数学発展課題

微分演習帳

（　　）年（　　）組（　　　）番　氏名（　　　　　　　　　　　　　　　）

微分公式集

★微分の技法

- k, l は定数とする。
  $\{kf(x)+lg(x)\}' = kf'(x)+lg'(x)$
- 積の微分
  $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
  $\{f(x)g(x)h(x)\}' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$
- 商の微分
  $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$
  $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$
- 合成関数の微分
  $\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$

  $f(g(x))$ とは、$f(x)$ の x のところに $g(x)$ が入りこんでいると考える。以下、$f(x)$ を箱、$g(x)$ を中身という。合成関数の微分は、まず箱を微分し、その箱の x を $g(x)$ に置き換える。これが $f'(g(x))$ である。その後ろから、中身を微分したもの (つまり $g'(x)$) をかける。
- 連鎖公式 (Chain Rule)
  $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$
  $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dv}\cdot\dfrac{dv}{dx}$

★ (例) 合成関数の微分

$y=(3x^2-1)^3$ を微分せよ。

解答

$$y' = 18x(3x^2-1)^2$$

解説

$$\left(\begin{array}{ccc} \text{箱 } x^3 & \xrightarrow{\text{微分}} & 3x^2 \\ \uparrow & & \\ \text{中身 } 3x^2-1 & & \end{array}\right)$$

このような仕組みである。つまり、箱 x^3 の x の場所に中身 $3x^2-1$ が入りこんでいる。まず箱を微分して $3x^2$ を作り、その x の場所を中身 $3x^2-1$ に置き換える。これが $f'(g(x))$, つまり $3(3x^2-1)^2$ である。その後ろから、中身 $3x^2-1$ を微分したもの (つまり $6x$) をかける。よって、

$y' = 3(3x^2-1)^2\times(3x^2-1)'$

つまり

$y' = 3(3x^2-1)^2\times 6x$

より、計算して

$y' = 18x(3x^2-1)^2$

となる。

別解

$u=3x^2-1$ とすると，$y=u^3$ となる。ここで

$$\begin{aligned}\frac{dy}{du} &= \frac{d}{du}\left(u^3\right) \\ &= 3u^2 \\ \frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(3x^2-1\right) \\ &= 6x\end{aligned}$$

であるから，連鎖公式より

$$\begin{aligned}y' &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \\ &= 3u^2\cdot 6x \\ &= 3(3x^2-1)^2\cdot 6x \\ &= 18x(3x^2-1)^2\end{aligned}$$

別解

$f(x)=x^3$，$g(x)=3x^2-1$ とすると $y=f(g(x))$ となる。$f'(x)=3x^2$ なので合成関数の微分より

$$\begin{aligned}y' &= f'(g(x))\cdot g'(x) \\ &= 3\{g(x)\}^2\cdot(3x^2-1)' \\ &= 3(3x^2-1)^2\cdot(3x^2-1)' \\ &= 3(3x^2-1)^2\cdot 6x \\ &= 18x(3x^2-1)^2\end{aligned}$$

★いろいろな関数の導関数

- $(x^r)' = rx^{r-1}$ (r は実数)
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x\log a$ (a は $a>0,\ a\neq 1$ を満たす)
- $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$
- $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\log a}$ (a は $a>0,\ a\neq 1$ を満たす)
- $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$
- $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x\log a}$ (a は $a>0,\ a\neq 1$ を満たす)

★対数微分法

$y=(x+1)(x^2+2)^2(x^3+3)^3$ など因数が多い関数や，$y=(\sin x)^{\log x}$ など，$y=\{f(x)\}^{g(x)}$ の形の関数を微分するときは，対数微分法を用いる。

まず，両辺の絶対値の自然対数をとり，両辺を x で微分する。例えば $y=(x+1)(x^2+2)^2(x^3+3)^3$ において，

$$\log|y| = \log|x+1|+2\log|x^2+2|+3\log|x^3+3|$$

となるので，両辺を x で微分すると

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{x+1}\cdot(x+1)'+\frac{2}{x^2+2}\cdot(x^2+2)'+\frac{3}{x^3+3}\cdot(x^3+3)'$$

より

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{x+1}+\frac{4x}{x^2+2}+\frac{9x^2}{x^3+3}$$

となる。右辺を通分し

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{14x^5+13x^4+20x^3+33x^2+12x+6}{(x+1)(x^2+2)(x^3+3)}$$

として両辺に y をかけて

$$y' = y\cdot\frac{14x^5+13x^4+20x^3+33x^2+12x+6}{(x+1)(x^2+2)(x^3+3)}$$

$y=(x+1)(x^2+2)^2(x^3+3)^3$ を代入して

$$y' = (x+1)(x^2+2)^2(x^3+3)^3\cdot\frac{14x^5+13x^4+20x^3+33x^2+12x+6}{(x+1)(x^2+2)(x^3+3)}$$

約分して

$$y' = (x^2+2)(x^3+3)^2(14x^5+13x^4+20x^3+33x^2+12x+6)$$

となる。
一方で $y=\{f(x)\}^{g(x)}$ の形では，両辺が正であることが多いので，そのまま両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log\{f(x)\}^{g(x)}$$

より

$$\log y = g(x)\log f(x)$$

となる。両辺を x で微分すると，右辺は積の微分より

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \{g(x)\}'\cdot\log f(x) + g(x)\cdot\{\log f(x)\}'$$

となり，合成関数の微分より

$$\frac{1}{y}\cdot y' = g'(x)\log f(x) + g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$$

よって

$$\frac{1}{y}\cdot y' = g'(x)\log f(x) + \frac{f'(x)g(x)}{f(x)}$$

となるから，両辺に y をかけて $y=\{f(x)\}^{g(x)}$ を代入して

$$y' = \{f(x)\}^{g(x)}\left\{g'(x)\log f(x) + \frac{f'(x)g(x)}{f(x)}\right\}$$

となる。

★陰関数の微分
連鎖公式を用いて，陰関数においても $\dfrac{dy}{dx}$ を求めることができる。例えば，$y^2=8x$ について，両辺を x で微分すると

$$\frac{dy^2}{dx} = \frac{d(8x)}{dx} \tag{1}$$

となる。第 (1) 式の右辺は 8 となり，左辺は連鎖公式より

$$\frac{dy^2}{dx} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy^2}{dy}$$

となる。ここで $\dfrac{dy}{dx}$ は求めるものであり，$\dfrac{dy^2}{dy}$ は y^2 を y で微分していいて，文字が同じであるから，計算結果は $2y$ となる。つまり，第 (1) 式は

$$2y\cdot\frac{dy}{dx} = 8 \tag{2}$$

となるので，第 (2) 式を $\dfrac{dy}{dx}$ について解くと，$y\neq 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{y} \tag{3}$$

となる。
また，第 (3) 式の両辺を x で微分すると，左辺は $\dfrac{d^2y}{dx^2}$，つまり第２次導関数 y'' となる。右辺は商の微分より

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4\cdot\left(-\frac{y'}{y^2}\right)$$

となる。ここで，y' は y を x で微分したものなので $\dfrac{dy}{dx}$ であるから，第 (3) 式の結果を代入すると

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4\cdot\frac{4}{y}}{y^2}$$

なので

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{16}{y^3}$$

となる。問題によっては，ここからさらに変形できる場合もある。ちなみに陰関数では，$y=(x$ の式$)$ と表すことができない場合があるので，$\dfrac{dy}{dx}$ も y が入った式でも構わない。

★媒介変数表示された関数の微分
$x=f(t)$，$y=g(t)$ で表された曲線 C において，$\dfrac{dy}{dx}$ を t で表す。そのために，$x=f(t)$ の両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt} = f'(t) \tag{4}$$

とし，また $y=g(t)$ の両辺を t で微分して

$$\frac{dy}{dt} = g'(t) \tag{5}$$

とする。よって公式より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

が成り立つので，第 (4) 式と第 (5) 式を公式に代入して

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \tag{6}$$

となる。また，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t で表す。ここで $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ は $\dfrac{dy}{dx}$ をさらに x で微分したものである。つまり

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{7}$$

となる。さらに $\dfrac{dy}{dx}=z$ とおく。すると，第 (6) 式より

$$z = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

である。また，第 (7) 式より

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dz}{dx} \tag{8}$$

となる。ここで第 (6) 式より z は t の式で表されるが，第 (8) 式より z を x で微分しなければならない。よって，違う文字で微分するときは連鎖公式を用いる。つまり，第 (8) 式を

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dt}{dx}\cdot\frac{dz}{dt} \tag{9}$$

と変形すると，$\dfrac{dz}{dt}$ は z を t で微分したものであり，第 (6) 式から z は t の関数であったから微分計算ができる。商の微分より

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)' \\ &= \frac{\{g'(t)\}'\cdot f'(t) - g'(t)\cdot\{f'(t)\}'}{\{f'(t)\}^2} \\ &= \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{\{f'(t)\}^2}\end{aligned}$$

よって

$$\frac{dz}{dt} = \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{\{f'(t)\}^2} \tag{10}$$

となる。
また，$\dfrac{dt}{dx}$ は t を x で微分したものであるが，これは $x = f(t)$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d}{dx}f(t)$$

となり，左辺は x を x で微分するので 1 となり，右辺は連鎖公式より

$$1 = \frac{dt}{dx} \cdot \frac{d}{dt}f(t) \tag{11}$$

となる。第 (11) 式の右辺の $\dfrac{d}{dt}f(t)$ は $f(t)$ を t で微分したものなので $f'(t)$ となる。ゆえに第 (11) 式より

$$1 = \frac{dt}{dx} \cdot f'(t)$$

となるから，変形して

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f'(t)} \tag{12}$$

となる。
以上より，第 (9) 式に第 (10) 式と第 (12) 式を代入して

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{f'(t)} \cdot \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{\{f'(t)\}^2}$$

整理して

$$\frac{dz}{dx} = \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{\{f'(t)\}^3}$$

となるので，第 (8) 式より

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{\{f'(t)\}^3}$$

となる。

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の関数を微分せよ。

（1） $y = x^{-4}$

（2） $y = \dfrac{1}{x^5}$

（3） $y = \dfrac{5}{4x^3}$

（4） $y = (3x^2 - 1)(2x + 1)$

（5） $y = (4x^2 - 5x - 2)(-x^2 + 6)$

（6） $y=(2x^2-5)(5x^2+3x-2)$

（7） $y=(-x^3+3x^2+8)(2x^3-4x+5)$

（8） $y=(x+2)(x-1)(x-5)$

（9） $y=(x^3-2)(x^2+1)(x-1)$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \dfrac{1}{x+1}$

(2) $y = \dfrac{3x}{x+4}$

(3) $y = \dfrac{1}{x^2-2}$

(4) $y = \dfrac{x+3}{2x^2-1}$

(5) $y = \dfrac{2x}{x^2-3x+1}$

（6） $y = \dfrac{3x^2 + 2x + 1}{x - 1}$

（7） $y = \dfrac{x^3 - 5x - 2}{x^2}$

（8） $y = \dfrac{2x + 1}{x^2 - x + 2}$

（9） $y = \dfrac{(x + 1)(x - 2)}{x^2 + x + 1}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の関数を微分せよ。

（1） $y = (x+2)^2$

（2） $y = (3x^2 - 1)^3$

（3） $y = (2x^2 + 3)^5$

（4） $y = (2x^2 - 3x + 5)^2$

(5) $y = (x^4 - 4x^2 + 2)^3$

(6) $y = \dfrac{1}{(5x + 3)^2}$

(7) $y = \dfrac{1}{(2x^3 - 5)^3}$

(8) $y = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の関数を微分せよ。

(1) $y = x^{\frac{3}{4}}$

(2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^5}}$

(3) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^7}}$

(4) $y = \sqrt{x^2 + 4x - 1}$

(5) $y = \sqrt[5]{x^3 - 2}$

(6) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

(7) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

(8) $y = (3x + 1)^2(x - 2)$

(9) $y = \dfrac{x - 2}{(x^2 + 1)^2}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の関数を微分せよ。

（1） $y = \dfrac{x}{(x^4+1)^2}$

（2） $y = \dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}$

（3） $y = x\sqrt{x^2+1}$

(4) $y = \dfrac{x}{\sqrt{2 - x^2}}$

(5) $y = \sqrt{1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}}$

(6) $y = \dfrac{x}{x + \sqrt{1 + x^2}}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ 次の関数を微分せよ。

（1）$y = 4x - \cos x$

（2）$y = \sin x - \tan x$

（3）$y = \cos(3x^2 - 1)$

（4）$y = \tan(2x + 3)$

（5）$y = \cos(\sin x)$

（6） $y=\tan(\sin x)$

（7） $y=\sin x^2$

（8） $y=\tan x^2$

（9） $y=\cos^3 x$

（10） $y=\tan^3 x$

7 次の関数を微分せよ。

（1） $y = \dfrac{1}{\cos x}$

（2） $y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

（3） $y = x^2 \sin(3x+5)$

（4） $y = \sin 5x \cos 3x$

（5） $y = \sin^2 3x$

（6） $y = \sin^5 x \cos 5x$

（7） $y = \sin^4 x \cos^4 x$

（8） $y = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$

$\boxed{8}$ 次の関数を微分せよ。

（1） $y = \sqrt{1 + \sin^2 x}$

（2） $y = \sin\sqrt{x^2 + 2x - 1}$

（3） $y = \left(\tan x + \dfrac{1}{\tan x}\right)^2$

（4） $y = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$

(5) $y = \dfrac{1 - \sin x}{1 + \cos x}$

(6) $y = \sin(x + a)\cos(x - a)$

(7) $y = \dfrac{\sin x}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}}$

$\boxed{9}$ 次の関数を微分せよ。ただし，a は定数で，$a > 0$，$a \neq 1$ とする。

（1）$y = \log(x^2 + 2)$

（2）$y = \log \dfrac{1}{3x + 1}$

（3）$y = \log |x^2 - 4|$

（4）$y = \log(\sin^2 x)$

（5）$y = (\log x)^3$

（6）$y = \log_4 2x$

（7）$y = \log_a(x^2 - 1)$

(8) $y = (x \log x - x)^2$

(9) $y = e^{5x}$

(10) $y = (x + 3)e^{-x}$

(11) $y = x^3 e^{2x}$

(12) $y = e^{-x} \cos x$

(13) $y = e^x \tan x$

(14) $y = e^{3x^2 - x}$

(15) $y = a^{-4x}$

$\boxed{\mathbf{10}}$ 次の関数を微分せよ。ただし，a は定数で，$a > 0$，$a \neq 1$ とする。

（1）$y = e^{-3x} \sin 3x$

（2）$y = e^{\cos x}$

（3）$y = 2^{\sin x}$

（4）$y = \log_x a$

（5） $y = \log_a \sin x$

（6） $y = \log\{e^x(1-x)\}$

（7） $y = \sqrt[3]{x+1}\log x$

（8） $y = \log_a\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)$

11 次の関数を微分せよ。ただし，a, b は正の定数とする。

（1）$y=\left\{\log\left(1+\sqrt{x}\right)\right\}^2$

（2）$y=\log\dfrac{x^2-b}{x^2+b}$

（3）$y=x\sqrt{1+x^2}+\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

(4) $y = \left(\frac{a}{b}\right)^x + \left(\frac{b}{x}\right)^a + \left(\frac{x}{a}\right)^b$

(5) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

(6) $y = \log\left(\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right)$

$\boxed{\mathbf{12}}$ 次の関数を微分せよ。

（1）$y=(x+2)^2(x+3)^3(x+4)^4$

（2）$y=\dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^2(x-3)^4}$

（3）$y=\dfrac{(1+x)^3(1-2x)}{(1-x)(1+2x)^3}$

(4) $y = \sqrt[3]{(x+2)(x^2+2)}$

(5) $y = \dfrac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$

(6) $y = \sqrt[3]{\dfrac{(x+2)^4}{x^2(x^2+1)}}$

13 次の関数を微分せよ。

（1）$y = x^{x+1} \quad (x > 0)$

（2）$y = x^{\sin x} \quad (x > 0)$

（3）$y = x^{e^x} \quad (x > 0)$

（4）$y = x^{\log x} \quad (x > 0)$

(5) $y = \left(\sqrt{x}\right)^x \quad (x > 0)$

(6) $y = (\sin x)^x \quad \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

(7) $y = (\log x)^x \quad (x > 1)$

(8) $y = (\tan x)^{\sin x} \quad \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$