である。

$$Aa + B = 0 \dots ③$$

したがって $P(x)$ は $(x-a)^2$ で割り切れ、 $P'(x)$ は $(x-a)^2$ で割り切れ、 $P'(a) = 0$ である。

$$\begin{aligned} P'(x) &= nx^{n-1} - na^{n-1} + 0 \\ &= nx^{n-1} - na^{n-1} \end{aligned}$$

よって $x = a$ である。

$$\begin{aligned} P'(a) &= na^{n-1} - na^{n-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって $x = a$ である。

$$A = 0 \dots ④$$

④と③より $0 \cdot a + B = 0$

$$0 \cdot a + B = 0$$

$$\therefore B = 0$$

よって

$$A = 0, B = 0$$

したがって $x = a$ である。

$$P(x) = (x-a)^2 Q(x)$$

したがって $x = a$ である。

$$(x-a)^2 \text{ で割り切れ、} T = \frac{1}{n} \text{ である。}$$

(15)

(1)

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

そこで両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$$

$$\frac{dy}{dt} = a(0 + \sin t)$$

よって、 $\frac{dy}{dx} =$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{a \cdot \sin t}{a(1 - \cos t)}$$

$$= \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

よって、点 P は $t = 0$

で与えられる。点 P は $t = 0$

接線の傾きは $\frac{dy}{dx}$ であり、 $t = 0$

$$\frac{\sin 0}{1 - \cos 0}$$

よって、 $t = 0$ のとき、接線の

傾きは m である。

$$m \times \frac{\sin 0}{1 - \cos 0} = -1$$

∴

$$m = -\frac{1 - \cos 0}{\sin 0}$$

よって、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a(0 - \sin 0)}{a(1 - \cos 0)}$$

よって、接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a(0 - \sin 0)}{a(1 - \cos 0)} = -\frac{1 - \cos 0}{\sin 0} \left\{ x - a(0 - \sin 0) \right\}$$

よって、点 Q は $x = \pi a$ 上にあり、

よって、 $x = \pi a$ である。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a(0 - \sin 0)}{a(1 - \cos 0)} = -\frac{1 - \cos 0}{\sin 0} \left\{ \pi a - a(0 - \sin 0) \right\}$$

$$\begin{aligned} y &= a(1 - \cos 0) - \frac{1 - \cos 0}{\sin 0} (\pi a - a(0 + a \sin 0)) \\ &= \frac{a(1 - \cos 0) \sin 0 - (1 - \cos 0)(\pi a - a(0 + a \sin 0))}{\sin 0} \end{aligned} \quad \text{①}$$

また、 $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$ のとき、 $t = 0$ のとき、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - \cos 0) \{ a \sin 0 - (\pi a - a(0 + a \sin 0)) \}}{\sin 0}$$

$$= \frac{(1 - \cos 0)(a \sin 0 - \pi a + a(0 + a \sin 0))}{\sin 0}$$

$$= \frac{(1 - \cos 0)(a(0 - \pi a))}{\sin 0}$$

$$= \frac{a(1 - \cos 0)(0 - \pi)}{\sin 0}$$

$$\frac{a(1 - \cos 0)(0 - \pi)}{\sin 0}$$

② 点 P は点 $(\pi a, 2a)$ であり、

よって、 $t = 0$ のとき、 $x = \pi a$ である。

$$よって、m = -\frac{1 - \cos 0}{\sin 0} = -1 \quad \text{よって、} t = 0 \text{ のとき、} t = 0$$

よって、

(1)

$$(1) \text{ の条件より } Y = \frac{a(1-\cos\theta)(\theta-\pi)}{\sin\theta}$$

としたいときは

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} Y$$

とすると $\theta \rightarrow \pi$ としたとき、分子の $\theta - \pi$ は 0 に近付き、分母の $\sin\theta$ も 0 に近付き、不定形 $\frac{0}{0}$ になる。よって、 $\frac{0}{0}$ の形になる。よって、不定形。

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} Y = \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{a(1-\cos\theta)(\theta-\pi)}{\sin\theta} = \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{a(1-\cos\theta)(\theta-\pi)}{\sin\theta}$$

とすると $\theta \rightarrow \pi$ のとき、 $u \rightarrow 0$ とすると

$$\theta = \pi + u \text{ とする。 } \theta - \pi = u \text{ である。 } \theta = \pi + u$$

とすると、 Y を u で表すと

$$Y = \frac{a(1-\cos(\pi+u))(\pi+u-\pi)}{\sin(\pi+u)}$$

$$= \frac{a(1-(-\cos u))(-u)}{-\sin u}$$

$$= -\frac{a(1+\cos u)u}{\sin u}$$

とすると、 $u \rightarrow 0$ のとき

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} Y = \lim_{u \rightarrow 0} \left\{ -\frac{a(1+\cos u)u}{\sin u} \right\}$$

よって、分子・分母を u で割ると

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} Y = -\lim_{u \rightarrow 0} \frac{a(1+\cos u)}{\frac{\sin u}{u}}$$

ここで

$$= -\frac{a(1+\cos 0)}{1}$$

$$= -a(1+1) = -2a$$

とすると、 $\theta \rightarrow \pi$ のとき、 $u \rightarrow 0$ とすると

点 Q の y 座標は $-2a$ に

近づく。点 Q の x 座標は πa

である。よって、点 Q は

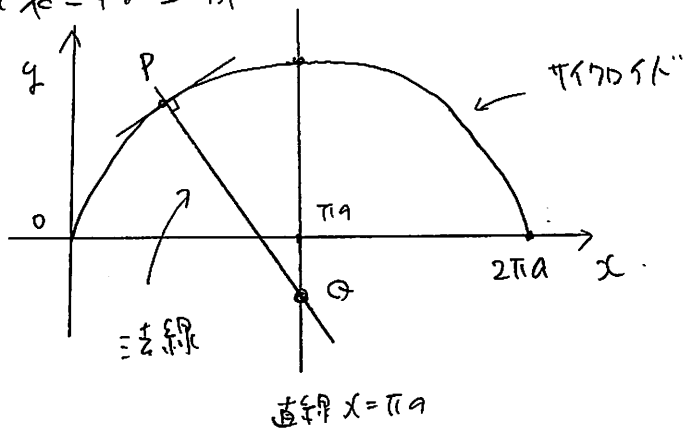
$$(\pi a, -2a)$$

に近づく。

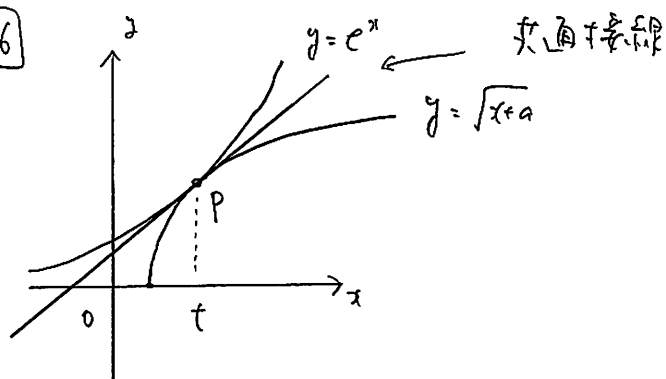
また

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$$

で表される曲線はサイクロイドと呼ばれる。



(16)



点Pのx座標をtとせよ。

また、2曲線の $y = e^x$, $y = \sqrt{x+a}$

は、点Pで接する。

y座標が等しくなる。

$$e^t = \sqrt{t+a} \quad \dots (1)$$

また、点Pにおいて、2曲線の接線が

共通である。この点において

接線の傾きが等しくなる。

よって、

$$y = e^x \text{ の場合 } y' = e^x$$

$$y = \sqrt{x+a} \text{ の場合 } y' = \frac{1}{2\sqrt{x+a}}$$

$$y' = \frac{1}{2} (x+a)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x+a)'$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+a}} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+a}}$$

よって、接線の傾きが等しくなる。

$$e^t = \frac{1}{2\sqrt{t+a}} \quad \dots (2)$$

が成り立つ。①と②より、

$$e^t = \frac{1}{2e^t}$$

$$\therefore (e^t)^2 = \frac{1}{2}$$

$$e^t = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$e^t = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

両辺を自然対数でとると

$$\log e^t = \log \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$t \log e = \log 2^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore t = -\frac{1}{2} \log 2$$

①に代入して、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{-\frac{1}{2} \log 2 + a}$$

両辺を2乗して

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \log 2 + a$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log 2$$

また、接線の傾きが等しくなる。

$$\text{点 } P \left(-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

において、傾きが $e^t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ x - \left(-\frac{1}{2} \log 2 \right) \right\}$$

$$\therefore y = \frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \log 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{\log 2 + 2}{2\sqrt{2}}$$

17

$$f(x) = \frac{1}{x} - e^{-ax}$$

かつ $x > 0$ である。極小値 $x > 0$ である。

x の方程式 $f'(x) = 0$ である。

$x > 0$ である。実数解 $x \in \mathbb{R}$ 。

また ± 3 は x の実数解 x の前後である。

$f'(x)$ の符号の推移から $x = 0$ は $f(x)$ の極小値である。

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2} - e^{-ax} \cdot (-ax)' \\ &= -\frac{1}{x^2} + ae^{-ax} \end{aligned}$$

$$= \frac{-1 + ax^2 e^{-ax}}{x^2}$$

したがって $f'(x)$ の符号は $g(x)$ と同じ。

$$g(x) = ax^2 e^{-ax} - 1 \quad \dots (*)$$

また $g(x)$ は $x > 0$ である。

$$\begin{aligned} g'(x) &= a \{ (x^2)' e^{-ax} + x^2 (e^{-ax})' \} - 0 \\ &= a \{ 2x e^{-ax} + x^2 e^{-ax} (-ax)' \} \\ &= a (2x e^{-ax} - ax^2 e^{-ax}) \\ &= ax e^{-ax} (2 - ax) \quad \dots (***) \end{aligned}$$

よって $(*)$ は $x > 0$ である。

$a < 0$ ならば $x^2 e^{-ax}$ は $x > 0$ である。

$$g(x) = \underbrace{ax^2 e^{-ax}}_{\text{負}} - 1$$

は $x > 0$ である。したがって $g(x) < 0$ である。

したがって $g(x) = 0$ は $x > 0$ である。

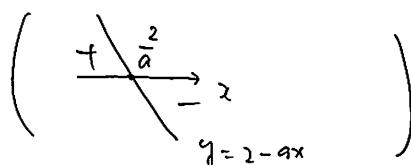
また $a = 0$ ならば $g(x) = -1$ である。

$a < 0$ の場合も同様である。 $g(x) = 0$ は $x > 0$ である。

また $a > 0$ である。

(*) は $ax^2 e^{-ax}$ は $x > 0$ である。

$g'(x)$ の符号は $2 - ax$ である。



また $g(x)$ の増減は $x = 2/a$ である。

x	0	...	$\frac{2}{a}$	...
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$	-1	↗	$g(\frac{2}{a})$	↘

したがって $g(x)$ は $x > 0$ である。

$x > 0$ の場合 $g(x)$ は $x > 0$ である。

また $g(x)$ は $x > 0$ である。

したがって $g(x)$ は $x > 0$ である。

$$g\left(\frac{2}{a}\right) > 0$$

したがって $g(x) > 0$ である。

$$\begin{aligned} g\left(\frac{2}{a}\right) &= a\left(\frac{2}{a}\right)^2 e^{-a \cdot \frac{2}{a}} - 1 \\ &= \frac{4}{a} e^{-2} - 1 \\ &= \frac{4}{a} \cdot \frac{1}{e^2} - 1 > 0 \end{aligned}$$

$$\frac{4}{ae^2} > 1$$

$$4 > ae^2$$

$$4 > ae^2$$

$$4 > ae^2$$

$$\frac{4}{e^2} > a$$

したがって $a > 0$ である。

$$0 < a < \frac{4}{e^2}$$

したがって $g(x) > 0$ である。

(1)

$$f(x) = \frac{(\log x)^n}{x}$$

よ、関数の定義域は $x > 0$

微分して

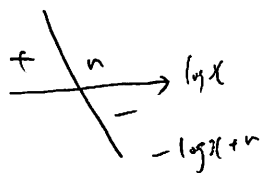
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\{(\log x)^n\}' \cdot x - (\log x)^n \cdot (x)'}{x^2} \\ &= \frac{n(\log x)^{n-1} \cdot (\log x)' \cdot x - (\log x)^n \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{n(\log x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\log x)^n}{x^2} \\ &= \frac{n(\log x)^{n-1} - (\log x)^n}{x^2} \\ &= \frac{(\log x)^{n-1} (n - \log x)}{x^2} \end{aligned}$$

おまけ

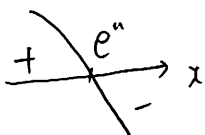
n が奇数の時、

$(\log x)^{n-1}$ は偶数乗なので、

よ、 $x > 0$ 以上 $x < 1$ まで、よ、



よ、



n が偶数の時、

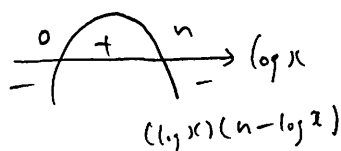
$$(\log x)^{n-1} (n - \log x)$$

$$= (\log x)^{n-2} \cdot (\log x) (n - \log x)$$

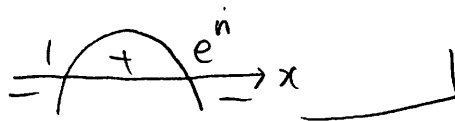
$(\log x)^{n-2}$ は偶数乗なので、

よ、 $x > 0$ 以上 $x < 1$ まで、

$$(\log x) (n - \log x) \Rightarrow 117$$



よ、



$$f'(x) = 0 \text{ かつ } n - \log x = 0 \quad \therefore \log x = n \quad \therefore x = e^n$$

($f = f''$), $f(x)$ の増減表は

x	0	...	e^n	-
$f'(x)$			+	-
$f(x)$			↗	↘

極大

$f(x)$ の増減表は、極大 (値は $f(e^n)$)

よ、

$$\begin{aligned} a_n &= f(e^n) \\ &= \frac{(\log e^n)^n}{e^n} = \frac{n^n}{e^n} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{n a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}}}{n \cdot \frac{n^n}{e^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} \div \frac{n^{n+1}}{e^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} \times \frac{e^n}{n^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \dots (*)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\text{2.2.3. (*) 2.2.4. (2)}$$

$$(*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \frac{1}{e} \cdot (1+0) \cdot e = \underline{\underline{1}}$$

19

$$(1) f_n(x) = x^n e^{-(n-1)x}$$

51. 微分する。

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= (x^n)' e^{-(n-1)x} + x^n \{ e^{-(n-1)x} \}' \\ &= nx^{n-1} e^{-(n-1)x} + x^n \cdot e^{-(n-1)x} \cdot \{ -(n-1)x \}' \\ &= nx^{n-1} e^{-(n-1)x} + x^n \cdot e^{-(n-1)x} \cdot \{ -(n-1) \} \\ &= x^{n-1} e^{-(n-1)x} \{ n - (n-1)x \} \end{aligned}$$

(2)

$x \geq 0$ だと $x^{n-1} \geq 0$ である。

また $e^{-(n-1)x}$ は常に正であるから。

$f'_n(x)$ の正負は $n - (n-1)x$ の

正負と一致する。 $n \geq 2$ だと。

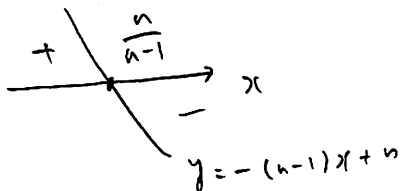
$y = -(n-1)x + n$ は傾き -1 の直線である。

また、この直線は x 軸と

$$-(n-1)x + n = 0$$

$$\therefore (n-1)x = n \quad \text{よって } x = \frac{n}{n-1}$$

で交わる。



($n \geq 2$ だと $f_n(x)$ の増減表は)

x	0	...	$\frac{n}{n-1}$	
$f'_n(x)$	/	+	0	-
$f_n(x)$		↗		↘

最大

ゆえに $f_n(x)$ の最大となる x は

$$x_n = \frac{n}{n-1}$$

※. 最大値 M_n は

$$M_n = f_n\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

$$= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n e^{-(n-1) \cdot \frac{n}{n-1}}$$

$$= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n e^{-n}$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^n M_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^n e^{-n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n-n} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^0 \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

==> $n-1 = k$ とおくと。

$n \rightarrow \infty$ のとき $k \rightarrow \infty$ であり、また

$$n = k+1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^n M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}$$

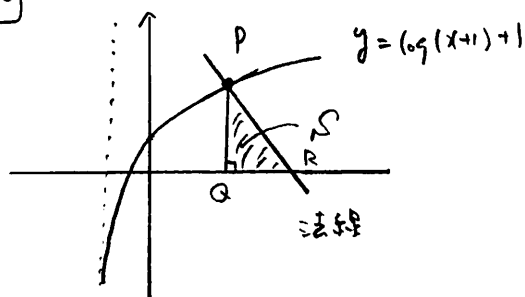
$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$= e(1+0) = e$$

$$\left(\text{よって} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e \right)$$

20



Pのx座標をtとする。

また、点Pからx軸に下ろした垂線の足をQ、点Pにおける法線とx軸との交点をRとする。

すると Q(t, 0) である。

また P(t, log(t+1)+1) における接線の傾きは

$$y' = \frac{1}{x+1}$$

よ) $\frac{1}{t+1}$ である。法線の傾きは

$-(t+1)$ である。ゆえに法線の方程式は

$$y - \{ \log(t+1) + 1 \} = -(t+1)(x-t)$$

よ) $y=0$ と代入して

$$0 - \{ \log(t+1) + 1 \} = -(t+1)(x-t)$$

$$\log(t+1) + 1 = (t+1)(x-t)$$

(両辺) (t+1) で割ると

$$\frac{\log(t+1) + 1}{t+1} = x-t$$

$$\therefore x = t + \frac{\log(t+1) + 1}{t+1}$$

よ)

$$R\left(t + \frac{\log(t+1) + 1}{t+1}, 0\right) \text{ である。}$$

ここで、三角形 OPR の面積は

$$(P \text{ の } x \text{ 座標}) - (O \text{ の } x \text{ 座標})$$

$$= \left(t + \frac{\log(t+1) + 1}{t+1} \right) - t$$

$$= \frac{\log(t+1) + 1}{t+1} > 0$$

である (t > 0 である)

$$OQ = \frac{\log(t+1) + 1}{t+1}$$

である。よ) $PQ = (P \text{ の } y \text{ 座標})$

である。

$$PQ = \log(t+1) + 1$$

よ) $\triangle OPQ$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot PQ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\log(t+1) + 1}{t+1} \cdot \{ \log(t+1) + 1 \}$$

$$= \frac{\{ \log(t+1) + 1 \}^2}{2(t+1)}$$

である。よ) $x > 0$ である

よ) S の最大値を求めよう。

S を t の関数と見て

$$\frac{dS}{dt} = \frac{2 \{ \log(t+1) + 1 \} \cdot \{ \log(t+1) + 1 \}' \cdot (t+1) - \{ \log(t+1) + 1 \}^2 \cdot (t+1)'}{2(t+1)^2}$$

$$= \frac{2 \{ \log(t+1) + 1 \} \cdot \frac{1}{t+1} \cdot (t+1) - \{ \log(t+1) + 1 \}^2}{2(t+1)^2}$$

$$= \frac{\{ \log(t+1) + 1 \} \{ 2 - \log(t+1) - 1 \}}{2(t+1)^2}$$

$$= \frac{\{ \log(t+1) + 1 \} \{ 1 - \log(t+1) \}}{2(t+1)^2}$$

$$\frac{d}{dt} S = 0 \text{ となる。}$$

$$2(t+1)^2 > 0, \log(t+1)+1 > 0$$

よ)

$$1 - \log(t+1) = 0$$

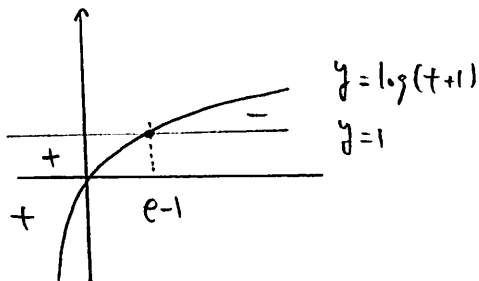
∴

$$\log(t+1) = 1$$

$$\text{よ) } t+1 = e \quad \therefore t = e-1$$

また、 $\frac{d}{dt} S$ の増減は、

$$1 - \log(t+1) \text{ の正負は } -3 \text{ である。}$$



$$y=1 \text{ となる } y = \log(t+1) \text{ の}$$

$$x \text{ 軸との交点は } t < e-1.$$

$$(1 - \log(t+1) \text{ は正})$$

$$y=1 \text{ となる } y = \log(t+1) \text{ の}$$

$$x \text{ 軸との交点は } e-1 < t.$$

よ、増減表は

t	0	...	e-1	...
$\frac{d}{dt} S$	/	+	0	-
S	/	↗	最大	↘

よ、 $t = e-1$ の時、 S は最大

$$\frac{d}{dt} S \text{ は}$$

$$S = \frac{\{\log(e-1+1)+1\}^2}{2\{(e-1)+1\}}$$

$$= \frac{(\log e + 1)^2}{2e}$$

$$= \frac{(1+1)^2}{2e} = \frac{4}{2e} = \frac{2}{e}$$

また、

$$S = \frac{\{\log(t+1)+1\}^2}{2(t+1)}$$

(= 1) となる。

$$\log(t+1) = u$$

と置くと、

$$t+1 = e^u \quad \text{よ} \quad t = e^u - 1$$

よ、

$$S = \frac{(u+1)^2}{2e^u}$$

$$= \frac{1}{2} (u+1)^2 e^{-u}$$

よ、 $t > 0$ の時、

$$u > \log(0+1) = 0.$$

$$u > 0 \text{ となる。}$$

$$u > 0 \text{ となる。 } S = \frac{1}{2} (u+1)^2 e^{-u}$$

の最大値は $\frac{2}{e}$ である。

21) $0 < a < 1$ とき.

$$f(x) = -ax + \sqrt{x^2 + 1}$$

増減表を調べる

$$f'(x) = -a + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 + 1)'$$

$$= -a + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x$$

$$= -a + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$f(x)$ の増減表を調べる

$f'(x)$ の正負を調べる

$\Rightarrow f'(x) = 0$ となる

$$y = a \text{ と } y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

の交点を求める

$f'(x)$ の正負を調べる

また、 x の定義域が $0 \leq x \leq 3$

なので $0 \leq x \leq 3$ となる

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ のグラフを調べる}$$

微分して

$$y' = \frac{(x)' \sqrt{x^2 + 1} - x \cdot (\sqrt{x^2 + 1})'}{(\sqrt{x^2 + 1})^2}$$

$$= \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 + 1} - x \cdot \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 + 1)'}{(\sqrt{x^2 + 1})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x}{(\sqrt{x^2 + 1})^2}$$

分母・分母を $\sqrt{x^2 + 1}$ で割ると

$$y' = \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - x^2}{(\sqrt{x^2 + 1})^3} = \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1})^3}$$

また、 $x = 0$ のとき $f'(0) = -a < 0$

$$y' = \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1})^3} \text{ は正の数である}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ は単調増加である}$$

また、 $0 \leq x \leq 3$ となる

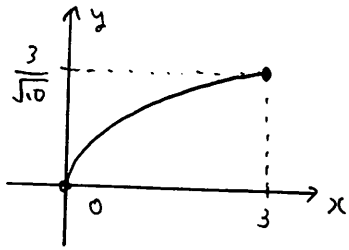
増減表は

x	0	...	3
y'		+	
y	0	$\nearrow$	$\frac{3}{\sqrt{10}}$

$$\left(\begin{array}{l} x=0 \text{ のとき } y = \frac{0}{\sqrt{0^2 + 1}} = 0 \\ x=3 \text{ のとき } y = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \end{array} \right)$$

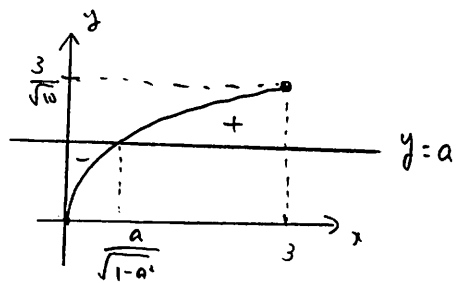
$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ のグラフ}$$

$0 \leq x \leq 3$ となる



以下、場合分け.

(I) $0 < a < \frac{3}{\sqrt{10}}$ のとき



$$y = a \text{ のとき } y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

の交点を求める

その交点の x 座標は

$$a = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

より

また、 $2 \leq x \leq 3$

$$a^2 = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

分母を $x^2 + 1$ で割ると

$$a^2(x^2 + 1) = x^2$$

$$a^2 x^2 - x^2 = -a^2$$

$$(a^2 - 1)x^2 = -a^2$$

$0 < a < 1$ より

$$x^2 = \frac{-a^2}{a^2 - 1}$$

$$= \frac{a^2}{1 - a^2}$$

また、 x は正の数

$$x = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}$$

また、 $1 - a^2 > 0$

$$0 < x < \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}$$

また

直線 $y = a$ の場合

曲線 $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ と

の交点を

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - a$$

は負の数

同様に

$$\frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} < x < 3$$

また

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - a$$

は正の数

よ、 $f(x)$ の増減表は

x	0	...	$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	...	3
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘		↗	

$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ 点

よ、 $x = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ で $\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ 点

$$\begin{aligned} \therefore f\left(\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\right) &= -a \cdot \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} + \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\right)^2 + 1} \\ &= -\frac{a^2}{\sqrt{1-a^2}} + \sqrt{\frac{a^2 + 1 - a^2}{1-a^2}} \\ &= -\frac{a^2}{\sqrt{1-a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \\ &= \frac{1-a^2}{\sqrt{1-a^2}} \\ &= \frac{(\sqrt{1-a^2})^2}{\sqrt{1-a^2}} \\ &= \sqrt{1-a^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - a \quad \leftarrow F$$

は $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = a$ とする。

よ、 $f(x)$ の増減表は

x	0	...	3
$f'(x)$		-	
$f(x)$		↘	

$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ 点

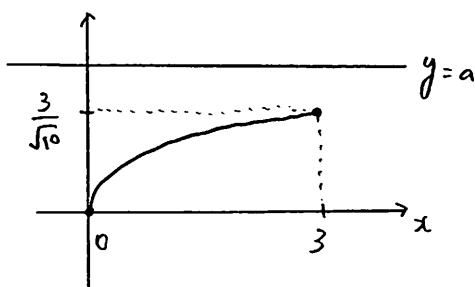
$x = 3$ で $\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ 点

$$\begin{aligned} \therefore f(3) &= -a \cdot 3 + \sqrt{3^2 + 1} \\ &= \sqrt{10} - 3a \end{aligned}$$

よ、 $f(x)$ の最大値は

$$\begin{cases} 0 < a < \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ のとき } \sqrt{1-a^2} & (x = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}) \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \leq a < 1 \text{ のとき } \sqrt{10} - 3a & (x = 3) \end{cases}$$

(Ⅱ) $\frac{3}{\sqrt{10}} \leq a < 1$ のとき



$0 \leq x \leq 3$ のとき、 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = a$ とする。

$y = a$ のとき $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

よ、 $x = 3$ とする。

22

方程式

$$(a-1)e^x - x + 2 = 0 \dots (*)$$

1. 7.

$$ae^x - e^x - x + 2 = 0$$

$$ae^x = e^x + x - 2$$

$$e^x > 0 \text{ 所以}$$

$$a = \frac{e^x + x - 2}{e^x}$$

$$= \frac{e^x}{e^x} + \frac{x-2}{e^x}$$

$$= 1 + (x-2)e^{-x}$$

4. 2. 方程式 (*) の実数解の個数は、2 曲線の

$$\begin{cases} y = a \\ y = 1 + (x-2)e^{-x} \end{cases}$$

の交点の個数に等しい。

よって、

$$y = 1 + (x-2)e^{-x}$$

のグラフをかく。

$$y' = 0 + (x-2)e^{-x} + (x-2)(e^{-x})'$$

$$= 1 \cdot e^{-x} + (x-2)(-e^{-x})$$

$$= e^{-x} \{ 1 - (x-2) \}$$

$$= e^{-x} (3-x)$$

$$\text{よって、 } y' = 0 \text{ となる } x \text{ は } e^{-x} > 0 \text{ 所以}$$

$$x = 3.$$

$$\left(\begin{array}{c} y' \\ + \quad | \quad - \\ \hline x=3 \end{array} \right)$$

± 増減表

x	...	3	...
y'	+	0	-
y	↗	1+e ⁻³	↘

$$x=3 \text{ のとき } y = 1 + (3-2)e^{-3} = 1 + e^{-3}$$

$$1 \times 5. \text{ 7. } 7. \text{ 7. } 7. \text{ 7. }$$

$$\begin{cases} a > 1 + \frac{1}{e^3} \dots 0 \text{ 解} \\ a = 1 + \frac{1}{e^3}, a \leq 1 \dots 1 \text{ 解} \\ 1 < a < 1 + \frac{1}{e^3} \dots 2 \text{ 解} \end{cases}$$

$$x=3 \text{ とき}$$

また、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \{ 1 + (x-2)e^{-x} \}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x-2}{e^x} \right)$$

$$= 1 + 0 = 1$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{3 値 となる } x \text{ の値} \\ \frac{x-2}{e^x} \leftarrow \text{3 値} \\ \frac{x-2}{e^x} \leftarrow \text{3 値} \end{array} \right)$$

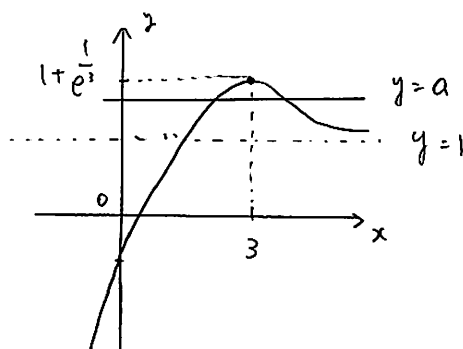
$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \{ 1 + (x-2)e^{-x} \}$$

$$= -\infty$$

$$\left(\begin{array}{cc} (x-2)e^{-x} & \\ \downarrow & \downarrow \\ -\infty & e^{-(-\infty)} = e^{\infty} = \infty \end{array} \right)$$

$$\text{よって } y = 1 + (x-2)e^{-x}$$

のグラフは F12



23

1X F.

$$f(x) = \log x - (ax + b)$$

とある。

(1)

$$f'(x) = \frac{1}{x} - a$$

である。ここで真数は正なので $x > 0$

より、まず $a \leq 0$ である。

$-a \geq 0$ である。

$$f'(x) = \frac{1}{x} - a > 0$$

正 (0 < x < ∞)

である。よって $f(x)$ は単調増加である。

増える。

また、

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\log x - ax - b) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\log x - ax - b) = \infty$$

$$\left(\log x \rightarrow \infty, -ax \rightarrow +\infty \right)$$

(f) が、7. 増減表は

x	0	
f'(x)		+
f(x)		$-\infty \rightarrow \infty$

である。また $f(x)$ は単調増加である。

$f(x)$ が単調増加であることは、

中間値の定理から

$$f(x) = 0$$

とある x が $f(x) = 0$ となる。

存在する。

(2)

$a > 0$ のとき、

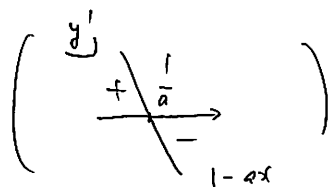
$$x > 0 \text{ において } f(x) = 0$$

とある x が存在する。

$$f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1 - ax}{x}$$

$$f(x) = 0 \text{ となる } x \text{ は}$$

$$x = \frac{1}{a}$$



増減表は

x	0		1/a	
f'(x)		+	0	-
f(x)		$-\infty$		$-\infty$

また、

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\log x - ax - b) = -\infty$$

$$f(x) = 0 \text{ となる } x > 0 \text{ において}$$

とある x が存在する。

$$f\left(\frac{1}{a}\right) > 0$$

である。

また

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \log \frac{1}{a} - \left(a \cdot \frac{1}{a} + b\right)$$

$$= -\log a - (1 + b) > 0$$

$$b < -\log a - 1$$

(2) として $a > 0$

$$b < -\log a - 1$$

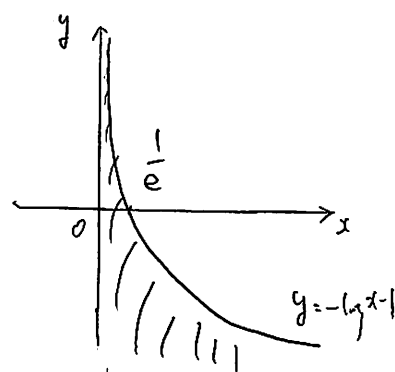
である。

x, y 平面において、

2. の領域

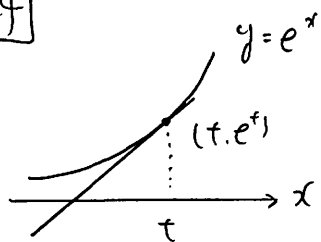
$$x > 0, y < -\log x - 1$$

の共通領域を図示する。



図の斜線部分 (境界含まず)

24



$y = e^x$ 上の点 (t, e^t)

において、接線を $3 < t$

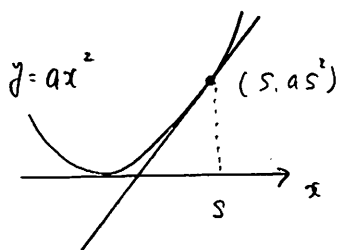
$y' = e^x$ より、この点における

接線の傾きは e^t

よって接線の方程式は

$$y - e^t = e^t(x - t)$$

$$\therefore y = e^t x - t e^t + e^t \dots ①$$



また、曲線 $y = ax^2$ 上の

点 (s, as^2) における接線は

$$y' = 2ax \text{ より}$$

$$y - as^2 = 2as(x - s)$$

より

$$y = 2asx - as^2 \dots ②$$

よって

2つの曲線に接する直線とは

上述 ①、② が一致する

時であるから、直線の傾きは

e^t と $2a$ が等しくなければならない。

($t \neq 1$)

$$\begin{cases} e^t = 2as \dots (\text{傾き}) \dots ③ \\ -te^t + e^t = -as^2 \dots (\text{y切片}) \dots ④ \end{cases}$$

が成り立つように。

③より

$$s = \frac{1}{2a} e^t$$

これを ④ に代入すると

$$-te^t + e^t = -a \left(\frac{1}{2a} e^t \right)^2$$

$$\therefore -te^t + e^t = -a \cdot \frac{1}{4a^2} (e^t)^2$$

ここで $e^t > 0$ より、両辺 e^{t-2} を割ると

$$-t + 1 = -\frac{1}{4a} e^t$$

よって両辺に $(-a)$ をかけると

$$a(t-1) = \frac{1}{4} e^t$$

ここで $t=1$ はこの方程式の

解ではないので

$$(t=1 \text{ の時、左辺} = 0, \text{右辺} = \frac{1}{4} e)$$

$t-1 \neq 0$ より、両辺を $t-1$ で

割ると

$$a = \frac{e^t}{4(t-1)} \dots (*)$$

が成り立つように。よって、この方程式 (*)

の解の個数をたいて接線が

存在するので、方程式 (*) の

解の個数を調べる。つまり

2曲線

$$\begin{cases} y = a \\ y = \frac{e^t}{4(t-1)} \end{cases}$$

の交点の個数を調べる。

$$y = \frac{e^t}{4(t-1)}$$

の定義域は $t \neq 1$

よって

$$y' = \frac{(e^t)'(t-1) - e^t(t-1)'}{4(t-1)^2}$$

$$= \frac{e^t(t-1) - e^t \cdot 1}{4(t-1)^2}$$

$$= \frac{e^t(t-2)}{4(t-1)^2}$$

$y' = 0$ とおくと

$$e^t > 0 \text{ より } t = 2$$

$$\left(\frac{t}{-2} \rightarrow t \right)$$

増減表は

t	...	1	...	2	...
y'	-	/	-	0	+
y	$\searrow$ $-\infty$	/	$\searrow$ $\frac{e}{4}$	$\nearrow$ ∞	

よって極小値は

$\lim_{t \rightarrow \infty} y$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t}{4(t-1)}$$

$= \infty$

$$\left(\begin{array}{l} \text{3重根の不等式} \\ \frac{e^t}{4(t-1)} < \frac{e}{4} \end{array} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^t}{4(t-1)}$$

$$t = -u \text{ とおくと}$$

$$t \rightarrow -\infty \text{ となる } u \rightarrow \infty$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow -\infty} y = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{e^{-u}}{4(-u-1)}$$

$$= - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{e^{-u}}{4(u+1)}$$

$$= - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{4(u+1)e^u}$$

$$= -0 = 0$$

($t = 1$ のとき、 y は未定義)

$y = a$ とする点の個数は

$$\left\{ \begin{array}{ll} a > \frac{e^2}{4} \dots & 2 \text{ 本} \\ a = \frac{e^2}{4} \dots & 1 \text{ 本} \\ 0 < a < \frac{e^2}{4} \dots & 0 \text{ 本} \\ a < 0 \dots & 1 \text{ 本} \end{array} \right.$$

と決まる。

また、

$$\lim_{t \rightarrow 1+0} y = \lim_{t \rightarrow 1+0} \frac{e^t}{4(t-1)} = +\infty$$

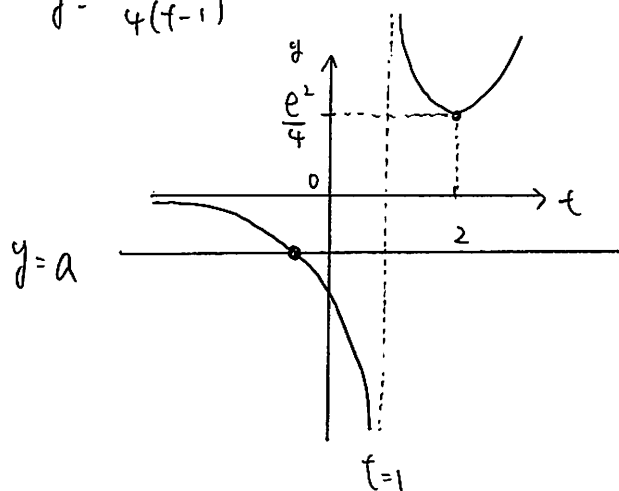
$$\left(\frac{e^{1+0}}{4(1+0-1)} = \frac{e}{4 \underline{(1+0-1)}} = +\infty \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} y = \lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{e^t}{4(t-1)} = -\infty$$

$$\left(\frac{e^{1-0}}{4(1-0-1)} = \frac{e}{4 \underline{(1-0-1)}} = -\infty \right)$$

したがって

$$y = \frac{e^t}{4(t-1)} \text{ のグラフは、次の通りである。}$$



25

$$f(x) = \frac{a - \cos x}{x^2}$$

1. 微分する。

$$f'(x) = \frac{(a - \cos x)'x^2 - (a - \cos x) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{\sin x \cdot x^2 - (a - \cos x) \cdot 2x}{x^4}$$

2. 分子を整理する。

$$f'(x) = \frac{\sin x \cdot x - (a - \cos x) \cdot 2}{x^3}$$

$$= \frac{x \sin x - 2a + 2 \cos x}{x^3}$$

3. 関数 $f(x)$ が $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ において増加関数になることは、

$0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ において、常に $f'(x) \geq 0$ が成り立つことを意味する。

$f'(x)$ の分子は常に正なので、

$0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ において、

$$x \sin x - 2a + 2 \cos x \geq 0$$

が成り立つのはよい。つまり

$$-2a \geq -2 \cos x - x \sin x$$

$$\therefore a \leq \cos x + \frac{1}{2} x \sin x \quad \dots (*)$$

2. 3. 成り立つとき、(*) が $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ において成り立つためには、

$$g(x) = \cos x + \frac{1}{2} x \sin x$$

$0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ において最小値

以下に示す a として言えるから、

(極点理論)

$$g(x) = \cos x + \frac{1}{2} x \sin x \quad 1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$g'(x) = -\sin x + \frac{1}{2} \{ (x)' \sin x + x (\sin x)' \}$$

$$= -\sin x + \frac{1}{2} (\sin x + x \cos x)$$

$$= \frac{1}{2} x \cos x - \frac{1}{2} \sin x$$

$$= \frac{1}{2} (x \cos x - \sin x)$$

4. $h(x) = x \cos x - \sin x$ とおく。 $h(x)$ の増減を調べる。

$$h'(x) = (x)' \cos x + x (\cos x)' - \cos x$$

$$= \cos x + x (-\sin x) - \cos x$$

$$= -x \sin x$$

5. $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\sin x > 0$ より $x > 0$

より、 $h'(x) = -x \sin x < 0$ である。つまり $h(x)$ は単調減少である。

(したがって、 $h(x)$ は単調増加である。

増減表は

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		-	
$h(x)$	0	↘	

$$(h(0) = 0 \cdot \cos 0 - \sin 0 = 0 \cdot 1 - 0 = 0)$$

6. $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ において $h(x) < 0$

であることがわかる。

$$\therefore g'(x) = \frac{1}{2} h(x) < 0 \quad \text{である。}$$

$g(x)$ は単調減少である。 $g(x)$ の増減表は

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		-	
$g(x)$	1	↘	$\frac{\pi}{4}$

$$(g(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4})$$

7. $g(x)$ は $x = \frac{\pi}{2}$ で最小値 $\frac{\pi}{4}$

よって $a \leq \frac{\pi}{4}$ である。 a の最大値は $\frac{\pi}{4}$

1.1 証明) 数学的帰納法を用いて $n \in \mathbb{N}$ として示す。
1.1 証明) 示す。

(I) $n=1$ の場合。
 $e^x > 1+x$
を示す。

$$f(x) = e^x - (1+x)$$

2.1 示す。 $f(x)$ が単調増加であることを示す。

$$f'(x) = e^x - (0+1) \\ = e^x - 1$$

3.1 $x > 0$ のとき $e^x > 1+x$ を示す。

4.1 示す。
 $e^x > e^0$
 $\therefore e^x - 1 > 0$

5.1 $f'(x) > 0$ が成り立つ。

増減表を作る。

x	0	...
$f'(x)$		+
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$

$$(f(0) = e^0 - (1+0) = 1 - 1 = 0)$$

6.1 示す。 $x > 0$ のとき $f(x) > 0$

7.1 示す。 $x > 0$ のとき $e^x > 1+x$

$$e^x > 1+x$$

8.1 示す。

9.1 $n=1$ の場合。問題意は成り立つ。

(II) $n=k+1$ の場合を示す。

1.1 示す。

$$e^x > 1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^k}{k!} \quad (*)$$

2.1 示す。 $n=k+1$ の場合。

$$n=k+1 \text{ の場合 } (左辺) - (右辺) \text{ を}$$

$$f_k(x) \text{ とおく。}$$

$$f_k(x) = e^x - \left\{ 1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \right\}$$

$$\text{2.1 示す。 } x > 0 \text{ のとき } f_k(x) > 0$$

3.1 示す。 $f_k(x)$ が単調増加であることを示す。

$$f'_k(x) = e^x - \left\{ 0+1+\frac{2x}{2!}+\frac{3x^2}{3!}+\dots+\frac{(k+1)x^k}{(k+1)!} \right\} \\ = e^x - \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^k}{k!} \right) \quad (**)$$

4.1 示す。

$$\left(\frac{(k+1)x^k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)x^k}{(k+1) \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \right. \\ = \frac{\cancel{(k+1)} x^k}{\cancel{(k+1)} \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \\ \left. = \frac{x^k}{k!} \right)$$

5.1 示す。 (*) より

$$e^x - \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^k}{k!} \right) > 0$$

6.1 示す。 (**) より $f'_k(x) > 0$

7.1 $f_k(x)$ の増減表を作る。

x	0	...
$f'_k(x)$		+
$f_k(x)$	$f_k(0)$	$\nearrow$

$$(f_k(0) = e^0 - (1+0+\frac{0^2}{2!}+\dots+\frac{0^{k+1}}{(k+1)!}) = 1 - 1 = 0)$$

42) $x > 0$ について

$f_k(x) > 0$ が成り立つ。

より $n = k+1$ の時も 題意 は成り立つ。

以上 (I)(II)より

すべての自然数 n について

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

が成り立つ。 //

27

(1)

$$f(x) = x^2 + 4n \cos x + 1 - 4n$$

よって 微分して

$$f'(x) = 2x + 4n(-\sin x)$$

$$= 2x - 4n \sin x$$

よって。 $f'(x) = 0$ となる x は

$$f''(x) = 2 - 4n \cos x$$

よって。 $f''(x) = 0$ となる x は

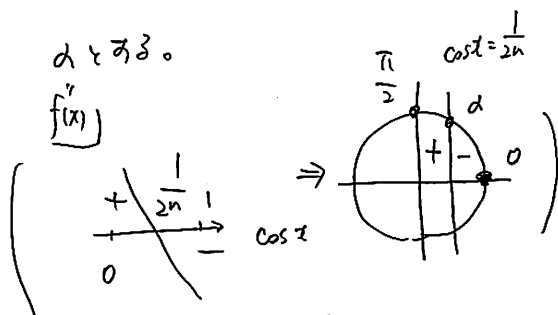
$$2 - 4n \cos x = 0$$

$$\therefore \cos x = \frac{1}{2n}$$

よって。 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ となる x は

よって $f'(x) = 0$ となる x は

よって。



よって $f'(x) = 0$ となる x は

x	0	...	α	...	$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$		-	0	+	
$f'(x)$	(0)	$\searrow$		$\nearrow$	($\pi - 4n$)

$$\begin{pmatrix} f'(0) = 2 \cdot 0 - 4n \sin 0 = 0 \\ f'(\frac{\pi}{2}) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 4n \sin \frac{\pi}{2} = \pi - 4n \end{pmatrix}$$

よって。 $f'(\frac{\pi}{2}) = \pi - 4n > 0$ となる n は

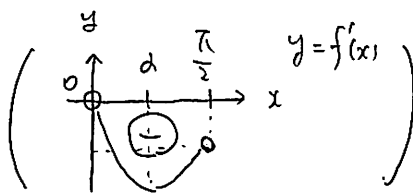
$$n \geq 1 \text{ である。}$$

$$\pi - 4n \leq \pi - 4 < 0$$

$$(\pi < 4 \text{ である})$$

よって。

$f'(\frac{\pi}{2}) = 0$ となる x は



よって。 $f'(x) = 0$ となる x は

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ となる } x \text{ は}$$

$f'(x) = 0$ となる x は

よって。

よって $f'(x) = 0$ となる x は

よって。 $f'(x) = 0$ となる x は

よって。

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		-	
$f(x)$	(1)	$\searrow$	($\frac{\pi^2}{4} + 1 - 4n$)

$$f(0) = 0^2 + 4n \cos 0 + 1 - 4n$$

$$= 4n \cdot 1 + 1 - 4n = 1$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})^2 + 4n \cos \frac{\pi}{2} + 1 - 4n$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + 4n \cdot 0 + 1 - 4n$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + 1 - 4n$$

よって。 $n \geq 1$ となる n は

$$\frac{\pi^2}{4} + 1 - 4n \leq \frac{\pi^2}{4} + 1 - 4$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 3$$

$$= \frac{\pi^2 - 12}{4}$$

よって。 $n \geq 1$ となる n は

$\pi < 3.2$ である

よって。

$$\pi < 3.2$$

よって 2 である

$$\pi^2 < 3.2^2$$

よって

$$\pi^2 < 10.24$$

よって。

$$\frac{\pi^2 - 12}{4} < \frac{10.24 - 12}{4} < 0$$

よって。

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} + 1 - 4n < 0$$

よって。

よって。

$f(x) = 0$ となる x は

よって $f'(x) = 0$ となる x は

$$f(0) > 0, f(\frac{\pi}{2}) < 0$$

よって。

$$f(x) = 0 \text{ となる } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

よって $n \geq 1$ となる n は

$$f(0) > 0, f(\frac{\pi}{2}) < 0$$

(2)

「 $f(0) > 0, f(\frac{\pi}{2}) < 0$ 」

よって

「単調増加 0 or 減少」

「 $f(0) > 0, f(\frac{\pi}{2}) < 0$ 」

よって $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$f(\frac{\pi}{2}) < 0 \text{ である。}$$

$\pi < 3.2$ である

よって 2 である

(2) (1)の条件を満たす x は

x_n とするとき

$$f(x_n) = 0 \Rightarrow 0 < x_n < \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ。つまり

$$x_n^2 + 4n \cos x_n + 1 - 4n = 0 \dots (1)$$

より

$$0 < x_n < \frac{\pi}{2} \dots (2)$$

でよ。 $\therefore (2)$ の範囲で 2 番目の

$$0 < x_n^2 < \frac{\pi^2}{4} \dots (3)$$

とよ。 $\therefore (1), (2)$ より

$$x_n^2 = -4n \cos x_n - 1 + 4n$$

$\therefore (3)$ より x_n は

$$0 < -4n \cos x_n - 1 + 4n < \frac{\pi^2}{4} \dots (4)$$

(4) の範囲で $(-4n)$ を加えて

$$-4n < -4n \cos x_n < -4n + \frac{\pi^2}{4}$$

より $(-4n)$ を割ると、不等式の

向きに注意して

$$\frac{-4n}{-4n} > \cos x_n > \frac{-4n + \frac{\pi^2}{4}}{-4n}$$

より

$$1 - \frac{1}{4n} > \cos x_n > 1 - \frac{1 + \frac{\pi^2}{4}}{4n} \dots (5)$$

が成り立つ。(5) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{4n}\right) = 1$$

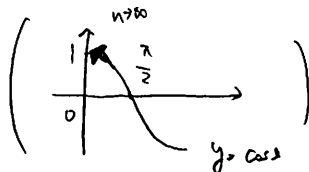
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1 + \frac{\pi^2}{4}}{4n}\right) = 1$$

よって、 $\cos x_n$ の原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos x_n = 1$$

$$\text{よ} \quad 0 < x_n < \frac{\pi}{2} \text{ より}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 //$$



(おかし)

n が非常に大きいとき

とよ。 (1) より

成り立つのは $4n$ が大きい。

$$x_n^2 + 4n \cos x_n + 1 - 4n = 0$$

よって左辺を x_n の関数と見ると

$0 =$ とよ。 $\therefore$ x_n は

$$\frac{4n \cos x_n + 1 - 4n}{x_n^2}$$

の極限を $x_n \rightarrow 0$ のとき

とよ。 $\therefore$ x_n は 0 に近づく

とよ。 $\therefore$ x_n は 0 に近づく

とよ。 $\therefore$ x_n は 0 に近づく

$1 =$ より

$$(\cos x_n - 1) \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty$$

でよ。

(3)

$$(2) \text{ より } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

でよ。 $\therefore$ (1) より

$$4n \cos x_n - 4n = -x_n^2 - 1$$

$$4n(\cos x_n - 1) = -(x_n^2 + 1)$$

$$\therefore n = -\frac{x_n^2 + 1}{4(\cos x_n - 1)}$$

とよ。 $\therefore$ x_n は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n^2 = \text{定数}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{x_n^2 + 1}{4(\cos x_n - 1)} \right\} \cdot x_n^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n^2 + 1)x_n^2}{4(1 - \cos x_n)} \dots (*)$$

$\therefore x_n = t$ とおくと

(2) より $n \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow 0$

よって (*) は

$$(*) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t^2 + 1)t^2}{4(1 - \cos t)}$$

$$\text{よって } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \cos t} = \frac{1}{1 - \cos t}$$

とよ。 $\therefore$ x_n は

$$(*) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t^2 + 1)t^2(1 + \cos t)}{4(1 - \cos t)(1 + \cos t)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t^2 + 1)t^2(1 + \cos t)}{4(1 - \cos^2 t)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t^2 + 1)t^2(1 + \cos t)}{4 \cdot \sin^2 t}$$

よって $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t}$

$$(*) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t^2 + 1)(1 + \cos t)}{4 \cdot \frac{\sin^2 t}{t^2}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t^2 + 1)(1 + \cos t)}{4 \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2}$$

$$= \frac{(0^2 + 1)(1 + \cos 0)}{4 \cdot 1^2}$$

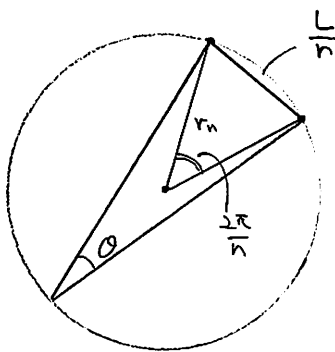
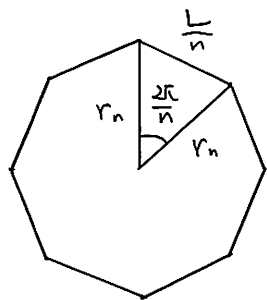
$$= \frac{1 \cdot (1 + 1)}{4 \cdot 1^2}$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

———

28

(1)



$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$$

(2) のように、正n角形は

二等辺三角形が n 個

ついているから、

この二等辺三角形の

辺の長さは、 $r_n, r_n, \frac{L}{n}$

である。(正n角形の外接円の半径が L である)

(1) 中心角は 360° (つまり 2π)

を n 等分するので $\frac{2\pi}{n}$ である。

(1) から、この二等辺三角形で

余弦定理より、

$$\left(\frac{L}{n}\right)^2 = (r_n)^2 + (r_n)^2 - 2 \cdot r_n \cdot r_n \cdot \cos \frac{2\pi}{n}$$

$$= 2r_n^2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\frac{L}{n} \text{ の } 1/2 \text{ (対辺)} \quad \sin^2 \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right) \text{ である}$$

$$\left(\frac{L}{n}\right)^2 = 2r_n^2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\pi}{n}$$

$$\text{よって、} n > 2 \text{ のとき } \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{2} \text{ より } \sin \frac{\pi}{n} > 0$$

よって

$$\frac{L}{n} = 2r_n \sin \frac{\pi}{n}$$

より

$$r_n = \frac{L}{2n \sin \frac{\pi}{n}}$$

(3) (2) のように θ をとると

中心角と円周角の関係より

$$= \frac{L}{2\pi \cdot 1} = \frac{L}{2\pi}$$

ただし

$n \rightarrow \infty$ とすると、正n角形は

円に限りなく近づく。

(1) から、 L は円周の長さである

$$2\pi r = L \therefore r = \frac{L}{2\pi}$$

である。

(3)

$$r_n = \frac{L}{2n \sin \frac{\pi}{n}}$$

であるから

$$r_n > r_{n+1} \text{ が成り立つこと。}$$

$$r_n < r_{n+1} \text{ であることを}$$

$$\frac{1}{r_n} < \frac{1}{r_{n+1}} \text{ が成り立つことを}$$

$$\frac{1}{r_n} = \frac{2n \sin \frac{\pi}{n}}{L} \dots (1)$$

である。

$$f(x) = \frac{1}{x} \sin x$$

である。

$$f\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{n}{\pi} \sin \frac{\pi}{n}$$

より (1) より

$$\frac{1}{r_n} = \frac{2\pi}{L} \cdot \frac{n}{\pi} \sin \frac{\pi}{n}$$

$$= \frac{2\pi}{L} f\left(\frac{\pi}{n}\right) \dots (2)$$

であるから

$$\frac{1}{r_n} < \frac{1}{r_{n+1}}$$

であることは

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L}{2n \sin \frac{\pi}{n}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L}{2 \cdot \frac{\pi}{t} \cdot \sin t}$$

である。 $n \rightarrow \infty$ のとき

$t \rightarrow 0$ である。

$$\text{よって、} n = \frac{\pi}{t} \text{ として}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L}{2 \cdot \frac{\pi}{t} \cdot \sin t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L}{2\pi \cdot \frac{\sin t}{t}}$$

② ⑤)

$$\frac{2\pi}{L} f\left(\frac{\pi}{n}\right) < \frac{2\pi}{L} f\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$$

よす)

$$f\left(\frac{\pi}{n}\right) < f\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$$

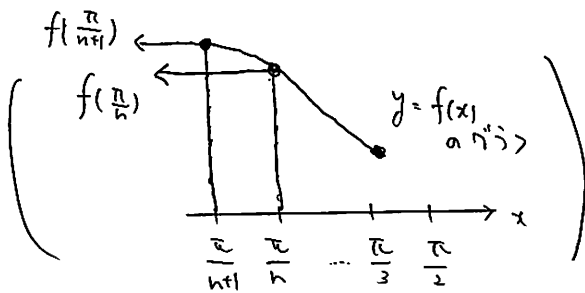
おの示せたい。

$$\frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{n+1} < \frac{\pi}{2}$$

おの示す。

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ において } f(x) \text{ は単調増加である。}$$

よす。 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において



$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ ⑤) ⑥) ⑦)}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sin x)' \cdot x - \sin x \cdot (x)'}{x^2} \\ &= \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$g(x) = x \cos x - \sin x$$

よす。

$$g'(x) = (x)' \cos x + x (\cos x)' - (\sin x)'$$

$$= 1 \cdot \cos x + x (-\sin x) - \cos x$$

$$= \cos x - x \sin x - \cos x$$

$$= -x \sin x$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ において}$$

$$x > 0, \sin x > 0 \text{ である。}$$

$$g'(x) = -x \sin x < 0$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ において}$$

$g'(x)$ は単調減少である。

$g(x)$ は単調増加である。

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		-	
$g(x)$	0	↘	

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \cdot \cos 0 - \sin 0 \\ &= 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ において}$$

$$g(x) < 0 \text{ である。}$$

③ ⑤)

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} < 0$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ において}$$

単調増加である。

29

$$0 < a < b \text{ である}$$

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\log b - \log a} < \frac{a+b}{2}$$

これを証明する。

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\log b - \log a} \quad \dots \textcircled{1}$$

右

$$\frac{b-a}{\log b - \log a} < \frac{a+b}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

これを証明する。

①は証明する。左辺は $a > 0$ のとき、
 $\log a$ は

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\log b - \log a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{ab}}{a} < \frac{\frac{b}{a} - 1}{\log b - \log a}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{b}{a}} < \frac{\frac{b}{a} - 1}{\log \frac{b}{a}}$$

これを証明する。左辺は $a < b$ である。

$$1 < \frac{b}{a} \text{ である。 } \frac{b}{a} = t \text{ である。}$$

$t > 1$ である。

$$\sqrt{t} < \frac{t-1}{\log t} \quad \dots \textcircled{3}$$

これを証明する。左辺は $a < b$ である。

③は証明する。

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow \frac{t-1}{\log t} - \sqrt{t} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{t-1-\sqrt{t}\log t}{\log t} > 0$$

右) $t > 1$ である。 $\log t > 0$ である。

$$\Leftrightarrow t-1-\sqrt{t}\log t > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{t-1}{\sqrt{t}} - \log t > 0 \quad (\because \sqrt{t} > 0 \text{ である})$$

左) t

$$f(t) = \frac{t-1}{\sqrt{t}} - \log t \text{ である}$$

$t > 1$ である。 $f(t) > 0$ であることを証明する。

$$f'(t) = \frac{(t-1)\sqrt{t} - (t-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}}{(\sqrt{t})^2} - \frac{1}{t}$$

$$= \frac{1 \cdot \sqrt{t} - (t-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}}{(\sqrt{t})^2} - \frac{1}{t}$$

$$= \frac{2t - (t-1)}{2(\sqrt{t})^3} - \frac{1}{t}$$

$$= \frac{t+1}{2(\sqrt{t})^3} - \frac{1}{t}$$

$$= \frac{t+1-2\sqrt{t}}{2(\sqrt{t})^3}$$

$$= \frac{(\sqrt{t}-1)^2}{2(\sqrt{t})^3} > 0.$$

右) $f(t)$ の極値を調べる。

t	1	
$f'(t)$		+
$f(t)$	$f(1)$	→

右)

$$(f(1) = \frac{1-1}{\sqrt{1}} - \log 1 = 0 - 0 = 0)$$

5) $t > 1$ において $f(t) > 0$ がい
成り立つ。よって ① が成り立つ。

② において $t < 1$ である。

$$\frac{b-a}{\log b - \log a} < \frac{a+b}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{b}{a} - 1}{\log b - \log a} < \frac{1 + \frac{b}{a}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{b}{a} - 1}{\log \frac{b}{a}} < \frac{1 + \frac{b}{a}}{2}$$

5) $\frac{b}{a} = t$ とおくと

$$\frac{t-1}{\log t} < \frac{1+t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(t-1) - (1+t)\log t}{2\log t} < 0$$

$$\Leftrightarrow 2(t-1) - (1+t)\log t < 0 \quad (\because \log t > 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(t-1)}{1+t} - \log t < 0 \quad (\because \log t > 0)$$

よって

$$g(t) = \frac{2(t-1)}{1+t} - \log t$$

よって $t > 1$ において $g(t) < 0$ である。

$$g'(t) = 2 \cdot \frac{(t-1)'(1+t) - (t-1) \cdot (1+t)'}{(1+t)^2} - \frac{1}{t}$$

$$= 2 \cdot \frac{1 \cdot (1+t) - (t-1) \cdot 1}{(1+t)^2} - \frac{1}{t}$$

$$= 2 \cdot \frac{1+t-t+1}{(1+t)^2} - \frac{1}{t}$$

$$= \frac{4}{(1+t)^2} - \frac{1}{t}$$

$$= \frac{4t - (1+t)^2}{t(1+t)^2}$$

$$= \frac{4t - (1+2t+t^2)}{t(1+t)^2}$$

$$= \frac{-t^2 + 2t - 1}{t(1+t)^2}$$

$$= -\frac{(t-1)^2}{t(1+t)^2} < 0$$

$g(t) = 0$ となる t を求める

t	1	...
$g(t)$		—
$g'(t)$	0	↓

$$(g(1) = \frac{2(1-1)}{1+1} - \log 1 = 0 - 0 = 0)$$

よって $t > 1$ において $g(t) < 0$ である。

② が成り立つ。

まとめ

変数 a, b の 2 つで与えられる

1 つは与えられ、 t とおくと (変数の数)
減らす

また $\log t$ について $f'(t)$ と

$g'(t)$ において $\log t$ を消して < 0 になる

上述のように $f(t)$ と $g(t)$ の
おきかえしていい。

30

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$$

1 = 2117. 定数 ± 或 は 変数 → 変数 で 可。

$f(x)$ の 極値 を 求めよ

$$f'(x) = \frac{(1-x)'(1+x^2) - (1-x)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{(-1)(1+x^2) - (1-x) \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{-1-x^2-2x+2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$$

よって

$$f'(x) = 0 \text{ と なる } x \text{ を 求めよ}$$

$$x^2-2x-1=0$$

解の公式より

$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

また $f'(x)$ の 符号を調べよ

$$f''(x) = \frac{(x^2-2x-1)'(1+x^2)^2 - (x^2-2x-1) \cdot 2(1+x^2) \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{(2x-2)(1+x^2)^2 - (x^2-2x-1) \cdot 2(1+x^2) \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{(2x-2)(1+x^2)^2 - (x^2-2x-1) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4}$$

$(1+x^2)^2$ を 約分

$$= \frac{(2x-2)(1+x^2) - (x^2-2x-1) \cdot 2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2x-2+2x^3-2x^2-4x^3+8x^2+4x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{-2x^3+6x^2+6x-2}{(1+x^2)^2}$$

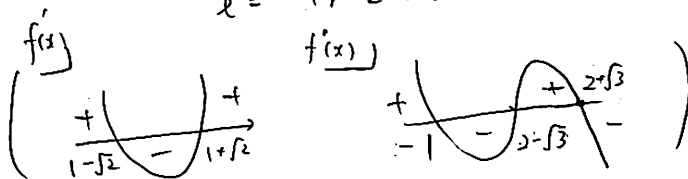
$$= \frac{-2(x^3-3x^2-3x+1)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{-2(x+1)(x^2-4x+1)}{(1+x^2)^2} \quad \begin{array}{l} x^2-4x+1 \\ x^2-4x+1 \\ -4x^2-3x \\ -4x-4x \\ x+1 \\ x+1 \\ 0 \end{array}$$

よって $f'(x) = 0$ と なる x は

$$x+1=0, \text{ または } x^2-4x+1=0$$

$$\therefore x = -1, 2 \pm \sqrt{3}$$



よって 増減表を作成する

x	...	-1	...	$1-\sqrt{2}$	...	$2-\sqrt{3}$	...	$1+\sqrt{2}$	...	$2+\sqrt{3}$	...
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$\frac{1+\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$\frac{1-\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$
		変曲点				変曲点				変曲点	

また

$$f(1-\sqrt{2}) = \frac{1-(1-\sqrt{2})}{1+(1-\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{1+1-2\sqrt{2}+2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

$$f(1+\sqrt{2}) = \frac{1-(1+\sqrt{2})}{1+(1+\sqrt{2})^2} = \frac{-\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

また

$$f(2-\sqrt{3}) = \frac{1-(2-\sqrt{3})}{1+(2-\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{-1+\sqrt{3}}{1+4-4\sqrt{3}+3} = \frac{\sqrt{3}-1}{8-4\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{(\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2\sqrt{3}-2+3-\sqrt{3}}{4-3}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

$$f(2+\sqrt{3}) = \frac{1-(2+\sqrt{3})}{1+(2+\sqrt{3})^2}$$

$$= -\frac{1+\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{(1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{4-3}$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{4}$$

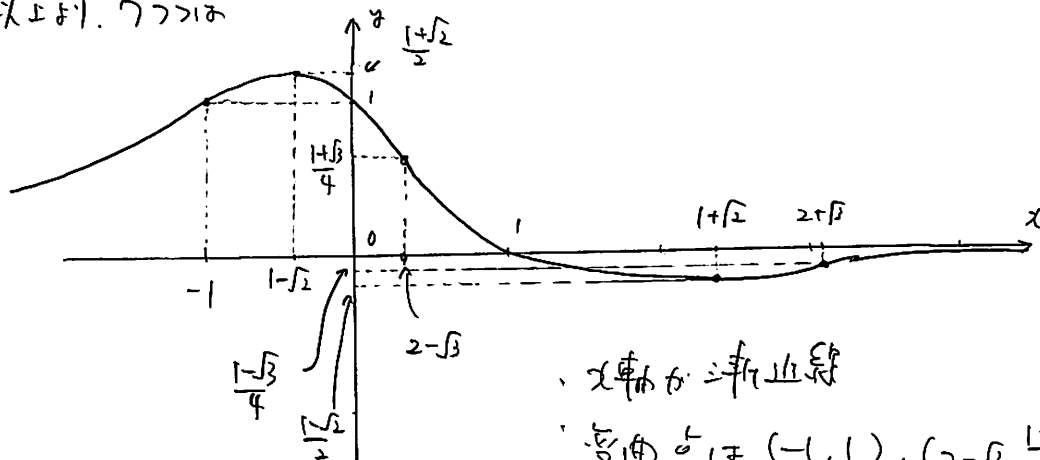
± 3 に.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1-x}{1+x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1}$$

$$= \frac{0-0}{0+1} = 0$$

以上より、 $7 \sim 10$



・ x 軸との交点: $(1, 0)$

・ 極値点: $(-1, 1)$, $(2-\sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{4})$, $(2+\sqrt{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{4})$