

1 次の関数を微分せよ。

(1) $y = x^{-4}$

解答

$$y' = -4x^{-5}$$

解説

$$\begin{aligned} y' &= (-4)x^{-4-1} \\ &= -4x^{-5} \end{aligned}$$

(2) $y = \frac{1}{x^5}$

解答

$$y' = -\frac{5}{x^6}$$

解説

$$y = \frac{1}{x^5} = x^{-5} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} y' &= (-5)x^{-5-1} \\ &= -5x^{-6} \\ &= -\frac{5}{x^6} \end{aligned}$$

(3) $y = \frac{5}{4x^3}$

解答

$$y' = -\frac{15}{4x^4}$$

解説

$$y = \frac{5}{4x^3} = \frac{5}{4}x^{-3} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{5}{4} \cdot (-3)x^{-3-1} \\ &= -\frac{15}{4}x^{-4} \\ &= -\frac{15}{4x^4} \end{aligned}$$

(4) $y = (3x^2 - 1)(2x + 1)$

解答

$$y' = 18x^2 + 6x - 2$$

解説

積の微分より

$$\begin{aligned} y' &= (3x^2 - 1)'(2x + 1) + (3x^2 - 1)(2x + 1)' \\ &= 6x \cdot (2x + 1) + (3x^2 - 1) \cdot 2 \\ &= (12x^2 + 6x) + (6x^2 - 2) \\ &= 18x^2 + 6x - 2 \end{aligned}$$

(5) $y = (4x^2 - 5x - 2)(-x^2 + 6)$

解答

$$y' = -16x^3 + 15x^2 + 52x - 30$$

解説

積の微分より

$$\begin{aligned} y' &= (4x^2 - 5x - 2)'(-x^2 + 6) \\ &\quad + (4x^2 - 5x - 2)(-x^2 + 6)' \\ &= (8x - 5)(-x^2 + 6) + (4x^2 - 5x - 2)(-2x) \\ &= (-8x^3 + 5x^2 + 48x - 30) + (-8x^3 + 10x^2 + 4x) \\ &= -16x^3 + 15x^2 + 52x - 30 \end{aligned}$$

(6) $y = (2x^2 - 5)(5x^2 + 3x - 2)$

解答

$$y' = 40x^3 + 18x^2 - 58x - 15$$

解説

積の微分より

$$\begin{aligned} y' &= (2x^2 - 5)'(5x^2 + 3x - 2) \\ &\quad + (2x^2 - 5)(5x^2 + 3x - 2)' \\ &= 4x(5x^2 + 3x - 2) + (2x^2 - 5)(10x + 3) \\ &= (20x^3 + 12x^2 - 8x) + (20x^3 + 6x^2 - 50x - 15) \\ &= 40x^3 + 18x^2 - 58x - 15 \end{aligned}$$

(7) $y = (-x^3 + 3x^2 + 8)(2x^3 - 4x + 5)$

解答

$$y' = -12x^5 + 30x^4 + 16x^3 - 3x^2 + 30x - 32$$

解説

積の微分より

$$\begin{aligned} y' &= (-x^3 + 3x^2 + 8)'(2x^3 - 4x + 5) \\ &\quad + (-x^3 + 3x^2 + 8)(2x^3 - 4x + 5)' \\ &= (-3x^2 + 6x)(2x^3 - 4x + 5) \\ &\quad + (-x^3 + 3x^2 + 8)(6x^2 - 4) \\ &= (-6x^5 + 12x^4 + 12x^3 - 39x^2 + 30x) \\ &\quad + (-6x^5 + 18x^4 + 4x^3 + 36x^2 - 32) \\ &= -12x^5 + 30x^4 + 16x^3 - 3x^2 + 30x - 32 \end{aligned}$$

(8) $y = (x + 2)(x - 1)(x - 5)$

解答

$$y' = 3x^2 - 8x - 7$$

解説

積の微分より

$$\begin{aligned} y' &= (x + 2)'(x - 1)(x - 5) \\ &\quad + (x + 2)(x - 1)'(x - 5) \\ &\quad + (x + 2)(x - 1)(x - 5)' \\ &= 1 \cdot (x - 1)(x - 5) \\ &\quad + (x + 2) \cdot 1 \cdot (x - 5) \\ &\quad + (x + 2)(x - 1) \cdot 1 \\ &= (x^2 - 6x + 5) + (x^2 - 3x - 10) + (x^2 + x - 2) \\ &= 3x^2 - 8x - 7 \end{aligned}$$

(9) $y = (x^3 - 2)(x^2 + 1)(x - 1)$

解答

$$y' = 6x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 4x - 2$$

解説

積の微分より

$$\begin{aligned} y' &= (x^3 - 2)'(x^2 + 1)(x - 1) \\ &\quad + (x^3 - 2)(x^2 + 1)'(x - 1) \\ &\quad + (x^3 - 2)(x^2 + 1)(x - 1)' \\ &= 3x^2 \cdot (x^2 + 1)(x - 1) \\ &\quad + (x^3 - 2) \cdot 2x \cdot (x - 1) \\ &\quad + (x^3 - 2)(x^2 + 1) \cdot 1 \\ &= (3x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2) \\ &\quad + (2x^5 - 2x^4 - 4x^2 + 4x) \\ &\quad + (x^5 + x^3 - 2x^2 - 2) \\ &= 6x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 4x - 2 \end{aligned}$$

2 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \frac{1}{x+1}$

解答

$$y' = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

解説

商の微分より

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

(2) $y = \frac{3x}{x+4}$

解答

$$y' = \frac{12}{(x+4)^2}$$

解説

商の微分より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(3x)'(x+4) - 3x(x+4)'}{(x+4)^2} \\ &= \frac{3 \cdot (x+4) - 3x \cdot 1}{(x+4)^2} \\ &= \frac{3x+12-3x}{(x+4)^2} \\ &= \frac{12}{(x+4)^2} \end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x}{x+4} \\ &= \frac{3(x+4) - 12}{x+4} \\ &= \frac{3(x+4)}{x+4} - \frac{12}{x+4} \\ &= 3 - 12 \cdot \frac{1}{x+4} \end{aligned}$$

と変形できるので、微分すると

$$\begin{aligned} y' &= (3)' - 12 \cdot \left\{ -\frac{(x+4)'}{(x+4)^2} \right\} \\ &= 0 - 12 \cdot \left\{ -\frac{1}{(x+4)^2} \right\} \\ &= \frac{12}{(x+4)^2} \end{aligned}$$

(3) $y = \frac{1}{x^2-2}$

解答

$$y' = -\frac{2x}{(x^2-2)^2}$$

解説

商の微分より

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{(x^2-2)'}{(x^2-2)^2} \\ &= -\frac{2x}{(x^2-2)^2} \end{aligned}$$

(4) $y = \frac{x+3}{2x^2-1}$

解答

$$y' = -\frac{2x^2+12x+1}{(2x^2-1)^2}$$

解説

商の微分より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x+3)'(2x^2-1) - (x+3)(2x^2-1)'}{(2x^2-1)^2} \\ &= \frac{1 \cdot (2x^2-1) - (x+3) \cdot 4x}{(2x^2-1)^2} \\ &= \frac{2x^2-1-4x^2-12x}{(2x^2-1)^2} \\ &= \frac{-2x^2-12x-1}{(2x^2-1)^2} \\ &= -\frac{2x^2+12x+1}{(2x^2-1)^2} \end{aligned}$$

(5) $y = \frac{2x}{x^2-3x+1}$

解答

$$y' = -\frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2-3x+1)^2}$$

解説

$y = \frac{2x}{x^2-3x+1}$ を $y = 2 \cdot \frac{x}{x^2-3x+1}$ と考える。
商の微分より

$$\begin{aligned} y' &= 2 \cdot \frac{(x)'(x^2-3x+1) - x(x^2-3x+1)'}{(x^2-3x+1)^2} \\ &= 2 \cdot \frac{1 \cdot (x^2-3x+1) - x \cdot (2x-3)}{(x^2-3x+1)^2} \\ &= 2 \cdot \frac{x^2-3x+1-2x^2+3x}{(x^2-3x+1)^2} \\ &= 2 \cdot \frac{-x^2+1}{(x^2-3x+1)^2} \\ &= -2 \cdot \frac{x^2-1}{(x^2-3x+1)^2} \\ &= -\frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2-3x+1)^2} \end{aligned}$$

(6) $y = \frac{3x^2+2x+1}{x-1}$

解答

$$y' = \frac{3(x^2-2x-1)}{(x-1)^2}$$

解説

商の微分より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(3x^2+2x+1)'(x-1) - (3x^2+2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(6x+2) \cdot (x-1) - (3x^2+2x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(6x^2-4x-2) - (3x^2+2x+1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3x^2-6x-3}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3(x^2-2x-1)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

別解

分子の $3x^2 + 2x + 1$ を $x - 1$ で割ると、商が $3x + 5$ 、余りが 6 なので

$$3x^2 + 2x + 1 = (x - 1)(3x + 5) + 6$$

と書ける。ゆえに y は

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x^2 + 2x + 1}{x - 1} \\ &= \frac{(x - 1)(3x + 5) + 6}{x - 1} \\ &= \frac{(x - 1)(3x + 5)}{x - 1} + \frac{6}{x - 1} \\ &= \cancel{\frac{(x - 1)(3x + 5)}{x - 1}} + \frac{6}{x - 1} \\ &= 3x + 5 + 6 \cdot \frac{1}{x - 1} \end{aligned}$$

と変形できるので、微分すると

$$\begin{aligned} y' &= (3x + 5)' + 6 \cdot \left\{ -\frac{(x - 1)'}{(x - 1)^2} \right\} \\ &= 3 + 6 \cdot \left\{ -\frac{1}{(x - 1)^2} \right\} \\ &= 3 \left\{ 1 - \frac{2}{(x - 1)^2} \right\} \\ &= 3 \cdot \frac{(x - 1)^2 - 2}{(x - 1)^2} \\ &= 3 \cdot \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{3(x^2 - 2x - 1)}{(x - 1)^2} \end{aligned}$$

$$(7) \quad y = \frac{x^3 - 5x - 2}{x^2}$$

解答

$$y' = \frac{x^3 + 5x + 4}{x^3}$$

解説

商の微分より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^3 - 5x - 2)'x^2 - (x^3 - 5x - 2)(x^2)'}{(x^2)^2} \\ &= \frac{(3x^2 - 5) \cdot x^2 - (x^3 - 5x - 2) \cdot 2x}{(x^2)^2} \\ &= \frac{(3x^2 - 5) \cdot \cancel{x^2}^{x^4} - (x^3 - 5x - 2) \cdot 2\cancel{x}}{x^4} \\ &= \frac{(3x^2 - 5) \cdot \cancel{x}^{x^3} - (x^3 - 5x - 2) \cdot 2}{x^4} \\ &= \frac{3x^3 - 5x - 2x^3 + 10x + 4}{x^4} \\ &= \frac{x^3 + 5x + 4}{x^3} \end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^3 - 5x - 2}{x^2} \\ &= \frac{x^3}{x^2} - \frac{5x}{x^2} - \frac{2}{x^2} \\ &= x - \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2} \\ &= x - 5 \cdot x^{-1} - 2 \cdot x^{-2} \end{aligned}$$

と変形できるので、微分すると

$$\begin{aligned} y' &= (x)' - 5(x^{-1})' - 2(x^{-2})' \\ &= 1 - 5 \cdot (-1)x^{-2} - 2 \cdot (-2)x^{-3} \\ &= 1 + 5x^{-2} + 4x^{-3} \\ &= 1 + \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^3} \\ &= \frac{x^3 + 5x + 4}{x^3} \end{aligned}$$

$$(8) \quad y = \frac{2x + 1}{x^2 - x + 2}$$

解答

$$y' = -\frac{2x^2 + 2x - 5}{(x^2 - x + 2)^2}$$

解説

商の微分より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2x + 1)'(x^2 - x + 2) - (2x + 1)(x^2 - x + 2)'}{(x^2 - x + 2)^2} \\ &= \frac{2 \cdot (x^2 - x + 2) - (2x + 1) \cdot (2x - 1)}{(x^2 - x + 2)^2} \\ &= \frac{(2x^2 - 2x + 4) - (4x^2 - 1)}{(x^2 - x + 2)^2} \\ &= \frac{-2x^2 - 2x + 5}{(x^2 - x + 2)^2} \\ &= -\frac{2x^2 + 2x - 5}{(x^2 - x + 2)^2} \end{aligned}$$

$$(9) \quad y = \frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2 + x + 1}$$

解答

$$y' = \frac{2x^2 + 6x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

解説

商の微分より y' は

$$\begin{aligned} &\frac{\{(x + 1)(x - 2)\}'(x^2 + x + 1) - (x + 1)(x - 2)(x^2 + x + 1)'}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{\{1 \cdot (x - 2) + (x + 1) \cdot 1\}(x^2 + x + 1) - (x + 1)(x - 2)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{(2x - 1)(x^2 + x + 1) - (x^2 - x - 2)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{(2x^3 + x^2 + x - 1) - (2x^3 - x^2 - 5x - 2)}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 6x + 1}{(x^2 + x + 1)^2} \end{aligned}$$

3 次の関数を微分せよ。

$$(1) \quad y = (x + 2)^2$$

解答

$$y' = 2(x + 2)$$

解説

$u = x + 2$ とすると、 $y = u^2$ となる。ここで

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} &= \frac{d}{du}(u^2) \\ &= 2u \\ \frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx}(x + 2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

であるから、連鎖公式より

$$\begin{aligned}y' &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\&= 2u \cdot 1 \\&= 2u\end{aligned}$$

となり、 $u = x + 2$ を代入して

$$y' = 2(x + 2)$$

となる。

別解

$f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ とすると $y = f(g(x))$ となる。 $f'(x) = 2x$ なので合成関数の微分より

$$\begin{aligned}y' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\&= 2g(x) \cdot (x + 2)' \\&= 2(x + 2) \cdot (x + 2)' \\&= 2(x + 2) \cdot 1 \\&= 2(x + 2)\end{aligned}$$

$$(2) \ y = (3x^2 - 1)^3$$

解答

$$y' = 18x(3x^2 - 1)^2$$

解説

$u = 3x^2 - 1$ とすると、 $y = u^3$ となる。ここで

$$\begin{aligned}\frac{dy}{du} &= \frac{d}{du}(u^3) \\&= 3u^2 \\ \frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx}(3x^2 - 1) \\&= 6x\end{aligned}$$

であるから、連鎖公式より

$$\begin{aligned}y' &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\&= 3u^2 \cdot 6x \\&= 3(3x^2 - 1)^2 \cdot 6x \\&= 18x(3x^2 - 1)^2\end{aligned}$$

別解

$f(x) = x^3$, $g(x) = 3x^2 - 1$ とすると $y = f(g(x))$ となる。 $f'(x) = 3x^2$ なので合成関数の微分より

$$\begin{aligned}y' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\&= 3\{g(x)\}^2 \cdot (3x^2 - 1)' \\&= 3(3x^2 - 1)^2 \cdot (3x^2 - 1)' \\&= 3(3x^2 - 1)^2 \cdot 6x \\&= 18x(3x^2 - 1)^2\end{aligned}$$

$$(3) \ y = (2x^2 + 3)^5$$

解答

$$y' = 20x(2x^2 + 3)^4$$

解説

$u = 2x^2 + 3$ とすると、 $y = u^5$ となる。ここで

$$\begin{aligned}\frac{dy}{du} &= \frac{d}{du}(u^5) \\&= 5u^4 \\ \frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx}(2x^2 + 3) \\&= 4x\end{aligned}$$

であるから、連鎖公式より

$$\begin{aligned}y' &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\&= 5u^4 \cdot 4x \\&= 5(2x^2 + 3)^4 \cdot 4x \\&= 20x(2x^2 + 3)^4\end{aligned}$$

別解

$f(x) = x^5$, $g(x) = 2x^2 + 3$ とすると $y = f(g(x))$ となる。 $f'(x) = 5x^4$ なので合成関数の微分より

$$\begin{aligned}y' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\&= 5\{g(x)\}^4 \cdot (2x^2 + 3)' \\&= 5(2x^2 + 3)^4 \cdot (2x^2 + 3)' \\&= 5(2x^2 + 3)^4 \cdot 4x \\&= 20x(2x^2 + 3)^4\end{aligned}$$

$$(4) \ y = (2x^2 - 3x + 5)^2$$

解答

$$y' = 2(4x - 3)(2x^2 - 3x + 5)$$

解説

$u = 2x^2 - 3x + 5$ とすると、 $y = u^2$ となる。ここで

$$\begin{aligned}\frac{dy}{du} &= \frac{d}{du}(u^2) \\&= 2u \\ \frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx}(2x^2 - 3x + 5) \\&= 4x - 3\end{aligned}$$

であるから、連鎖公式より

$$\begin{aligned}y' &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\&= 2u \cdot (4x - 3) \\&= 2(2x^2 - 3x + 5) \cdot (4x - 3) \\&= 2(4x - 3)(2x^2 - 3x + 5)\end{aligned}$$

別解

$f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2 - 3x + 5$ とすると $y = f(g(x))$ となる。 $f'(x) = 2x$ なので合成関数の微分より

$$\begin{aligned}y' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\&= 2\{g(x)\} \cdot (2x^2 - 3x + 5)' \\&= 2(2x^2 - 3x + 5) \cdot (2x^2 - 3x + 5)' \\&= 2(2x^2 - 3x + 5) \cdot (4x - 3) \\&= 2(4x - 3)(2x^2 - 3x + 5)\end{aligned}$$

$$(5) \ y = (x^4 - 4x^2 + 2)^3$$

解答

$$y' = 12x(x^2 - 2)(x^4 - 4x^2 + 2)^2$$

解説

$u = x^4 - 4x^2 + 2$ とすると、 $y = u^3$ となる。ここで

$$\begin{aligned}\frac{dy}{du} &= \frac{d}{du}(u^3) \\&= 3u^2 \\ \frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4 - 4x^2 + 2) \\&= 4x^3 - 8x\end{aligned}$$

であるから、連鎖公式より

$$\begin{aligned}y' &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\&= 3u^2 \cdot (4x^3 - 8x) \\&= 3(x^4 - 4x^2 + 2)^2 \cdot (4x^3 - 8x) \\&= 3(4x^3 - 8x)(x^4 - 4x^2 + 2)^2 \\&= 3 \cdot 4x(x^2 - 2)(x^4 - 4x^2 + 2)^2 \\&= 12x(x^2 - 2)(x^4 - 4x^2 + 2)^2\end{aligned}$$

別解

$f(x) = x^3$, $g(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ とすると $y = f(g(x))$ となる。 $f'(x) = 3x^2$ なので合成関数の微分より

$$\begin{aligned} y' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= 3\{g(x)\}^2 \cdot (x^4 - 4x^2 + 2)' \\ &= 3(x^4 - 4x^2 + 2)^2 \cdot (4x^3 - 8x)' \\ &= 3(x^4 - 4x^2 + 2)^2 \cdot (4x^3 - 8x) \\ &= 12x(x^2 - 2)(x^4 - 4x^2 + 2)^2 \end{aligned}$$

$$(6) \quad y = \frac{1}{(5x+3)^2}$$

解答

$$y' = -\frac{10}{(5x+3)^3}$$

解説

$u = 5x + 3$ とすると, $y = \frac{1}{u^2}$ となる。ここで

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} &= \frac{d}{du} \left(\frac{1}{u^2} \right) \\ &= \frac{d}{du} (u^{-2}) \\ &= -2u^{-3} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx} (5x + 3) \\ &= 5 \end{aligned}$$

であるから, 連鎖公式より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= -2u^{-3} \cdot 5 \\ &= -2(5x+3)^{-3} \cdot 5 \\ &= -2 \cdot \frac{1}{(5x+3)^3} \cdot 5 \\ &= -\frac{10}{(5x+3)^3} \end{aligned}$$

別解

$f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = 5x + 3$ とすると $y = f(g(x))$ となる。ここで $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ より $f'(x) = -2x^{-3}$ なので合成関数の微分より

$$\begin{aligned} y' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= -2\{g(x)\}^{-3} \cdot (5x+3)' \\ &= -2(5x+3)^{-3} \cdot (5x+3)' \\ &= -2(5x+3)^{-3} \cdot 5 \\ &= -\frac{10}{(5x+3)^3} \end{aligned}$$

$$(7) \quad y = \frac{1}{(2x^3-5)^3}$$

解答

$$y' = -\frac{18x^2}{(2x^3-5)^4}$$

解説

$u = 2x^3 - 5$ とすると, $y = \frac{1}{u^3}$ となる。ここで

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} &= \frac{d}{du} \left(\frac{1}{u^3} \right) \\ &= \frac{d}{du} (u^{-3}) \\ &= -3u^{-4} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx} (2x^3 - 5) \\ &= 6x^2 \end{aligned}$$

であるから, 連鎖公式より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= -3u^{-4} \cdot 6x^2 \\ &= -3(2x^3 - 5)^{-4} \cdot 6x^2 \\ &= -3 \cdot \frac{1}{(2x^3 - 5)^4} \cdot 6x^2 \\ &= -\frac{18x^2}{(2x^3 - 5)^4} \end{aligned}$$

別解

$f(x) = \frac{1}{x^3}$, $g(x) = 2x^3 - 5$ とすると $y = f(g(x))$ となる。ここで $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$ より $f'(x) = -3x^{-4}$ なので合成関数の微分より

$$\begin{aligned} y' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= -3\{g(x)\}^{-4} \cdot (2x^3 - 5)' \\ &= -3(2x^3 - 5)^{-4} \cdot (2x^3 - 5)' \\ &= -3(2x^3 - 5)^{-4} \cdot 6x^2 \\ &= -\frac{18x^2}{(2x^3 - 5)^4} \end{aligned}$$

$$(8) \quad y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3$$

解答

$$y' = 3 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

解説

$u = x + \frac{1}{x}$ とすると, $y = u^3$ となる。ここで

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} &= \frac{d}{du} (u^3) \\ &= 3u^2 \\ \frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 1 - \frac{(x)'}{x^2} \\ &= 1 - \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

であるから, 連鎖公式より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 3u^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= 3 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= 3 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \end{aligned}$$

別解

$f(x) = x^3$, $g(x) = x + \frac{1}{x}$ とすると $y = f(g(x))$ となる。ここで $f'(x) = 3x^2$ なので合成関数の微分より

$$\begin{aligned} y' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= 3\{g(x)\}^2 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)' \\ &= 3\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)' \\ &= 3\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= 3\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \end{aligned}$$

$$(3) \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}$$

解答

$$y' = -\frac{7}{3\sqrt[3]{x^{10}}}$$

解説

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\sqrt[3]{x^7}} \\ &= \frac{1}{x^{\frac{7}{3}}} \\ &= x^{-\frac{7}{3}} \end{aligned}$$

であるから微分すると

$$\begin{aligned} y' &= \left(x^{-\frac{7}{3}}\right)' \\ &= -\frac{7}{3}x^{-\frac{7}{3}-1} \\ &= -\frac{7}{3}x^{-\frac{10}{3}} \\ &= -\frac{7}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{10}{3}}} \\ &= -\frac{7}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^{10}}} \\ &= -\frac{7}{3\sqrt[3]{x^{10}}} \end{aligned}$$

となる。

$$(4) \quad y = \sqrt{x^2 + 4x - 1}$$

解答

$$y' = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x-1}}$$

解説

$u = x^2 + 4x - 1$ とすると, $y = \sqrt{u}$ となる。ここで $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} &= \frac{d}{du} \left(u^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1} \\ &= \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx} (x^2 + 4x - 1) \\ &= 2x + 4 \end{aligned}$$

であるから, 連鎖公式より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 4) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 4x - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(x + 2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 + 4x - 1)^{\frac{1}{2}}} \cdot 2(x + 2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 1}} \cdot 2(x + 2) \\ &= \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x-1}} \end{aligned}$$

4 次の関数を微分せよ。

$$(1) \quad y = x^{\frac{3}{4}}$$

解答

$$y' = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$$

解説

微分すると

$$\begin{aligned} y' &= \left(x^{\frac{3}{4}}\right)' \\ &= \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} \\ &= \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

となる。

参考

関数が指数で表記されているときは, 答えも指数で答える。

$$(2) \quad y = \frac{1}{\sqrt{x^5}}$$

解答

$$y' = -\frac{5}{2\sqrt{x^7}}$$

解説

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\sqrt{x^5}} \\ &= \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} \\ &= x^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

であるから微分すると

$$\begin{aligned} y' &= \left(x^{-\frac{5}{2}}\right)' \\ &= -\frac{5}{2}x^{-\frac{5}{2}-1} \\ &= -\frac{5}{2}x^{-\frac{7}{2}} \\ &= -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{7}{2}}} \\ &= -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^7}} \\ &= -\frac{5}{2\sqrt{x^7}} \end{aligned}$$

となる。

参考

関数が累乗根で表記されているときは, 答えも累乗根で答える。

別解

$y = \sqrt{x^2 + 4x - 1}$ を $y = (x^2 + 4x - 1)^{\frac{1}{2}}$ と考える。

$$\left(\begin{array}{ccc} \sqrt{x} & = & x^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{微分}} \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ \uparrow & & \\ x^2 + 4x - 1 & & \end{array} \right)$$

合成関数の微分より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2}(x^2 + 4x - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 + 4x - 1)' \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 + 4x - 1)^{\frac{1}{2}}} \cdot (2x + 4) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 1}} \cdot 2(x + 2) \\ &= \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x - 1}} \end{aligned}$$

(5) $y = \sqrt[5]{x^3 - 2}$

解答

$$y' = \frac{3x^2}{5\sqrt[5]{(x^3 - 2)^4}}$$

解説

$u = x^3 - 2$ とすると, $y = \sqrt[5]{u}$ となる。ここで $y = \sqrt[5]{u} = u^{\frac{1}{5}}$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} &= \frac{d}{du} \left(u^{\frac{1}{5}} \right) \\ &= \frac{1}{5} u^{\frac{1}{5} - 1} \\ &= \frac{1}{5} u^{-\frac{4}{5}} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx} (x^3 - 2) \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

であるから, 連鎖公式より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{5} u^{-\frac{4}{5}} \cdot 3x^2 \\ &= \frac{1}{5} (x^3 - 2)^{-\frac{4}{5}} \cdot 3x^2 \\ &= \frac{1}{5} \frac{1}{(x^3 - 2)^{\frac{4}{5}}} \cdot 3x^2 \\ &= \frac{1}{5} \frac{1}{\sqrt[5]{(x^3 - 2)^4}} \cdot 3x^2 \\ &= \frac{3x^2}{5\sqrt[5]{(x^3 - 2)^4}} \end{aligned}$$

別解

$y = \sqrt[5]{x^3 - 2}$ を $y = (x^3 - 2)^{\frac{1}{5}}$ と考える。

$$\left(\begin{array}{ccc} \sqrt[5]{x} & = & x^{\frac{1}{5}} \xrightarrow{\text{微分}} \frac{1}{5}x^{\frac{4}{5}} \\ \uparrow & & \\ x^3 - 2 & & \end{array} \right)$$

合成関数の微分より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{5}(x^3 - 2)^{-\frac{4}{5}} \cdot (x^3 - 2)' \\ &= \frac{1}{5}(x^3 - 2)^{-\frac{4}{5}} \cdot 3x^2 \\ &= \frac{1}{5} \frac{1}{(x^3 - 2)^{\frac{4}{5}}} \cdot 3x^2 \\ &= \frac{1}{5} \frac{1}{\sqrt[5]{(x^3 - 2)^4}} \cdot 3x^2 \\ &= \frac{3x^2}{5\sqrt[5]{(x^3 - 2)^4}} \end{aligned}$$

(6) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

解答

$$y' = -\frac{2x + 1}{2\sqrt{(x^2 + x + 1)^3}}$$

解説

$u = x^2 + x + 1$ とすると, $y = \frac{1}{\sqrt{u}}$ となる。ここで

$$y = \frac{1}{\sqrt{u}} = u^{-\frac{1}{2}} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} &= \frac{d}{du} \left(u^{-\frac{1}{2}} \right) \\ &= -\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2} - 1} \\ &= -\frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx} (x^2 + x + 1) \\ &= 2x + 1 \end{aligned}$$

であるから, 連鎖公式より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= -\frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}} \cdot (2x + 1) \\ &= -\frac{1}{2} (x^2 + x + 1)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2x + 1) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot (2x + 1) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(x^2 + x + 1)^3}} \cdot (2x + 1) \\ &= -\frac{2x + 1}{2\sqrt{(x^2 + x + 1)^3}} \end{aligned}$$

別解

$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ を $y = (x^2 + x + 1)^{-\frac{1}{2}}$ と考える。

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{\sqrt{x}} & = & x^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{微分}} -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \\ \uparrow & & \\ x^2 + x + 1 & & \end{array} \right)$$

合成関数の微分より

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{2}(x^2 + x + 1)^{-\frac{3}{2}} \cdot (x^2 + x + 1)' \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 + x + 1)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2x + 1) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot (2x + 1) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(x^2 + x + 1)^3}} \cdot (2x + 1) \\ &= -\frac{2x + 1}{2\sqrt{(x^2 + x + 1)^3}} \end{aligned}$$

$$(7) y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

解答

$$y' = \frac{x}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$$

解説

$u = 4 - x^2$ とすると, $y = \frac{1}{\sqrt{u}}$ となる。ここで $y = \frac{1}{\sqrt{u}} = u^{-\frac{1}{2}}$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} &= \frac{d}{du} (u^{-\frac{1}{2}}) \\ &= -\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}-1} \\ &= -\frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx} (4 - x^2) \\ &= -2x \end{aligned}$$

であるから, 連鎖公式より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= -\frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) \\ &= -\frac{1}{2} (4 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (-2x) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(4 - x^2)^3}} \cdot (-2x) \\ &= \frac{x}{\sqrt{(4 - x^2)^3}} \end{aligned}$$

別解

$y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ を $y = (4-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ と考える。

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{\sqrt{x}} & = & x^{-\frac{1}{2}} \quad \xrightarrow{\text{微分}} \quad -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \\ \uparrow & & \\ 4-x^2 & & \end{array} \right)$$

合成関数の微分より

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{2} (x^2 + x + 1)^{-\frac{3}{2}} \cdot (4 - x^2)' \\ &= -\frac{1}{2} (4 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (-2x) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(4 - x^2)^3}} \cdot (-2x) \\ &= \frac{x}{\sqrt{(4 - x^2)^3}} \end{aligned}$$

$$(8) y = (3x+1)^2(x-2)$$

解答

$$y' = (3x+1)(9x-11)$$

解説

積の微分より

$$y' = \{(3x+1)^2\}'(x-2) + (3x+1)^2(x-2)'$$

となる。ここで $\{(3x+1)^2\}'$ は合成関数の微分より

$$\{(3x+1)^2\}' = 2(3x+1) \cdot (3x+1)'$$

となるので

$$\begin{aligned} y' &= \{(3x+1)^2\}'(x-2) + (3x+1)^2(x-2)' \\ &= 2(3x+1)(3x+1)' \cdot (x-2) + (3x+1)^2 \cdot 1 \\ &= 2(3x+1) \cdot 3 \cdot (x-2) + (3x+1)^2 \cdot 1 \\ &= 6(3x+1)(x-2) + (3x+1)^2 \\ &= (3x+1)\{6(x-2) + (3x+1)\} \\ &= (3x+1)(6x-12+3x+1) \\ &= (3x+1)(9x-11) \end{aligned}$$

となる。

$$(9) y = \frac{x-2}{(x^2+1)^2}$$

解答

$$y' = -\frac{3x^2-8x-1}{(x^2+1)^3}$$

解説

商の微分より

$$y' = \frac{(x-2)'(x^2+1)^2 - (x-2)\{(x^2+1)^2\}'}{(x^2+1)^4}$$

となる。ここで, $\{(x^2+1)^2\}'$ は合成関数の微分より

$$\{(x^2+1)^2\}' = 2(x^2+1) \cdot (x^2+1)'$$

となるので

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x-2)'(x^2+1)^2 - (x-2)\{(x^2+1)^2\}'}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{1 \cdot (x^2+1)^2 - (x-2) \cdot 2(x^2+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{1 \cdot (x^2+1)^2 - (x-2) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{(x^2+1)^2 - 4x(x-2)(x^2+1)}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{(x^2+1)^2 - 4x(x-2)(x^2+1)}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{(x^2+1) - 4x(x-2)}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{x^2+1-4x^2+8x}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{-3x^2+8x+1}{(x^2+1)^3} \\ &= -\frac{3x^2-8x-1}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

となる。

5 次の関数を微分せよ。

$$(1) y = \frac{x}{(x^4+1)^2}$$

解答

$$y' = -\frac{7x^4-1}{(x^4+1)^3}$$

解説

商の微分より

$$y' = \frac{(x)' \cdot (x^4+1)^2 - x \cdot \{(x^4+1)^2\}'}{(x^4+1)^4}$$

となる。ここで、 $\{(x^4+1)^2\}'$ は合成関数の微分より

$$\{(x^4+1)^2\}' = 2(x^4+1) \cdot (x^4+1)'$$

となるので

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x)' \cdot (x^4+1)^2 - x \cdot 2(x^4+1) \cdot (x^4+1)'}{(x^4+1)^4} \\ &= \frac{1 \cdot (x^4+1)^2 - x \cdot 2(x^4+1) \cdot 4x^3}{(x^4+1)^4} \end{aligned}$$

となる。すると分子分母で x^4+1 が約分できるから

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1 \cdot (x^4+1)^{\cancel{2}} - x \cdot 2(\cancel{x^4+1}) \cdot 4x^3}{(x^4+1)^{\cancel{4}}^3} \\ &= \frac{1 \cdot (x^4+1) - x \cdot 2 \cdot 4x^3}{(x^4+1)^3} \\ &= \frac{(x^4+1) - 8x^4}{(x^4+1)^3} \\ &= \frac{-7x^4+1}{(x^4+1)^3} \\ &= -\frac{7x^4-1}{(x^4+1)^3} \end{aligned}$$

となる。

$$(2) \quad y = \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$$

解答

$$y' = -\frac{4}{3x^2\sqrt[3]{x}}$$

解説

商の微分より

$$y' = -\frac{(x\sqrt[3]{x})'}{(x\sqrt[3]{x})^2}$$

となる。ここで、 $(x\sqrt[3]{x})'$ は積の微分を用いて

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{(x)' \cdot \sqrt[3]{x} + x \cdot (\sqrt[3]{x})'}{x^2\sqrt[3]{x^2}} \\ &= -\frac{(x)' \cdot \sqrt[3]{x} + x \cdot \left(x^{\frac{1}{3}}\right)'}{x^2\sqrt[3]{x^2}} \\ &= -\frac{1 \cdot \sqrt[3]{x} + x \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{x^2\sqrt[3]{x^2}} \\ &= -\frac{\sqrt[3]{x} + x \cdot \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}{x^2\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

となる。また、分子を通分するために $\sqrt[3]{x}$ の分母と分子に $3\sqrt[3]{x^2}$ をかけると

$$\begin{aligned} &\sqrt[3]{x} + x \cdot \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{x} \cdot 3\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{x}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{x} \cdot 3\sqrt[3]{x^2} + x}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ &= \frac{3\sqrt[3]{x^3} + x}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ &= \frac{3x + x}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ &= \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

となるから、整理すると

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2}}}{x^2\sqrt[3]{x^2}} \\ &= -\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2}} \div x^2\sqrt[3]{x^2} \\ &= -\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2} \cdot x^2\sqrt[3]{x^2}} \\ &= -\frac{4x}{3x^2\sqrt[3]{x^4}} \\ &= -\frac{4x}{3x^2 \cdot x\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

分子分母を x で約分すると

$$y' = -\frac{4}{3x^2\sqrt[3]{x}}$$

となる。

別解

$$y = \frac{1}{x\sqrt[3]{x}} \text{ について}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x\sqrt[3]{x}} \\ &= \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{1}{x^{1+\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} \\ &= x^{-\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

と変形してから微分すると

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{4}{3}x^{-\frac{4}{3}-1} \\ &= -\frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}} \\ &= -\frac{4}{3} \frac{1}{x^{\frac{7}{3}}} \\ &= -\frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^7}} \\ &= -\frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^6} \cdot x} \\ &= -\frac{4}{3} \frac{1}{x^2\sqrt[3]{x}} \\ &= -\frac{4}{3x^2\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

となる。

$$(3) \quad y = x\sqrt{x^2+1}$$

解答

$$y' = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

解説

積の微分より

$$y' = (x)' \cdot \sqrt{x^2+1} + x \cdot (\sqrt{x^2+1})'$$

となる。ここで、 $(\sqrt{x^2+1})'$ は合成関数の微分より

$$\begin{aligned} (\sqrt{x^2+1})' &= \left\{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right\}' \\ &= \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2+1)' \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
 y' &= (x)' \cdot \sqrt{x^2+1} + x \cdot \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2+1)' \\
 &= 1 \cdot \sqrt{x^2+1} + x \cdot \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \\
 &= \sqrt{x^2+1} + x \cdot (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot x \\
 &= \sqrt{x^2+1} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot x \\
 &= \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}
 \end{aligned}$$

となる。通分すると

$$\begin{aligned}
 y' &= \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \\
 &= \frac{(\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \\
 &= \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \\
 &= \frac{(x^2+1)+x^2}{\sqrt{x^2+1}} \\
 &= \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(4) y = \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}$$

解答

$$y' = \frac{2}{(\sqrt{2-x^2})^3}$$

解説

商の微分より

$$y' = \frac{(x)' \cdot \sqrt{2-x^2} - x \cdot (\sqrt{2-x^2})'}{(\sqrt{2-x^2})^2}$$

となる。ここで、 $(\sqrt{2-x^2})'$ は合成関数の微分より

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{2-x^2})' &= \left\{ (2-x^2)^{\frac{1}{2}} \right\}' \\
 &= \frac{1}{2}(2-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2-x^2)'
 \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{(x)' \cdot \sqrt{2-x^2} - x \cdot \frac{1}{2}(2-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2-x^2)'}{(\sqrt{2-x^2})^2} \\
 &= \frac{1 \cdot \sqrt{2-x^2} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} \cdot x}{(\sqrt{2-x^2})^2} \\
 &= \frac{\sqrt{2-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}}{(\sqrt{2-x^2})^2}
 \end{aligned}$$

となる。分子から根号をなくすために、分子分母に $\sqrt{2-x^2}$ をかけると

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{(\sqrt{2-x^2})^2 + x^2}{(\sqrt{2-x^2})^3} \\
 &= \frac{(2-x^2) + x^2}{(\sqrt{2-x^2})^3} \\
 &= \frac{2}{(\sqrt{2-x^2})^3}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(5) y = \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

解答

$$y' = -\frac{1}{4x\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

解説

$y = \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}$ を $y = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2}}$ と考える。合成関数の微分より

$$y' = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)'$$

となる。ここで、 $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)'$ は

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' &= \left(1 + x^{-\frac{1}{2}}\right)' \\
 &= 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}-1} \\
 &= -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}\right) \\
 &= -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{3}{2}} \\
 &= -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} \\
 &= -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

となる。さらに、分母にある根号どうしをかけると

$$\begin{aligned}
 y' &= -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} \\
 &= -\frac{1}{4} \frac{1}{x\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}} \\
 &= -\frac{1}{4} \frac{1}{x\sqrt{x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}}
 \end{aligned}$$

となり、 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ を有理化して $\frac{\sqrt{x}}{x}$ と考えてから根号内を展開すると

$$\begin{aligned}
 y' &= -\frac{1}{4} \frac{1}{x\sqrt{x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}} \\
 &= -\frac{1}{4} \frac{1}{x\sqrt{x\left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)}} \\
 &= -\frac{1}{4} \frac{1}{x\sqrt{x+x \cdot \frac{\sqrt{x}}{x}}} \\
 &= -\frac{1}{4} \frac{1}{x\sqrt{x+\sqrt{x}}}
 \end{aligned}$$

となる。したがって

$$y' = -\frac{1}{4x\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

となる。

$$(6) \quad y = \frac{x}{x + \sqrt{1+x^2}}$$

解答

$$y' = \frac{2x^2 + 1 - 2x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

解説

商の微分より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x)' \cdot (x + \sqrt{1+x^2}) - x \cdot (x + \sqrt{1+x^2})'}{(x + \sqrt{1+x^2})^2} \\ &= \frac{1 \cdot (x + \sqrt{1+x^2}) - x \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1+x^2)' \right\}}{(x + \sqrt{1+x^2})^2} \\ &= \frac{(x + \sqrt{1+x^2}) - x \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x \right)}{(x + \sqrt{1+x^2})^2} \\ &= \frac{(x + \sqrt{1+x^2}) - x \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)}{(x + \sqrt{1+x^2})^2} \end{aligned}$$

分子の括弧内を通分すると

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x + \sqrt{1+x^2}) - x \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)}{(x + \sqrt{1+x^2})^2} \\ &= \frac{(x + \sqrt{1+x^2}) - x \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}}{(x + \sqrt{1+x^2})^2} \end{aligned}$$

となる。すると、分子に $x + \sqrt{1+x^2}$ が 2 つ現れるので、因数分解すると

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x + \sqrt{1+x^2}) - x \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}}{(x + \sqrt{1+x^2})^2} \\ &= \frac{(x + \sqrt{1+x^2}) \left(1 - x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)}{(x + \sqrt{1+x^2})^2} \end{aligned}$$

となるから、分子分母で $x + \sqrt{1+x^2}$ を約分し、また分子を通分すると

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x + \sqrt{1+x^2}) \left(1 - x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)}{(x + \sqrt{1+x^2})^2} \\ &= \frac{\cancel{(x + \sqrt{1+x^2})} \left(1 - x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)}{(x + \sqrt{1+x^2})^{\cancel{1}}} \\ &= \frac{1 - x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2} \cdot (x + \sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2} (x + \sqrt{1+x^2})} \end{aligned}$$

そして、分子分母に $x - \sqrt{1+x^2}$ をかけて

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2} (x + \sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x^2} - x) (x - \sqrt{1+x^2})}{(\sqrt{1+x^2} - x) (x + \sqrt{1+x^2}) (x - \sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{-(x - \sqrt{1+x^2}) (x - \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2} \{ x^2 - (\sqrt{1+x^2})^2 \}} \\ &= \frac{-(x - \sqrt{1+x^2})^2}{\sqrt{1+x^2} \{ x^2 - (1+x^2) \}} \\ &= \frac{-\{ x^2 - 2x\sqrt{1+x^2} + (\sqrt{1+x^2})^2 \}}{\sqrt{1+x^2} \{ x^2 - (1+x^2) \}} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2} \{ x^2 - (1+x^2) \}}{-\{ x^2 - 2x\sqrt{1+x^2} + (1+x^2) \}} \\ &= \frac{-\sqrt{1+x^2}}{2x^2 + 1 - 2x\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

となる。

別解

$y = \frac{x}{x + \sqrt{1+x^2}}$ について、分母を有理化すると

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{x + \sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{x (x - \sqrt{1+x^2})}{(x + \sqrt{1+x^2}) (x - \sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{x^2 - x\sqrt{1+x^2}}{x^2 - (\sqrt{1+x^2})^2} \\ &= \frac{x^2 - x\sqrt{1+x^2}}{x^2 - (1+x^2)} \\ &= \frac{x^2 - x\sqrt{1+x^2}}{-1} \\ &= -x^2 + x\sqrt{1+x^2} \end{aligned}$$

となる。この式を微分すると、積の微分と合成関数の微分より

$$\begin{aligned} y' &= -2x + (x)' \cdot \sqrt{1+x^2} + x \cdot \frac{1}{2} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1+x^2)' \\ &= -2x + 1 \cdot \sqrt{1+x^2} + x \cdot \frac{1}{2} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \\ &= -2x + \sqrt{1+x^2} + x \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x \\ &= -2x + \sqrt{1+x^2} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot x \\ &= -2x + \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

となる。通分すると

$$\begin{aligned} y' &= -2x + \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{-2x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{(\sqrt{1+x^2})^2}{(\sqrt{1+x^2})^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{-2x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{-2x\sqrt{1+x^2} + (1+x^2) + x^2}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{2x^2 + 1 - 2x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

となる。

6 次の関数を微分せよ。

(1) $y = 4x - \cos x$

解答

$$y' = 4 + \sin x$$

解説

$$\begin{aligned} y' &= (4x)' - (\cos x)' \\ &= 4 - (-\sin x) \\ &= 4 + \sin x \end{aligned}$$

(2) $y = \sin x - \tan x$

解答

$$y' = \cos x - \frac{1}{\cos^2 x}$$

解説

$$\begin{aligned} y' &= (\sin x)' - (\tan x)' \\ &= \cos x - \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

(3) $y = \cos(3x^2 - 1)$

解答

$$y' = -6x \sin(3x^2 - 1)$$

解説

$$\left(\begin{array}{ccc} \cos x & \xrightarrow{\text{微分}} & -\sin x \\ \uparrow & & \\ 3x^2 - 1 & & \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} y' &= -\sin(3x^2 - 1) \cdot (3x^2 - 1)' \\ &= -\sin(3x^2 - 1) \cdot 6x \\ &= -6x \sin(3x^2 - 1) \end{aligned}$$

(4) $y = \tan(2x + 3)$

解答

$$y' = \frac{2}{\cos^2(2x + 3)}$$

解説

$$\left(\begin{array}{ccc} \tan x & \xrightarrow{\text{微分}} & \frac{1}{\cos^2 x} \\ \uparrow & & \\ 2x + 3 & & \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\cos^2(2x + 3)} \cdot (2x + 3)' \\ &= \frac{1}{\cos^2(2x + 3)} \cdot 2 \\ &= \frac{2}{\cos^2(2x + 3)} \end{aligned}$$

(5) $y = \cos(\sin x)$

解答

$$y' = -\cos x \{\sin(\sin x)\}$$

解説

$$\left(\begin{array}{ccc} \cos x & \xrightarrow{\text{微分}} & -\sin x \\ \uparrow & & \\ \sin x & & \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} y' &= \{-\sin(\sin x)\} \cdot (\sin x)' \\ &= \{-\sin(\sin x)\} \cdot \cos x \\ &= -\cos x \{\sin(\sin x)\} \end{aligned}$$

(6) $y = \tan(\sin x)$

解答

$$y' = \frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}$$

解説

$$\left(\begin{array}{ccc} \tan x & \xrightarrow{\text{微分}} & \frac{1}{\cos^2 x} \\ \uparrow & & \\ \sin x & & \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} y' &= \left\{ \frac{1}{\cos^2(\sin x)} \right\} \cdot (\sin x)' \\ &= \left\{ \frac{1}{\cos^2(\sin x)} \right\} \cdot \cos x \\ &= \frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)} \end{aligned}$$

(7) $y = \sin x^2$

解答

$$y' = 2x \cos x^2$$

解説

$$\left(\begin{array}{ccc} \sin x & \xrightarrow{\text{微分}} & \cos x \\ \uparrow & & \\ x^2 & & \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} y' &= \cos x^2 \cdot (x^2)' \\ &= \cos x^2 \cdot 2x \\ &= 2x \cos x^2 \end{aligned}$$

注意

$\sin x^2$ とは, x^2 を角度とする $\sin$ のことである。例えば, $x = 30^\circ$ ならば, $\sin x^2 = \sin 900^\circ$ である。 $\sin x$ の二乗は $\sin^2 x$ と書く。

(8) $y = \tan x^2$

解答

$$y' = \frac{2x}{\cos^2 x^2}$$

解説

$$\left(\begin{array}{ccc} \tan x & \xrightarrow{\text{微分}} & \frac{1}{\cos^2 x} \\ \uparrow & & \\ x^2 & & \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{1}{\cos^2 x^2} \right) \cdot (x^2)' \\ &= \left(\frac{1}{\cos^2 x^2} \right) \cdot 2x \\ &= \frac{2x}{\cos^2 x^2} \end{aligned}$$

(9) $y = \cos^3 x$

解答

$$y' = -3 \sin x \cos^2 x$$

解説

$$\left(\begin{array}{ccc} x^3 & \xrightarrow{\text{微分}} & 3x^2 \\ \uparrow & & \\ \cos x & & \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} y' &= 3 \cos^2 x \cdot (\cos x)' \\ &= 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x) \\ &= -3 \sin x \cos^2 x \end{aligned}$$

(10) $y = \tan^3 x$

解答

$$y' = \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x}$$

解説

$$\left(\begin{array}{ccc} x^3 & \xrightarrow{\text{微分}} & 3x^2 \\ \uparrow & & \\ \cos x & & \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} y' &= 3 \tan^2 x \cdot (\tan x)' \\ &= 3 \tan^2 x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right) \\ &= \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

7 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \frac{1}{\cos x}$

解答

$$y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

解説

商の微分より

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= -\frac{(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

(2) $y = \frac{1}{\sin^2 x}$

解答

$$y' = -\frac{2 \cos x}{\sin^3 x}$$

解説

商の微分より

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{(\sin^2 x)'}{(\sin^2 x)^2} \\ &= -\frac{2 \sin x \cdot (\sin x)'}{\sin^4 x} \\ &= -\frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\sin^4 x} \\ &= -\frac{2 \cancel{\sin x} \cdot \cos x}{\sin^3 x} \\ &= -\frac{2 \cos x}{\sin^3 x} \end{aligned}$$

(3) $y = x^2 \sin(3x + 5)$

解答

$$y' = x\{2 \sin(3x + 5) + 3x \cos(3x + 5)\}$$

解説

積の微分より

$$\begin{aligned} y' &= (x^2)' \cdot \sin(3x + 5) + x^2 \cdot \{\sin(3x + 5)\}' \\ &= 2x \cdot \sin(3x + 5) + x^2 \cdot \cos(3x + 5) \cdot (3x + 5)' \\ &= 2x \cdot \sin(3x + 5) + x^2 \cdot \cos(3x + 5) \cdot 3 \\ &= 2x \sin(3x + 5) + 3x^2 \cos(3x + 5) \\ &= x\{2 \sin(3x + 5) + 3x \cos(3x + 5)\} \end{aligned}$$

(4) $y = \sin 5x \cos 3x$

解答

$$y' = 5 \cos 5x \cos 3x - 3 \sin 5x \sin 3x$$

解説

積の微分より

$$\begin{aligned} y' &= (\sin 5x)' \cdot \cos 3x + \sin 5x \cdot (\cos 3x)' \\ &= \cos 5x \cdot (5x)' \cdot \cos 3x + \sin 5x \cdot (-\sin 3x) \cdot (3x)' \\ &= \cos 5x \cdot 5 \cdot \cos 3x + \sin 5x \cdot (-\sin 3x) \cdot 3 \\ &= 5 \cos 5x \cos 3x - 3 \sin 5x \sin 3x \end{aligned}$$

(5) $y = \sin^2 3x$

解答

$$y' = 3 \sin 6x$$

解説

$$\left(\begin{array}{ccc} x^2 & \xrightarrow{\text{微分}} & 2x \\ \uparrow & & \\ \sin 3x & & \end{array} \right)$$

合成関数の微分より

$$\begin{aligned} y' &= 2 \sin 3x \cdot (\sin 3x)' \\ &= 2 \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot (3x)' \\ &= 2 \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot 3 \\ &= 6 \sin 3x \cos 3x \end{aligned}$$

ここで、2 倍角の公式より $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ より $\theta = 3x$ として

$$\begin{aligned} y' &= 6 \sin 3x \cos 3x \\ &= 3 \cdot 2 \sin 3x \cos 3x \\ &= 3 \sin 6x \end{aligned}$$

別解

2 倍角の公式より $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ より、 $\theta = 3x$ として

$$\begin{aligned} y &= \sin^2 3x \\ &= \frac{1 - \cos 6x}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 6x \end{aligned}$$

なので、微分して

$$\begin{aligned} y' &= 0 - \frac{1}{2}(\cos 6x)' \\ &= -\frac{1}{2}(-\sin 6x) \cdot (6x)' \\ &= -\frac{1}{2}(-\sin 6x) \cdot 6 \\ &= 3 \sin 6x \end{aligned}$$

(6) $y = \sin^5 x \cos 5x$

解答

$$y' = 5 \sin^4 x \cos 6x$$

解説

積の微分より

$$\begin{aligned} y' &= (\sin^5 x)' \cdot \cos 5x + \sin^5 x \cdot (\cos 5x)' \\ &= 5 \sin^4 x \cdot (\sin x)' \cdot \cos 5x + \sin^5 x \cdot (-\sin 5x) \cdot (5x)' \\ &= 5 \sin^4 x \cdot \cos x \cdot \cos 5x + \sin^5 x \cdot (-\sin 5x) \cdot 5 \\ &= 5 \sin^4 x \cos x \cos 5x - 5 \sin^5 x \sin 5x \\ &= 5 \sin^4 x (\cos x \cos 5x - \sin x \sin 5x) \end{aligned}$$

ここで、加法定理より

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$$

なので、 $\alpha = x$, $\beta = 5x$ として

$$\begin{aligned} y' &= 5 \sin^4 x (\cos x \cos 5x - \sin x \sin 5x) \\ &= 5 \sin^4 x \cos(x + 5x) \\ &= 5 \sin^4 x \cos 6x \end{aligned}$$

(7) $y = \sin^4 x \cos^4 x$

解答

$$y' = \frac{1}{2} \sin^3 2x \cos 2x$$

解説

積の微分より

$$\begin{aligned} y' &= (\sin^4 x)' \cdot \cos^4 x + \sin^4 x \cdot (\cos^4 x)' \\ &= 4 \sin^3 x \cdot (\sin x)' \cdot \cos^4 x + \sin^4 x \cdot 4 \cos^3 x \cdot (\cos x)' \\ &= 4 \sin^3 x \cdot \cos x \cdot \cos^4 x + \sin^4 x \cdot 4 \cos^3 x \cdot (-\sin x) \\ &= 4 \sin^3 x \cos^5 x - 4 \sin^5 x \cos^3 x \\ &= 4 \sin^3 x \cos^3 x (\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= 4 (\sin x \cos x)^3 (\cos^2 x - \sin^2 x) \end{aligned}$$

ここで、2 倍角の公式より $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ と $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ より

$$\begin{aligned} \sin x \cos x &= \frac{1}{2} \sin 2x \\ \cos^2 x - \sin^2 x &= \cos 2x \end{aligned}$$

を代入して

$$\begin{aligned} y' &= 4 (\sin x \cos x)^3 (\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= 4 \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)^3 \cdot \cos 2x \\ &= 4 \cdot \frac{1}{8} \sin^3 2x \cos 2x \\ &= \frac{1}{2} \sin^3 2x \cos 2x \end{aligned}$$

別解

2 倍角の公式より

$$\begin{aligned} y &= \sin^4 x \cos^4 x \\ &= (\sin x \cos x)^4 \\ &= \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)^4 \\ &= \frac{1}{16} \sin^4 2x \end{aligned}$$

なので、微分して

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{16} (\sin^4 2x)' \\ &= \frac{1}{16} \cdot 4 \sin^3 2x \cdot (\sin 2x)' \\ &= \frac{1}{16} \cdot 4 \sin^3 2x \cdot \cos 2x \cdot (2x)' \\ &= \frac{1}{16} \cdot 4 \sin^3 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 \\ &= \frac{1}{2} \sin^3 2x \cos 2x \end{aligned}$$

(8) $y = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$

解答

$$y' = -\frac{2x \sin x + \cos x}{2x\sqrt{x}}$$

解説

商の微分より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\cos x)' \cdot \sqrt{x} - \cos x \cdot (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{(\cos x)' \cdot \sqrt{x} - \cos x \cdot (x^{\frac{1}{2}})'}{(\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{(-\sin x) \cdot \sqrt{x} - \cos x \cdot \left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right)}{(\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{(-\sin x) \cdot \sqrt{x} - \cos x \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)}{(\sqrt{x})^2} \end{aligned}$$

分子、分母に $2\sqrt{x}$ をかけて

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(-\sin x) \cdot 2(\sqrt{x})^2 - \cos x \cdot 1}{2(\sqrt{x})^3} \\ &= \frac{-2x \sin x - \cos x}{2x\sqrt{x}} \\ &= -\frac{2x \sin x + \cos x}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

8 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \sqrt{1 + \sin^2 x}$

解答

$$y' = \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$$

解説

$y = \sqrt{1 + \sin^2 x}$ を $y = (1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{2}}$ と考える。合成関数の微分より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} (1 + \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 + \sin^2 x)' \\ &= \frac{1}{2} (1 + \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \{ 0 + (\sin^2 x)' \} \end{aligned}$$

となる。 $(\sin^2 x)'$ も合成関数の微分より

$$(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cdot (\sin x)'$$

より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} (1 + \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \{0 + (\sin^2 x)'\} \\ &= \frac{1}{2} (1 + \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \sin x \cdot (\sin x)' \\ &= \frac{1}{2} (1 + \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{2}}} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x \\ &= \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \end{aligned}$$

となる。

$$(2) \ y = \sin \sqrt{x^2 + 2x - 1}$$

解答

$$y' = \frac{(x+1) \cos \sqrt{x^2 + 2x - 1}}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$$

解説

合成関数の微分より

$$y' = \cos \sqrt{x^2 + 2x - 1} \cdot (\sqrt{x^2 + 2x - 1})'$$

となる。 $(\sqrt{x^2 + 2x - 1})'$ も合成関数の微分より

$$(\sqrt{x^2 + 2x - 1})' = \frac{1}{2} (x^2 + 2x - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 + 2x - 1)'$$

より

$$\begin{aligned} y' &= \cos \sqrt{x^2 + 2x - 1} \cdot (\sqrt{x^2 + 2x - 1})' \\ &= \cos \sqrt{x^2 + 2x - 1} \cdot \frac{1}{2} (x^2 + 2x - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 + 2x - 1)' \\ &= \cos \sqrt{x^2 + 2x - 1} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 + 2x - 1)^{\frac{1}{2}}} \cdot (2x + 2) \\ &= \cos \sqrt{x^2 + 2x - 1} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}} \cdot 2(x + 1) \\ &= \frac{(x+1) \cos \sqrt{x^2 + 2x - 1}}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}} \end{aligned}$$

となる。

$$(3) \ y = \left(\tan x + \frac{1}{\tan x} \right)^2$$

解答

$$y' = -\frac{16 \cos 2x}{\sin^3 2x}$$

解説

合成関数の微分より

$$y' = 2 \left(\tan x + \frac{1}{\tan x} \right) \cdot \left(\tan x + \frac{1}{\tan x} \right)'$$

となる。 $\left(\tan x + \frac{1}{\tan x} \right)'$ は商の微分より

$$\begin{aligned} \left(\tan x + \frac{1}{\tan x} \right)' &= (\tan x)' + \left(\frac{1}{\tan x} \right)' \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} + \left\{ -\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x} \right\} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} + \left(-\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x} \right) \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x \tan^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} y' &= 2 \left(\tan x + \frac{1}{\tan x} \right) \cdot \left(\tan x + \frac{1}{\tan x} \right)' \\ &= 2 \left(\tan x + \frac{1}{\tan x} \right) \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) \\ &= 2 \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) \\ &= 2 \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) \end{aligned}$$

となる。それぞれの括弧の中を通分して

$$\begin{aligned} y' &= 2 \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) \\ &= 2 \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \\ &= -2 \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \\ &= -2 \frac{\sin x \cos x}{(\sin^2 x + \cos^2 x)} \cdot \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{(\cos^2 x - \sin^2 x)} \\ &= -2 \frac{\sin^3 x \cos^3 x}{(\sin^2 x + \cos^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)} \\ &= -2 \frac{\sin^3 x \cos^3 x}{(\sin x \cos x)^3} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ であり、また 2 倍角の公式より $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ であるから

$$\begin{aligned} y' &= -2 \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)}{(\sin x \cos x)^3} \\ &= -2 \frac{1 \cdot \cos 2x}{\left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)^3} \\ &= -2 \frac{\cos 2x}{\frac{1}{8} \sin^3 2x} \\ &= -2 \frac{8 \cos 2x}{\sin^3 2x} \\ &= -\frac{16 \cos 2x}{\sin^3 2x} \end{aligned}$$

となる。

別解

$$\begin{aligned}
y &= \left(\tan x + \frac{1}{\tan x} \right)^2 \\
&= \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} \right)^2 \\
&= \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 \\
&= \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2x} \right)^2 \\
&= \left(\frac{2}{\sin 2x} \right)^2 \\
&= \frac{4}{\sin^2 2x}
\end{aligned}$$

であるから、商の微分より

$$y' = -4 \cdot \frac{(\sin^2 2x)'}{\sin^4 2x}$$

となる。 $(\sin^2 2x)'$ は合成関数の微分より

$$\begin{aligned}
(\sin^2 2x)' &= 2 \sin 2x \cdot (\sin 2x)' \\
&= 2 \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot (2x)' \\
&= 2 \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot 2
\end{aligned}$$

なので

$$y' = -4 \cdot \frac{2 \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot 2}{\sin^4 2x}$$

より、分子分母を $\sin 2x$ で約分して

$$y' = -\frac{16 \cos 2x}{\sin^3 2x}$$

となる。

$$(4) \quad y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

解答

$$y' = \frac{1}{1 - \sin x}$$

解説

商の微分より

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{(\cos x)' \cdot (1 - \sin x) - \cos x \cdot (1 - \sin x)'}{(1 - \sin x)^2} \\
&= \frac{(-\sin x) \cdot (1 - \sin x) - \cos x \cdot (-\cos x)}{(1 - \sin x)^2} \\
&= \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1 - \sin x)^2} \\
&= \frac{-\sin x + (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1 - \sin x)^2}
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ より

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{-\sin x + (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1 - \sin x)^2} \\
&= \frac{-\sin x + 1}{(1 - \sin x)^2} \\
&= \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)^2}
\end{aligned}$$

となり、分子分母の $1 - \sin x$ を約分して

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)^2} \\
&= \frac{1}{1 - \sin x}
\end{aligned}$$

となる。

$$(5) \quad y = \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}$$

解答

$$y' = \frac{\sin x - \cos x - 1}{(1 + \cos x)^2}$$

解説

商の微分より

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{(1 - \sin x)' \cdot (1 + \cos x) - (1 - \sin x) \cdot (1 + \cos x)'}{(1 + \cos x)^2} \\
&= \frac{(-\cos x) \cdot (1 + \cos x) - (1 - \sin x) \cdot (-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} \\
&= \frac{-\cos x - \cos^2 x + \sin x - \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} \\
&= \frac{\sin x - \cos x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1 + \cos x)^2}
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ より

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{\sin x - \cos x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1 + \cos x)^2} \\
&= \frac{\sin x - \cos x - 1}{(1 + \cos x)^2}
\end{aligned}$$

となる。

$$(6) \quad y = \sin(x + a) \cos(x - a)$$

解答

$$y' = \cos 2x$$

解説

積の微分より

$$y' = \{\sin(x + a)\}' \cdot \cos(x - a) + \sin(x + a) \cdot \{\cos(x - a)\}'$$

となる。ここで、 $\{\sin(x + a)\}'$ は合成関数の微分より

$$\{\sin(x + a)\}' = \cos(x + a) \cdot (x + a)'$$

となる。 $\{\sin(x + a)\}'$ も同様である。したがって

$$\begin{aligned}
y' &= \{\sin(x + a)\}' \cdot \cos(x - a) + \sin(x + a) \cdot \{\cos(x - a)\}' \\
&= \cos(x + a) \cdot (x + a)' \cdot \cos(x - a) \\
&\quad + \sin(x + a) \cdot \{-\sin(x - a) \cdot (x - a)'\} \\
&= \cos(x + a) \cdot 1 \cdot \cos(x - a) \\
&\quad + \sin(x + a) \cdot \{-\sin(x - a) \cdot 1\} \\
&= \cos(x + a) \cos(x - a) - \sin(x + a) \sin(x - a)
\end{aligned}$$

となる。すると加法定理から

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$$

が成り立つので、 $x + a = \alpha$, $x - a = \beta$ と考えると

$$\begin{aligned} y' &= \cos(x+a)\cos(x-a) - \sin(x+a)\sin(x-a) \\ &= \cos\{(x+a) + (x-a)\} \\ &= \cos 2x \end{aligned}$$

となる。

別解
積→和公式から

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

が成り立つので、 $x + a = \alpha$, $x - a = \beta$ とすると

$$\begin{aligned} &\sin(x+a)\cos(x-a) \\ &= \frac{1}{2} [\sin\{(x+a) + (x-a)\} + \sin\{(x+a) - (x-a)\}] \end{aligned}$$

より

$$\sin(x+a)\cos(x-a) = \frac{1}{2} (\sin 2x + \sin 2a)$$

が成り立つ。ゆえに、

$$y = \frac{1}{2} (\sin 2x + \sin 2a)$$

となるので、微分すると合成関数の微分より

$$y' = \frac{1}{2} \{ \cos 2x \cdot (2x)' + (\sin 2a)' \}$$

より

$$y' = \frac{1}{2} (\cos 2x \cdot 2 + 0)$$

から

$$y' = \cos 2x$$

となる。

$$(7) \quad y = \frac{\sin x}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}}$$

解答

$$y' = \frac{a^2 \cos x}{\left(\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \right)^3}$$

解説

商の微分より

$$y' = \frac{(\sin x)' \sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} - \sin x \left(\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \right)'}{\left(\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \right)^2}$$

となる。ここで、 $\left(\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \right)'$ について合

成関数の微分より

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \right)' \\ &= \left\{ \left(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x \right)^{\frac{1}{2}} \right\}' \\ &= \frac{1}{2} \left(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x \right)' \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}} \cdot \left(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x \right)' \\ &= \frac{\left(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x \right)'}{2\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}} \\ &= \frac{a^2 \cdot 2 \cos x \cdot (\cos x)' + b^2 \cdot 2 \sin x \cdot (\sin x)'}{2\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}} \\ &= \frac{a^2 \cdot 2 \cos x \cdot (-\sin x) + b^2 \cdot 2 \sin x \cdot \cos x}{2\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}} \\ &= \frac{-a^2 \sin x \cos x + b^2 \sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}} \\ &= \frac{(b^2 - a^2) \sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}} \end{aligned}$$

となるので、

$$y' = \frac{\cos x \sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} - \sin x \frac{(b^2 - a^2) \sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}}}{\left(\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \right)^2}$$

となる。分子分母に $\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ をかけて

$$y' = \frac{\cos x \left(\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \right)^2 - \sin x \{ (b^2 - a^2) \sin x \cos x \}}{\left(\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \right)^3}$$

となるので、分子を展開すると

$$y' = \frac{a^2 \cos^3 x + b^2 \sin^2 x \cos x + a^2 \sin^2 \cos x - b^2 \sin^2 x \cos x}{\left(\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \right)^3}$$

より

$$y' = \frac{a^2 \cos^3 x + \cancel{b^2 \sin^2 x \cos x} + a^2 \sin^2 \cos x - \cancel{b^2 \sin^2 x \cos x}}{\left(\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \right)^3}$$

となるので

$$y' = \frac{a^2 \cos^3 x + a^2 \sin^2 \cos x}{\left(\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \right)^3}$$

となる。さらに分子を $a^2 \cos x$ でくくると

$$y' = \frac{a^2 \cos x (\cos^2 x + \sin^2 x)}{\left(\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \right)^3}$$

となる。 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ より

$$y' = \frac{a^2 \cos x \cdot 1}{\left(\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \right)^3}$$

から

$$y' = \frac{a^2 \cos x}{\left(\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \right)^3}$$

となる。

9 次の関数を微分せよ。ただし、 a は定数で、 $a > 0$, $a \neq 1$ とする。

(1) $y = \log(x^2 + 2)$

解答

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 2}$$

解説

$$\left(\begin{array}{c} \log x \xrightarrow{\text{微分}} \frac{1}{x} \\ \uparrow \\ x^2 + 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x^2 + 2} \cdot (x^2 + 2)' \\ &= \frac{1}{x^2 + 2} \cdot 2x \\ &= \frac{2x}{x^2 + 2} \end{aligned}$$

(2) $y = \log \frac{1}{3x + 1}$

解答

$$y' = -\frac{3}{3x + 1}$$

解説

$$\left(\begin{array}{c} \log x \xrightarrow{\text{微分}} \frac{1}{x} \\ \uparrow \\ 3x + 1 \end{array} \right)$$

$y = \log \frac{1}{3x + 1} = \log(3x + 1)^{-1} = -\log(3x + 1)$ なので

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{3x + 1} \cdot (3x + 1)' \\ &= -\frac{1}{3x + 1} \cdot 3 \\ &= -\frac{3}{3x + 1} \end{aligned}$$

(3) $y = \log |x^2 - 4|$

解答

$$y' = \frac{2x}{x^2 - 4}$$

解説

$$\left(\begin{array}{c} \log |x| \xrightarrow{\text{微分}} \frac{1}{x} \\ \uparrow \\ x^2 - 4 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x^2 - 4} \cdot (x^2 - 4)' \\ &= \frac{1}{x^2 - 4} \cdot 2x \\ &= \frac{2x}{x^2 - 4} \end{aligned}$$

(4) $y = \log(\sin^2 x)$

解答

$$y' = \frac{2}{\tan x}$$

解説

$$\left(\begin{array}{c} \log x \xrightarrow{\text{微分}} \frac{1}{x} \\ \uparrow \\ \sin^2 x \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\sin^2 x} \cdot (\sin^2 x)' \\ &= \frac{1}{\sin^2 x} \cdot 2 \sin x \cdot (\sin x)' \\ &= \frac{1}{\sin^2 x} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x \\ &= \frac{1}{\sin x} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x \\ &= \frac{2 \cos x}{\sin x} \end{aligned}$$

ここで、分子分母を $\cos x$ で割ると

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2 \cos x}{\sin x} \\ &= \frac{2}{\frac{\sin x}{\cos x}} \\ &= \frac{2}{\tan x} \end{aligned}$$

となる。

別解

$y = \log(\sin^2 x) = 2 \log |\sin x|$ より、

$$\begin{aligned} y' &= 2 \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' \\ &= 2 \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \\ &= \frac{2 \cos x}{\sin x} \\ &= \frac{2}{\frac{\sin x}{\cos x}} \\ &= \frac{2}{\tan x} \end{aligned}$$

注意

この別解について、 $\sin x$ が負になるかもしれないので、丸括弧ではなく、絶対値としてある。

(5) $y = (\log x)^3$

解答

$$y' = \frac{3(\log x)^2}{x}$$

解説

$$\left(\begin{array}{c} x^3 \xrightarrow{\text{微分}} 3x^2 \\ \uparrow \\ \log x \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} y' &= 3(\log x)^2 \cdot (\log x)' \\ &= 3(\log x)^2 \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{3(\log x)^2}{x} \end{aligned}$$

(6) $y = \log_4 2x$

解答

$$y' = \frac{1}{2x \log 2}$$

解説

$$\left(\begin{array}{c} \log_4 x \\ \uparrow \\ 2x \end{array} \xrightarrow{\text{微分}} \frac{1}{x \log 4} \right)$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2x \log 4} \cdot (2x)' \\ &= \frac{1}{2x \log 4} \cdot 2 \\ &= \frac{2}{2x \log 4} \\ &= \frac{1}{x \log 4} \\ &= \frac{1}{x \log 2^2} \\ &= \frac{1}{2x \log 2} \end{aligned}$$

別解

$y = \log_4 2x = \log_4 2 + \log_4 x$ より、微分して

$$\begin{aligned} y' &= (\log_4 2)' + \frac{1}{x \log 4} \\ &= 0 + \frac{1}{x \log 4} \\ &= \frac{1}{x \log 2^2} \\ &= \frac{1}{2x \log 2} \end{aligned}$$

注意

この別解について、 $\log_4 2$ は定数である（実際に値を求めると $\frac{1}{2}$ ）。よって x に無関係であるから、微分すると 0 になる。

(7) $y = \log_a (x^2 - 1)$

解答

$$y' = \frac{2x}{(x^2 - 1) \log a}$$

解説

$$\left(\begin{array}{c} \log_a x \\ \uparrow \\ x^2 - 1 \end{array} \xrightarrow{\text{微分}} \frac{1}{x \log a} \right)$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{(x^2 - 1) \log a} \cdot (x^2 - 1)' \\ &= \frac{1}{(x^2 - 1) \log a} \cdot 2x \\ &= \frac{2x}{(x^2 - 1) \log a} \end{aligned}$$

(8) $y = (x \log x - x)^2$

解答

$$y' = 2x \log x (\log x - 1)$$

解説

$$\left(\begin{array}{c} x^2 \\ \uparrow \\ x \log x - x \end{array} \xrightarrow{\text{微分}} 2x \right)$$

$$\begin{aligned} y' &= 2(x \log x - x) \cdot (x \log x - x)' \\ &= 2(x \log x - x) \cdot \{(x)' \cdot \log x + x \cdot (\log x)' - (x)'\} \\ &= 2(x \log x - x) \cdot \left(1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 \right) \\ &= 2(x \log x - x) \cdot (\log x + 1 - 1) \\ &= 2(x \log x - x) \cdot \log x \\ &= 2x(\log x - 1) \cdot \log x \\ &= 2x \log x (\log x - 1) \end{aligned}$$

注意

$x \log x$ は x と $\log x$ の積なので、積の微分を用いる。

(9) $y = e^{5x}$

解答

$$y' = 5e^{5x}$$

解説

$$\left(\begin{array}{c} e^x \\ \uparrow \\ 5x \end{array} \xrightarrow{\text{微分}} e^x \right)$$

$$\begin{aligned} y' &= e^{5x} \cdot (5x)' \\ &= e^{5x} \cdot 5 \\ &= 5e^{5x} \end{aligned}$$

(10) $y = (x + 3)e^{-x}$

解答

$$y' = -(x + 2)e^{-x}$$

解説

積の微分より

$$\begin{aligned} y' &= (x + 3)' \cdot e^{-x} + (x + 3) \cdot (e^{-x})' \\ &= 1 \cdot e^{-x} + (x + 3) \cdot e^{-x} \cdot (-x)' \\ &= 1 \cdot e^{-x} + (x + 3) \cdot e^{-x} \cdot (-1) \\ &= e^{-x} - (x + 3)e^{-x} \\ &= e^{-x} \{1 - (x + 3)\} \\ &= e^{-x} (1 - x - 3) \\ &= (-x - 2)e^{-x} \\ &= -(x + 2)e^{-x} \end{aligned}$$

注意

e^{-x} の微分は合成関数の微分を用いる。

$$\left(\begin{array}{c} e^x \\ \uparrow \\ -x \end{array} \xrightarrow{\text{微分}} e^x \right)$$

底が e である指数関数の微分は、すべてそのままになるという勘違いをしている人が多いので気を付けよう。例えば、 $(e^{-x})' = -e^{-x}$ となる。

(11) $y = x^3 e^{2x}$

解答

$$y' = x^2(2x+3)e^{2x}$$

解説

積の微分より

$$\begin{aligned} y' &= (x^3)' \cdot e^{2x} + x^3 \cdot (e^{2x})' \\ &= 3x^2 \cdot e^{2x} + x^3 \cdot e^{2x} \cdot (2x)' \\ &= 3x^2 \cdot e^{2x} + x^3 \cdot e^{2x} \cdot 2 \\ &= 3x^2 e^{2x} + 2x^3 e^{2x} \\ &= x^2 e^{2x} (3 + 2x) \\ &= x^2 (2x+3) e^{2x} \end{aligned}$$

(12) $y = e^{-x} \cos x$

解答

$$y' = -e^{-x}(\sin x + \cos x)$$

解説

積の微分より

$$\begin{aligned} y' &= (e^{-x})' \cdot \cos x + e^{-x} \cdot (\cos x)' \\ &= e^{-x} \cdot (-x)' \cdot \cos x + e^{-x} \cdot (-\sin x) \\ &= e^{-x} \cdot (-1) \cdot \cos x + e^{-x} \cdot (-\sin x) \\ &= -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x \\ &= -e^{-x}(\cos x + \sin x) \\ &= -e^{-x}(\sin x + \cos x) \end{aligned}$$

(13) $y = e^x \tan x$

解答

$$y' = e^x \left(\tan x + \frac{1}{\cos^2 x} \right)$$

解説

積の微分より

$$\begin{aligned} y' &= (e^x)' \cdot \tan x + e^x \cdot (\tan x)' \\ &= e^x \cdot \tan x + e^x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= e^x \left(\tan x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) \end{aligned}$$

参考

$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ なので、この公式を用いて

$$y' = e^x(\tan^2 x + \tan x + 1)$$

としてもよい。

(14) $y = e^{3x^2-x}$

解答

$$y' = (6x-1)e^{3x^2-x}$$

解説

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{c} e^x \\ \uparrow \\ 3x^2 - x \end{array} \xrightarrow{\text{微分}} e^x \right) \\ y' &= e^{3x^2-x} \cdot (3x^2-x)' \\ &= e^{3x^2-x} \cdot (6x-1) \\ &= (6x-1)e^{3x^2-x} \end{aligned}$$

(15) $y = a^{-4x}$

解答

$$y' = -4a^{-4x} \log a$$

解説

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{c} a^x \\ \uparrow \\ -4x \end{array} \xrightarrow{\text{微分}} a^x \log a \right) \\ y' &= a^{-4x} \log a \cdot (-4x)' \\ &= a^{-4x} \log a \cdot (-4) \\ &= -4a^{-4x} \log a \end{aligned}$$

10 次の関数を微分せよ。ただし、 a は定数で、 $a > 0$ 、 $a \neq 1$ とする。

(1) $y = e^{-3x} \sin 3x$

解答

$$y' = -3e^{-3x}(\sin 3x - \cos 3x)$$

解説

積の微分と合成関数の微分より

$$\begin{aligned} y' &= (e^{-3x})' \cdot \sin 3x + e^{-3x} \cdot (\sin 3x)' \\ &= e^{-3x} \cdot (-3x)' \cdot \sin 3x + e^{-3x} \cdot \cos 3x \cdot (3x)' \\ &= e^{-3x} \cdot (-3) \cdot \sin 3x + e^{-3x} \cdot \cos 3x \cdot 3 \\ &= -3e^{-3x} \sin 3x + 3e^{-3x} \cos 3x \\ &= -3e^{-3x}(\sin 3x - \cos 3x) \end{aligned}$$

参考

増減表を書かなければならないときは、

$$y' = -3e^{-3x}(\sin 3x - \cos 3x)$$

において、 $\sin 3x - \cos 3x$ を合成して $\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2} \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)$ とする。つまり、

$$y' = -3\sqrt{2}e^{-3x} \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)$$

まで変形する。

(2) $y = e^{\cos x}$

解答

$$y' = -e^{\cos x} \sin x$$

解説

$$\left(\begin{array}{c} e^x \\ \uparrow \\ \cos x \end{array} \xrightarrow{\text{微分}} e^x \right)$$

合成関数の微分より

$$\begin{aligned} y' &= e^{\cos x} \cdot (\cos x)' \\ &= e^{\cos x} \cdot (-\sin x) \\ &= -e^{\cos x} \sin x \end{aligned}$$

注意

$-\sin x e^{\cos x}$ と書くと、 x と $e^{\cos x}$ がかけてあるように見えてしまう（つまり、 $-\sin(xe^{\cos x})$ と勘違いされる）。よって、答えのように $-e^{\cos x} \sin x$ と書くか、 $-(\sin x) e^{\cos x}$ と書く。同じ理由で、 $\log 2$ などもよく括弧をつける。

(3) $y = 2^{\sin x}$

解答

$$y' = (\log 2) 2^{\sin x} \cos x$$

解説

$$\left(\begin{array}{ccc} 2^x & \xrightarrow{\text{微分}} & 2^x \log 2 \\ \uparrow & & \\ \sin x & & \end{array} \right)$$

合成関数の微分より

$$\begin{aligned} y' &= 2^{\sin x} \log 2 \cdot (\sin x)' \\ &= 2^{\sin x} \log 2 \cdot \cos x \\ &= (\log 2) 2^{\sin x} \cos x \end{aligned}$$

(4) $y = \log_x a$

解答

$$y' = -\frac{\log a}{x(\log x)^2}$$

解説

底の交換公式より $y = \log_x a = \frac{\log a}{\log x} = \log a \cdot \frac{1}{\log x}$ となる。ここで $\log a$ は定数である。よって、商の微分公式 $\left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ より

$$\begin{aligned} y' &= \log a \cdot \left(\frac{1}{\log x} \right)' \\ &= \log a \cdot \left\{ -\frac{(\log x)'}{(\log x)^2} \right\} \\ &= \log a \cdot \left\{ -\frac{\frac{1}{x}}{(\log x)^2} \right\} \\ &= \log a \cdot \left\{ -\frac{1}{x(\log x)^2} \right\} \\ &= -\frac{\log a}{x(\log x)^2} \end{aligned}$$

(5) $y = \log_a \sin x$

解答

$$y' = \frac{1}{(\tan x) \log a}$$

解説

$$\left(\begin{array}{ccc} \log_a x & \xrightarrow{\text{微分}} & \frac{1}{x \log a} \\ \uparrow & & \\ \sin x & & \end{array} \right)$$

合成関数の微分より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{(\sin x) \log a} \cdot (\sin x)' \\ &= \frac{1}{(\sin x) \log a} \cdot \cos x \\ &= \frac{\cos x}{(\sin x) \log a} \end{aligned}$$

分子、分母を $\cos x$ で割って

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\cos x}{(\sin x) \log a} \\ &= \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \log a} \\ &= \frac{1}{(\tan x) \log a} \end{aligned}$$

となる。

(6) $y = \log\{e^x(1-x)\}$

解答

$$y' = \frac{x}{x-1}$$

解説

$$\left(\begin{array}{ccc} \log x & \xrightarrow{\text{微分}} & \frac{1}{x} \\ \uparrow & & \\ e^x(1-x) & & \end{array} \right)$$

合成関数の微分より

$$y' = \frac{1}{e^x(1-x)} \cdot \{e^x(1-x)\}'$$

となる。さらに、積の微分より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{e^x(1-x)} \cdot \{e^x(1-x)\}' \\ &= \frac{1}{e^x(1-x)} \cdot \{(e^x)'(1-x) + e^x(1-x)'\} \\ &= \frac{1}{e^x(1-x)} \cdot \{e^x(1-x) + e^x(-1)\} \\ &= \frac{1}{e^x(1-x)} \cdot (e^x - xe^x - e^x) \\ &= \frac{1}{e^x(1-x)} \cdot (-xe^x) \\ &= \frac{1}{\cancel{e^x}(1-x)} \cdot (-\cancel{x}e^{\cancel{x}}) \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot (-x) \\ &= \frac{-x}{1-x} \\ &= \frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

となる。

別解

$y = \log\{e^x(1-x)\}$ について

$$\begin{aligned} y &= \log\{e^x(1-x)\} \\ &= \log e^x + \log |1-x| \\ &= x \log e + \log |1-x| \\ &= x \cdot 1 + \log |1-x| \\ &= x + \log |1-x| \end{aligned}$$

と変形して微分する。 $\log |1-x|$ の微分は合成関数の微分より

$$\begin{aligned} y' &= (x)' + (\log |1-x|)' \\ &= 1 + \frac{1}{1-x} \cdot (1-x)' \\ &= 1 + \frac{1}{1-x} \cdot (-1) \\ &= 1 + \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

となり、通分すると

$$\begin{aligned} y' &= 1 + \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{(x-1)+1}{x-1} \\ &= \frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

となる。

$$(7) y = \sqrt[3]{x+1} \log x$$

解答

$$y' = \frac{x \log x + 3x + 3}{3x \sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

解説 積の微分より

$$\begin{aligned} y' &= (\sqrt[3]{x+1})' \log x + \sqrt[3]{x+1} (\log x)' \\ &= \left\{ (x+1)^{\frac{1}{3}} \right\}' \log x + \sqrt[3]{x+1} (\log x)' \end{aligned}$$

となる。したがって、合成関数の微分より

$$\begin{aligned} y' &= \left\{ (x+1)^{\frac{1}{3}} \right\}' \log x + \sqrt[3]{x+1} (\log x)' \\ &= \frac{1}{3} (x+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x+1)' \cdot \log x + \sqrt[3]{x+1} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{3} (x+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 1 \cdot \log x + \sqrt[3]{x+1} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}} \cdot \log x + \sqrt[3]{x+1} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} \cdot \log x + \sqrt[3]{x+1} \cdot \frac{1}{x} \end{aligned}$$

となる。通分すると $\sqrt[3]{(x+1)^3}$ は $x+1$ になるので

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} \cdot \log x + \sqrt[3]{x+1} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{\log x}{3 \sqrt[3]{(x+1)^2}} + \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x} \\ &= \frac{(\log x) \times x}{\left(3 \sqrt[3]{(x+1)^2} \right) \times x} + \frac{\sqrt[3]{x+1} \times 3 \sqrt[3]{(x+1)^2}}{x \times 3 \sqrt[3]{(x+1)^2}} \\ &= \frac{x \log x}{3x \sqrt[3]{(x+1)^2}} + \frac{3 \sqrt[3]{(x+1)^3}}{3x \sqrt[3]{(x+1)^2}} \\ &= \frac{x \log x}{3x \sqrt[3]{(x+1)^2}} + \frac{3(x+1)}{3x \sqrt[3]{(x+1)^2}} \\ &= \frac{x \log x + 3(x+1)}{3x \sqrt[3]{(x+1)^2}} \\ &= \frac{x \log x + 3x + 3}{3x \sqrt[3]{(x+1)^2}} \end{aligned}$$

$$(8) y = \log_a \left(x + \sqrt{x^2 - a^2} \right)$$

解答

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2} \log a}$$

解説

$$\left(\begin{array}{c} \log_a x \\ \uparrow \\ x + \sqrt{x^2 - a^2} \end{array} \xrightarrow{\text{微分}} \frac{1}{x \log a} \right)$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \log a} \cdot (x + \sqrt{x^2 - a^2})' \\ &= \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \log a} \cdot \left\{ x + (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} \right\}' \\ &= \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \log a} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2} (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 - a^2)' \right\} \\ &= \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \log a} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2} (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \right\} \\ &= \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \log a} \cdot \left\{ 1 + (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x \right\} \\ &= \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \log a} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot x \right) \\ &= \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \log a} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \right) \end{aligned}$$

となる。ここで、括弧内を通分すると

$$y' = \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \log a} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

となり、約分ができる。

$$y' = \frac{1}{\cancel{(x + \sqrt{x^2 - a^2})} \log a} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{x^2 - a^2}} + \cancel{x}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

つまり

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2} \log a}$$

となる。

参考

この設問は非常に有名な問題であるので、計算過程も含めて覚えておくとよい。

11 次の関数を微分せよ。ただし、 a, b は正の定数とする。

$$(1) y = \{ \log(1 + \sqrt{x}) \}^2$$

解答

$$y' = \frac{\log(1 + \sqrt{x})}{x + \sqrt{x}}$$

解説

$$\begin{aligned} y' &= 2 \log(1 + \sqrt{x}) \cdot \{ \log(1 + \sqrt{x}) \}' \\ &= 2 \log(1 + \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \cdot (1 + \sqrt{x})' \\ &= 2 \log(1 + \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \cdot \left(0 + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right) \\ &= 2 \log(1 + \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\log(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} \\ &= \frac{\log(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x} + x} \\ &= \frac{\log(1 + \sqrt{x})}{x + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$(2) y = \log \frac{x^2 - b}{x^2 + b}$$

解答

$$y' = \frac{4bx}{(x^2 - b)(x^2 + b)}$$

解説

$y = \log \frac{x^2 - b}{x^2 + b} = \log |x^2 - b| - \log |x^2 + b|$ であるから、合成関数の微分より

$$\begin{aligned} y' &= (\log |x^2 - b|)' - (\log |x^2 + b|)' \\ &= \frac{1}{x^2 - b} \cdot (x^2 - b)' - \frac{1}{x^2 + b} \cdot (x^2 + b)' \\ &= \frac{1}{x^2 - b} \cdot 2x - \frac{1}{x^2 + b} \cdot 2x \end{aligned}$$

となる。ゆえに通分して

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x^2 - b} \cdot 2x - \frac{1}{x^2 + b} \cdot 2x \\ &= 2x \left(\frac{1}{x^2 - b} - \frac{1}{x^2 + b} \right) \\ &= 2x \cdot \frac{(x^2 + b) - (x^2 - b)}{(x^2 - b)(x^2 + b)} \\ &= 2x \cdot \frac{x^2 + b - x^2 + b}{(x^2 - b)(x^2 + b)} \\ &= 2x \cdot \frac{2b}{(x^2 - b)(x^2 + b)} \\ &= \frac{4bx}{(x^2 - b)(x^2 + b)} \end{aligned}$$

となる。

参考

問題文より b は正の数となるので、 $x^2 + b$ は x がいくつであっても計算結果は正の数となる。ゆえに、 $\log |x^2 + b|$ と絶対値を使わずに $\log(x^2 + b)$ と丸括弧を用いてもよい。

別解

$$\left(\begin{array}{ccc} \log x & \xrightarrow{\text{微分}} & \frac{1}{x} \\ \uparrow & & \\ \frac{x^2 - b}{x^2 + b} & & \end{array} \right)$$

$y = \log \frac{x^2 - b}{x^2 + b}$ を合成関数と考えて、合成関数の微分をすると

$$y' = \frac{1}{\frac{x^2 - b}{x^2 + b}} \cdot \left(\frac{x^2 - b}{x^2 + b} \right)'$$

となる。商の微分より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\frac{x^2 - b}{x^2 + b}} \cdot \left(\frac{x^2 - b}{x^2 + b} \right)' \\ &= \frac{1}{\frac{x^2 - b}{x^2 + b}} \cdot \frac{(x^2 - b)'(x^2 + b) - (x^2 - b)(x^2 + b)'}{(x^2 + b)^2} \\ &= \frac{1}{\frac{x^2 - b}{x^2 + b}} \cdot \frac{2x \cdot (x^2 + b) - (x^2 - b) \cdot 2x}{(x^2 + b)^2} \\ &= \frac{x^2 + b}{x^2 - b} \cdot \frac{2x^3 + 2bx - 2x^3 - 2bx}{(x^2 + b)^2} \\ &= \frac{x^2 + b}{x^2 - b} \cdot \frac{4bx}{(x^2 + b)^2} \\ &= \frac{4bx}{(x^2 - b)(x^2 + b)} \end{aligned}$$

となる。

$$(3) \quad y = x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2})$$

解答

$$y' = 2\sqrt{1+x^2}$$

解説

$x\sqrt{1+x^2}$ は積の微分、 $\log(x + \sqrt{1+x^2})$ は合成関数の微分を行う。
 $(\sqrt{1+x^2})'$ について

$$\begin{aligned} &(x)' \cdot \sqrt{1+x^2} + x \cdot (\sqrt{1+x^2})' \\ &= 1 \cdot \sqrt{1+x^2} + x \cdot \frac{1}{2} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1+x^2)' \\ &= 1 \cdot \sqrt{1+x^2} + x \cdot \frac{1}{2} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \\ &= \sqrt{1+x^2} + x \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x \\ &= \sqrt{1+x^2} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot x \\ &= \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

ゆえに

$$(\sqrt{1+x^2})' = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \quad (13)$$

となる。

一方、 $\left\{ \log(x + \sqrt{1+x^2}) \right\}'$ について

$$\left(\begin{array}{ccc} \log x & \xrightarrow{\text{微分}} & \frac{1}{x} \\ \uparrow & & \\ x + \sqrt{1+x^2} & & \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot (x + \sqrt{1+x^2})' \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1+x^2)' \right\} \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot x \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \end{aligned}$$

となる。ここで、括弧内を通分すると

$$\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}$$

となり、約分ができる。

$$\frac{1}{\cancel{x + \sqrt{1+x^2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{1+x^2}} + \cancel{x}}{\sqrt{1+x^2}}$$

つまり

$$\left\{ \log(x + \sqrt{1+x^2}) \right\}' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (14)$$

となる。

以上、第 (13) 式と第 (14) 式より、

$$y' = \left(\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

となる。ここで、また通分すると

$$y' = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2 + 1}{\sqrt{1+x^2}}$$

となり、 $x^2 + 1 = (\sqrt{1+x^2})^2$ であることに注意すると

$$y' = \sqrt{1+x^2} + \frac{(\sqrt{1+x^2})^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

より、約分して

$$y' = \sqrt{1+x^2} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{1}$$

となる。したがって

$$y' = 2\sqrt{1+x^2}$$

となる。

参考

第 (14) 式は非常に有名な問題であるので、計算過程も含めて覚えておくとよい。また、この設問そのものも入試問題では有名であり、この結果はよく積分として出題される。つまり

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left\{ x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2}) \right\} + C$$

である。

$$(4) \quad y = \left(\frac{a}{b}\right)^x + \left(\frac{b}{x}\right)^a + \left(\frac{x}{a}\right)^b$$

解答

$$y' = \left(\frac{a}{b}\right)^x \log \frac{a}{b} - \frac{ab^a}{x^{a+1}} + \frac{bx^{b-1}}{a^b}$$

解説

$\left(\frac{a}{b}\right)^x$ は指数関数、 $\left(\frac{b}{x}\right)^a$ は分数関数、 $\left(\frac{x}{a}\right)^b$ は多項式だと思って、それぞれ微分する。

$$\begin{aligned} y' &= \left\{ \left(\frac{a}{b}\right)^x \right\}' + \left\{ \left(\frac{b}{x}\right)^a \right\}' + \left\{ \left(\frac{x}{a}\right)^b \right\}' \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^x \log \frac{a}{b} + (b^a \cdot x^{-a})' + \left(\frac{1}{a^b} \cdot x^b\right)' \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^x \log \frac{a}{b} + b^a \cdot (-a)x^{-a-1} + \frac{1}{a^b} \cdot bx^{b-1} \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^x \log \frac{a}{b} - ab^a \cdot x^{-(a+1)} + \frac{b}{a^b} \cdot x^{b-1} \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^x \log \frac{a}{b} - ab^a \cdot \frac{1}{x^{a+1}} + \frac{b}{a^b} \cdot x^{b-1} \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^x \log \frac{a}{b} - \frac{ab^a}{x^{a+1}} + \frac{bx^{b-1}}{a^b} \end{aligned}$$

$$(5) \quad y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

解答

$$y' = -\frac{4}{(e^x - e^{-x})^2}$$

解説

商の微分を用いる。ここで、 e^{-x} を微分すると合成関数の微分より

$$(e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-x)' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$$

となることに注意する。すると

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(e^x + e^{-x})'(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})'}{(e^x - e^{-x})^2} \\ &= \frac{\{e^x + (-e^{-x})\}(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})\{e^x - (-e^{-x})\}}{(e^x - e^{-x})^2} \\ &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} \\ &= \frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} \end{aligned}$$

分子を展開して

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} \\ &= \frac{\{(e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2\} - \{(e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2\}}{(e^x - e^{-x})^2} \\ &= \frac{(e^{2x} - 2e^{x-x} + e^{-2x}) - (e^{2x} + 2e^{x-x} + e^{-2x})}{(e^x - e^{-x})^2} \\ &= \frac{(e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x}) - (e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x})}{(e^x - e^{-x})^2} \\ &= \frac{(e^{2x} - 2 \cdot 1 + e^{-2x}) - (e^{2x} + 2 \cdot 1 + e^{-2x})}{(e^x - e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x} - e^{2x} - 2 - e^{-2x}}{(e^x - e^{-x})^2} \\ &= \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2} \\ &= -\frac{4}{(e^x - e^{-x})^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(6) \quad y = \log \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right)$$

解答

$$y' = \frac{2}{\cos x}$$

解説

$$y = \log \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) = \log |1 + \sin x| - \log |1 - \sin x|$$

であるから、合成関数の微分より

$$\begin{aligned} y' &= (\log |1 + \sin x|)' - (\log |1 - \sin x|)' \\ &= \frac{1}{1 + \sin x} \cdot (1 + \sin x)' - \frac{1}{1 - \sin x} \cdot (1 - \sin x)' \\ &= \frac{1}{1 + \sin x} \cdot \cos x - \frac{1}{1 - \sin x} \cdot (-\cos x) \\ &= \frac{1}{1 + \sin x} \cdot \cos x + \frac{1}{1 - \sin x} \cdot \cos x \end{aligned}$$

となる。ゆえに通分して

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{1 + \sin x} \cdot \cos x + \frac{1}{1 - \sin x} \cdot \cos x \\ &= \cos x \left(\frac{1}{1 + \sin x} + \frac{1}{1 - \sin x} \right) \\ &= \cos x \cdot \frac{(1 - \sin x) + (1 + \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} \\ &= \cos x \cdot \frac{1 - \sin x + 1 + \sin x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} \\ &= \cos x \cdot \frac{2}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} \\ &= \frac{2 \cos x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} \end{aligned}$$

となる。ここで $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ の公式から、分母 $(1 + \sin x)(1 - \sin x)$ は

$$(1 + \sin x)(1 - \sin x) = 1^2 - \sin^2 x = \cos^2 x$$

となるので、約分できる。つまり

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2 \cos x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} \\ &= \frac{2 \cos x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{2}{\cos x} \end{aligned}$$

となる。

別解

$$\left(\begin{array}{ccc} \log x & \xrightarrow{\text{微分}} & \frac{1}{x} \\ \uparrow & & \\ \frac{1+\sin x}{1-\sin x} & & \end{array} \right)$$

$y = \log \left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right)$ を合成関数と考えて、合成関数の微分をすると

$$y' = \frac{1}{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \cdot \left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right)'$$

となる。商の微分より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \cdot \left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right)' \\ &= \frac{1}{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \cdot \frac{(1+\sin x)'(1-\sin x) - (1+\sin x)(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2} \\ &= \frac{1}{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \cdot \frac{\cos x(1-\sin x) - (1+\sin x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} \\ &= \frac{1-\sin x}{1+\sin x} \cdot \frac{\cos x - \cos x \sin x + \cos x + \sin x \cos x}{(1-\sin x)^2} \\ &= \frac{1-\sin x}{1+\sin x} \cdot \frac{2 \cos x}{(1-\sin x)^2} \\ &= \frac{2 \cos x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} \end{aligned}$$

となる。(以下同じ)

12 次の関数を微分せよ。

(1) $y = (x+2)^2(x+3)^3(x+4)^4$

解答

$$y' = (x+2)(x+3)^2(x+4)^3(9x^2+52x+72)$$

解説

両辺の絶対値をとると

$$\begin{aligned} |y| &= |(x+2)^2(x+3)^3(x+4)^4| \\ &= |(x+2)^2| |(x+3)^3| |(x+4)^4| \\ &= |x+2|^2 |x+3|^3 |x+4|^4 \end{aligned}$$

となる。さらに、両辺の自然対数をとると

$$\begin{aligned} \log |y| &= \log |x+2|^2 |x+3|^3 |x+4|^4 \\ &= \log |x+2|^2 + \log |x+3|^3 + \log |x+4|^4 \\ &= 2 \log |x+2| + 3 \log |x+3| + 4 \log |x+4| \end{aligned}$$

より

$$\log |y| = 2 \log |x+2| + 3 \log |x+3| + 4 \log |x+4|$$

となる。上式の両辺を x で微分すると左辺は

$$\frac{1}{y} \cdot y'$$

となる。また右辺は、合成関数の微分より

$$\begin{aligned} &2 \cdot \frac{1}{x+2} \cdot (x+2)' + 3 \cdot \frac{1}{x+3} \cdot (x+3)' + 4 \cdot \frac{1}{x+4} \cdot (x+4)' \\ &= 2 \cdot \frac{1}{x+2} \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{x+3} \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{x+4} \cdot 1 \\ &= \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3} + \frac{4}{x+4} \end{aligned}$$

となり、さらに通分すると

$$\begin{aligned} &\frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3} + \frac{4}{x+4} \\ &= \frac{2(x+3)(x+4) + 3(x+2)(x+4) + 4(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+4)} \\ &= \frac{2(x^2+7x+12) + 3(x^2+6x+8) + 4(x^2+5x+6)}{(x+2)(x+3)(x+4)} \\ &= \frac{9x^2+52x+72}{(x+2)(x+3)(x+4)} \end{aligned}$$

となる。つまり

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{9x^2+52x+72}{(x+2)(x+3)(x+4)}$$

となる。さらに両辺に y をかけて

$$y' = y \cdot \frac{9x^2+52x+72}{(x+2)(x+3)(x+4)}$$

となる。ここで、 $y = (x+2)^2(x+3)^3(x+4)^4$ より

$$y' = (x+2)^2(x+3)^3(x+4)^4 \cdot \frac{9x^2+52x+72}{(x+2)(x+3)(x+4)}$$

となるので、約分して

$$y' = (x+2)^2(x+3)^3(x+4)^4 \cdot \frac{9x^2+52x+72}{(x+2)(x+3)(x+4)}$$

より

$$y' = (x+2)(x+3)^2(x+4)^3(9x^2+52x+72)$$

となる。

(2) $y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^2(x-3)^4}$

解答

$$y' = -\frac{2(x+1)(2x^2+5x+7)}{(x+2)^3(x-3)^5}$$

解説

両辺の絶対値をとると

$$\begin{aligned} |y| &= \left| \frac{(x+1)^2}{(x+2)^2(x-3)^4} \right| \\ &= \frac{|(x+1)^2|}{|(x+2)^2| |(x-3)^4|} \\ &= \frac{|x+1|^2}{|x+2|^2 |x-3|^4} \end{aligned}$$

となる。さらに、両辺の自然対数をとると

$$\begin{aligned} \log |y| &= \log \frac{|x+1|^2}{|x+2|^2 |x-3|^4} \\ &= \log |x+1|^2 - \log |x+2|^2 - \log |x-3|^4 \\ &= 2 \log |x+1| - 2 \log |x+2| - 4 \log |x-3| \end{aligned}$$

より

$$\log |y| = 2 \log |x+1| - 2 \log |x+2| - 4 \log |x-3|$$

となる。上式の両辺を x で微分すると左辺は

$$\frac{1}{y} \cdot y'$$

となる。また右辺は、合成関数の微分より

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \frac{1}{x+1} \cdot (x+1)' - 2 \cdot \frac{1}{x+2} \cdot (x+2)' - 4 \cdot \frac{1}{x-3} \cdot (x-3)' \\ = & 2 \cdot \frac{1}{x+1} \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{x+2} \cdot 1 - 4 \cdot \frac{1}{x-3} \cdot 1 \\ = & \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x+2} - \frac{4}{x-3} \end{aligned}$$

となり、さらに通分すると

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x+2} - \frac{4}{x-3} \\ = & \frac{2(x+2)(x-3) - 2(x+1)(x-3) - 4(x+1)(x+2)}{2(x+2)(x-3) - 2(x+1)(x-3) - 4(x+1)(x+2)} \\ = & \frac{2(x^2 - x - 6) - 2(x^2 - 2x - 3) - 4(x^2 + 3x + 2)}{(x+1)(x+2)(x-3)} \\ = & \frac{-4x^2 - 10x - 14}{(x+1)(x+2)(x-3)} \\ = & \frac{-2(2x^2 + 5x + 7)}{(x+1)(x+2)(x-3)} \end{aligned}$$

となる。つまり

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{-2(2x^2 + 5x + 7)}{(x+1)(x+2)(x-3)}$$

となる。さらに両辺に y をかけて

$$y' = -2y \cdot \frac{2x^2 + 5x + 7}{(x+1)(x+2)(x-3)}$$

となる。ここで、 $y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^2(x-3)^4}$ より

$$y' = -2 \cdot \frac{(x+1)^2}{(x+2)^2(x-3)^4} \cdot \frac{2x^2 + 5x + 7}{(x+1)(x+2)(x-3)}$$

となるので、約分して

$$y' = -2 \cdot \frac{(x+1)^{\cancel{2}1}}{(x+2)^2(x-3)^4} \cdot \frac{2x^2 + 5x + 7}{\cancel{(x+1)}(x+2)(x-3)}$$

より

$$y' = -\frac{2(x+1)(2x^2 + 5x + 7)}{(x+2)^3(x-3)^5}$$

となる。

$$(3) y = \frac{(1+x)^3(1-2x)}{(1-x)(1+2x)^3}$$

解答

$$y' = -\frac{2(1+x)^2(4x^2 - 3x + 2)}{(1-x)^2(1+2x)^4}$$

解説

両辺の絶対値をとると

$$\begin{aligned} |y| &= \left| \frac{(1+x)^3(1-2x)}{(1-x)(1+2x)^3} \right| \\ &= \frac{|1+x|^3|1-2x|}{|1-x||1+2x|^3} \end{aligned}$$

となる。さらに、両辺の自然対数をとると、右辺は

$$\begin{aligned} & \log \frac{|1+x|^3|1-2x|}{|1-x||1+2x|^3} \\ = & \log|1+x|^3 + \log|1-2x| - \log|1-x| - \log|1+2x|^3 \\ = & 3\log|1+x| + \log|1-2x| - \log|1-x| - 3\log|1+2x| \end{aligned}$$

より

$$\log|y| = 3\log|1+x| + \log|1-2x| - \log|1-x| - 3\log|1+2x|$$

となる。上式の両辺を x で微分すると左辺は

$$\frac{1}{y} \cdot y'$$

となる。また右辺は、合成関数の微分より

$$\begin{aligned} & 3 \cdot \frac{1}{1+x} \cdot (1+x)' + \frac{1}{1-2x} \cdot (1-2x)' \\ & - \frac{1}{1-x} \cdot (1-x)' - 3 \cdot \frac{1}{1+2x} \cdot (1+2x)' \\ = & 3 \cdot \frac{1}{1+x} \cdot 1 + \frac{1}{1-2x} \cdot (-2) \\ & - \frac{1}{1-x} \cdot (-1) - 3 \cdot \frac{1}{1+2x} \cdot 2 \\ = & \frac{3}{1+x} - \frac{2}{1-2x} + \frac{1}{1-x} - \frac{6}{1+2x} \end{aligned}$$

となり、さらに通分するが、ここで足す順番を工夫する。つまり

$$\begin{aligned} & \frac{3}{1+x} - \frac{2}{1-2x} + \frac{1}{1-x} - \frac{6}{1+2x} \\ = & \frac{3}{1+x} + \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-2x} - \frac{6}{1+2x} \\ = & \left(\frac{3}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) - \left(\frac{2}{1-2x} + \frac{6}{1+2x} \right) \\ = & \frac{3(1-x) + (1+x)}{(1+x)(1-x)} - \frac{2(1+2x) + 6(1-2x)}{(1-2x)(1+2x)} \\ = & \frac{4-2x}{(1+x)(1-x)} - \frac{8-8x}{(1-2x)(1+2x)} \\ = & \frac{4-2x}{1-x^2} - \frac{8-8x}{1-4x^2} \\ = & \frac{(4-2x)(1-4x^2) - (8-8x)(1-x^2)}{(1-x^2)(1-4x^2)} \\ = & \frac{(8x^3 - 16x^2 - 2x + 4) - (8x^3 - 8x^2 - 8x + 8)}{(1-x^2)(1-4x^2)} \\ = & \frac{-8x^2 + 6x - 4}{(1-x^2)(1-4x^2)} \\ = & \frac{-2(4x^2 - 3x + 2)}{(1+x)(1-x)(1-2x)(1+2x)} \end{aligned}$$

となる。つまり

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{-2(4x^2 - 3x + 2)}{(1+x)(1-x)(1-2x)(1+2x)}$$

となる。さらに両辺に y をかけて

$$y' = -2y \cdot \frac{4x^2 - 3x + 2}{(1+x)(1-x)(1-2x)(1+2x)}$$

となる。ここで、 $y = \frac{(1+x)^3(1-2x)}{(1-x)(1+2x)^3}$ より

$$y' = -2 \cdot \frac{(1+x)^3(1-2x)}{(1-x)(1+2x)^3} \cdot \frac{4x^2 - 3x + 2}{(1+x)(1-x)(1-2x)(1+2x)}$$

となるので、約分して

$$y' = -2 \cdot \frac{(1+x)^{\cancel{3}2} \cancel{(1-2x)}}{(1-x)(1+2x)^3 \cancel{(1+x)} \cancel{(1-2x)} \cancel{(1+2x)}} \cdot \frac{4x^2 - 3x + 2}{\cancel{(1-x)} \cancel{(1+2x)} (1-x) \cancel{(1+2x)}}$$

より

$$y' = -\frac{2(1+x)^2(4x^2 - 3x + 2)}{(1-x)^2(1+2x)^4}$$

となる。

(4) $y = \sqrt[3]{(x+2)(x^2+2)}$

解答

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{3\sqrt[3]{(x+2)^2(x^2+2)^2}}$$

解説

両辺の絶対値をとると

$$\begin{aligned} |y| &= \left| \sqrt[3]{(x+2)(x^2+2)} \right| \\ &= \sqrt[3]{|x+2||x^2+2|} \end{aligned}$$

となる。さらに、両辺の自然対数をとると、左辺は

$$\begin{aligned} &\log \sqrt[3]{|x+2||x^2+2|} \\ &= \log \left\{ |x+2||x^2+2| \right\}^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{3} \log |x+2||x^2+2| \\ &= \frac{1}{3} \{ \log |x+2| + \log |x^2+2| \} \\ &= \frac{1}{3} \log |x+2| + \frac{1}{3} \log |x^2+2| \end{aligned}$$

より

$$\log |y| = \frac{1}{3} \log |x+2| + \frac{1}{3} \log |x^2+2|$$

となる。上式の両辺を x で微分すると左辺は

$$\frac{1}{y} \cdot y'$$

となる。また右辺は、合成関数の微分より

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+2} \cdot (x+2)' + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2+2} \cdot (x^2+2)' \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2+2} \cdot 2x \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2x}{x^2+2} \end{aligned}$$

となり、さらに通分すると

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2x}{x^2+2} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{2x}{x^2+2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{(x^2+2) + 2x(x+2)}{(x+2)(x^2+2)} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2 + 4x + 2}{(x+2)(x^2+2)} \\ &= \frac{3x^2 + 4x + 2}{3(x+2)(x^2+2)} \end{aligned}$$

となる。つまり

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{3(x+2)(x^2+2)}$$

となる。さらに両辺に y をかけて

$$y' = y \cdot \frac{3x^2 + 4x + 2}{3(x+2)(x^2+2)}$$

となる。ここで、 $y = \sqrt[3]{(x+2)(x^2+2)}$ より

$$y' = \sqrt[3]{(x+2)(x^2+2)} \cdot \frac{3x^2 + 4x + 2}{3(x+2)(x^2+2)}$$

となるので、約分する。ここで、**分母の $x+2$ を $(\sqrt[3]{x+2})^3$ と考える。つまり、 $\sqrt[3]{x+2}$ を 3 個かけて $x+2$ になったと考える。すると、分子には $\sqrt[3]{x+2}$ が 1 個あり、分母には 3 個あるので、約分されて分母に 2 個残る。** $\sqrt[3]{x^2+2}$ も同様である。したがって

$$y' = \sqrt[3]{(x+2)(x^2+2)} \cdot \frac{3x^2 + 4x + 2}{3\sqrt[3]{(x+2)^3(x^2+2)^3}}$$

と考えて約分すると

$$y' = \sqrt[3]{\cancel{(x+2)}(\cancel{x^2+2})} \cdot \frac{3x^2 + 4x + 2}{3\sqrt[3]{(x+2)^{\cancel{3}}(x^2+2)^{\cancel{3}}}}$$

より

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{3\sqrt[3]{(x+2)^2(x^2+2)^2}}$$

となる。

参考

$\log |x^2+2|$ について、 x がいくつであっても x^2+2 は必ず正の数となるので、 $\log (x^2+2)$ としてもよい。

(5) $y = \frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$

解答

$$y' = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{(a^2+x^2)^5}}$$

解説

両辺の絶対値をとると

$$\begin{aligned} |y| &= \left| \frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}} \right| \\ &= \frac{|x|}{\sqrt{|a^2+x^2|^3}} \end{aligned}$$

となる。さらに、両辺の自然対数をとると、右辺は

$$\begin{aligned} &\log \frac{|x|}{\sqrt{|a^2+x^2|^3}} \\ &= \log |x| - \log \sqrt{|a^2+x^2|^3} \\ &= \log |x| - \log |a^2+x^2|^{\frac{3}{2}} \\ &= \log |x| - \frac{3}{2} \log |a^2+x^2| \end{aligned}$$

より

$$\log |y| = \log |x| - \frac{3}{2} \log |a^2+x^2|$$

となる。上式の両辺を x で微分すると左辺は

$$\frac{1}{y} \cdot y'$$

となる。また右辺は、合成関数の微分より

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{a^2+x^2} \cdot (a^2+x^2)' \\ &= \frac{1}{x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{a^2+x^2} \cdot 2x \\ &= \frac{1}{x} - \frac{3x}{a^2+x^2} \end{aligned}$$

となり、さらに通分すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\frac{x}{a^2+x^2} - \frac{3x}{a^2+x^2}} \\ &= \frac{1}{\frac{x(a^2+x^2) - 3x \cdot x}{a^2+x^2}} \\ &= \frac{a^2+x^2}{x(a^2+x^2) - 3x^2} \\ &= \frac{a^2+x^2}{x(a^2+x^2) - 3x^2} \\ &= \frac{a^2+x^2}{x(a^2+x^2) - 3x^2} \end{aligned}$$

となる。つまり

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{a^2 - 2x^2}{x(a^2 + x^2)}$$

となる。さらに両辺に y をかけて

$$y' = y \cdot \frac{a^2 - 2x^2}{x(a^2 + x^2)}$$

となる。ここで、 $y = \frac{x}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}$ より

$$y' = \frac{x}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}} \cdot \frac{a^2 - 2x^2}{x(a^2 + x^2)}$$

となるので、約分する。ここで、分母の $a^2 + x^2$ を $\sqrt{(a^2 + x^2)^2}$ と考える。したがって

$$y' = \frac{x}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}} \cdot \frac{a^2 - 2x^2}{x\sqrt{(a^2 + x^2)^2}}$$

と考えて約分すると

$$y' = \frac{\cancel{x}}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}} \cdot \frac{a^2 - 2x^2}{\cancel{x}\sqrt{(a^2 + x^2)^2}}$$

より

$$y' = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)^5}}$$

となる。

$$(6) \quad y = \sqrt[3]{\frac{(x+2)^4}{x^2(x^2+1)}}$$

解答

$$y' = -\frac{2(4x^2 - x + 2)}{3x(x^2 + 1)} \sqrt[3]{\frac{(x+2)}{x^2(x^2+1)}}$$

解説

両辺の絶対値をとると

$$\begin{aligned} |y| &= \left| \sqrt[3]{\frac{(x+2)^4}{x^2(x^2+1)}} \right| \\ &= \sqrt[3]{\frac{|x+2|^4}{|x|^2|x^2+1|}} \end{aligned}$$

となる。さらに、両辺の自然対数をとると、右辺は

$$\begin{aligned} & \log \sqrt[3]{\frac{|x+2|^4}{|x|^2|x^2+1|}} \\ &= \log \left\{ \frac{|x+2|^4}{|x|^2|x^2+1|} \right\}^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{3} \log \frac{|x+2|^4}{|x|^2|x^2+1|} \\ &= \frac{1}{3} \{ \log |x+2|^4 - \log |x|^2 - \log |x^2+1| \} \\ &= \frac{1}{3} \{ 4 \log |x+2| - 2 \log |x| - \log |x^2+1| \} \\ &= \frac{4}{3} \log |x+2| - \frac{2}{3} \log |x| - \frac{1}{3} \log |x^2+1| \end{aligned}$$

より

$$\log |y| = \frac{4}{3} \log |x+2| - \frac{2}{3} \log |x| - \frac{1}{3} \log |x^2+1|$$

となる。上式の両辺を x で微分すると左辺は

$$\frac{1}{y} \cdot y'$$

となる。また右辺は、合成関数の微分より

$$\begin{aligned} & \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x+2} \cdot (x+2)' - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot (x^2+1)' \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x+2} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x+2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} - \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{x^2+1} \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) \end{aligned}$$

となり、さらに通分すると

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2x(x^2+1) - (x+2)(x^2+1) - x^2(x+2)}{(x+2)x(x^2+1)} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{(2x^2+2x) - (x^3+2x^2+x+2) - (x^3+2x^2)}{(x+2)x(x^2+1)} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{-4x^2+x-2}{(x+2)x(x^2+1)} \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{4x^2-x+2}{(x+2)x(x^2+1)} \end{aligned}$$

となる。つまり

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{4x^2-x+2}{(x+2)x(x^2+1)}$$

となる。さらに両辺に y をかけて

$$y' = -\frac{2}{3} y \cdot \frac{4x^2-x+2}{(x+2)x(x^2+1)}$$

となる。ここで、 $y = \sqrt[3]{\frac{(x+2)^4}{x^2(x^2+1)}}$ より

$$y' = -\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{(x+2)^4}{x^2(x^2+1)}} \cdot \frac{4x^2-x+2}{(x+2)x(x^2+1)}$$

となるので、約分する。ここで、**分母の $x+2$ を $(\sqrt[3]{x+2})^3$ と考える。つまり、 $\sqrt[3]{x+2}$ を 3 個かけて $x+2$ になったと考える。すると、分子には $\sqrt[3]{x+2}$ が 4 個あり、分母には 3 個あるので、約分されて分子に 1 個残る。**したがって

$$y' = -\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{(x+2)^4}{x^2(x^2+1)}} \cdot \frac{4x^2-x+2}{\sqrt[3]{(x+2)^3}x(x^2+1)}$$

と考えて約分すると

$$y' = -\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{(x+2)^4}{x^2(x^2+1)}} \cdot \frac{4x^2-x+2}{\sqrt[3]{(x+2)^3}x(x^2+1)}$$

より

$$y' = -\frac{2(4x^2-x+2)}{3x(x^2+1)} \sqrt[3]{\frac{(x+2)}{x^2(x^2+1)}}$$

となる。

13 次の関数を微分せよ。

(1) $y = x^{x+1} \quad (x > 0)$

解答

$$y' = x^{x+1} \left(\log x + 1 + \frac{1}{x} \right)$$

解説

両辺は正であるから、両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log x^{x+1}$$

より

$$\log y = (x+1) \log x$$

両辺を x で微分すると、積の微分より

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (x+1)' \cdot \log x + (x+1) \cdot (\log x)'$$

となる。ここで、上式の右辺は

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= (x+1)' \cdot \log x + (x+1) \cdot (\log x)' \\ &= 1 \cdot \log x + (x+1) \cdot \frac{1}{x} \\ &= \log x + 1 + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

となる。ゆえに、

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \log x + 1 + \frac{1}{x}$$

より、両辺に y をかけて

$$y' = y \left(\log x + 1 + \frac{1}{x} \right)$$

となる。ここで、 $y = x^{x+1}$ であったから

$$y' = x^{x+1} \left(\log x + 1 + \frac{1}{x} \right)$$

となる。

(2) $y = x^{\sin x} \quad (x > 0)$

解答

$$y' = x^{\sin x} \left\{ (\cos x) \log x + \frac{\sin x}{x} \right\}$$

解説

両辺は正であるから、両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log x^{\sin x}$$

より

$$\log y = (\sin x) \log x$$

両辺を x で微分すると、積の微分より

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\sin x)' \cdot \log x + \sin x \cdot (\log x)'$$

となる。ここで、上式の右辺は

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= (\sin x)' \cdot \log x + \sin x \cdot (\log x)' \\ &= \cos x \cdot \log x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \\ &= (\cos x) \log x + \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

となる。ゆえに、

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\cos x) \log x + \frac{\sin x}{x}$$

より、両辺に y をかけて

$$y' = y \left\{ (\cos x) \log x + \frac{\sin x}{x} \right\}$$

となる。ここで、 $y = x^{\sin x}$ であったから

$$y' = x^{\sin x} \left\{ (\cos x) \log x + \frac{\sin x}{x} \right\}$$

となる。

(3) $y = x^{e^x} \quad (x > 0)$

解答

$$y' = x^{e^x} e^x \left(\log x + \frac{1}{x} \right)$$

解説

両辺は正であるから、両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log x^{e^x}$$

より

$$\log y = e^x \cdot \log x$$

両辺を x で微分すると、積の微分より

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (e^x)' \cdot \log x + e^x \cdot (\log x)'$$

となる。ここで、上式の右辺は

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= (e^x)' \cdot \log x + e^x \cdot (\log x)' \\ &= e^x \cdot \log x + e^x \cdot \frac{1}{x} \\ &= e^x \left(\log x + \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

となる。ゆえに、

$$\frac{1}{y} \cdot y' = e^x \left(\log x + \frac{1}{x} \right)$$

より、両辺に y をかけて

$$y' = y \cdot e^x \left(\log x + \frac{1}{x} \right)$$

となる。ここで、 $y = x^{e^x}$ であったから

$$y' = x^{e^x} e^x \left(\log x + \frac{1}{x} \right)$$

となる。

(4) $y = x^{\log x} \quad (x > 0)$

解答

$$y' = 2x^{\log x - 1} \log x$$

解説

両辺は正であるから、両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log x^{\log x}$$

より

$$\log y = \log x \cdot \log x$$

つまり

$$\log y = (\log x)^2$$

となる。両辺を x で微分すると、合成関数の微分より

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 2 \log x \cdot (\log x)'$$

となる。ここで、上式の右辺は

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= 2 \log x \cdot (\log x)' \\ &= 2 \log x \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{2 \log x}{x} \end{aligned}$$

となる。ゆえに、

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2 \log x}{x}$$

より、両辺に y をかけて

$$y' = y \cdot \frac{2 \log x}{x}$$

となる。ここで、 $y = x^{\log x}$ であったから

$$y' = x^{\log x} \cdot \frac{2 \log x}{x}$$

より $\frac{1}{x} = x^{-1}$ なので

$$y' = 2x^{\log x} x^{-1} \log x$$

から

$$y' = 2x^{\log x - 1} \log x$$

となる。

$$(5) \ y = (\sqrt{x})^x \quad (x > 0)$$

解答

$$y' = \frac{1}{2} (\sqrt{x})^x (\log x + 1)$$

解説

両辺は正であるから、両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log (\sqrt{x})^x$$

より

$$\log y = x \log \sqrt{x}$$

となる。ここで、 $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ より

$$\log y = \frac{1}{2} x \log x$$

となる。両辺を x で微分すると、積の微分より

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2} \{ (x)' \cdot \log x + x \cdot (\log x)' \}$$

となる。ここで、上式の右辺は

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \frac{1}{2} \{ (x)' \cdot \log x + x \cdot (\log x)' \} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\log x + 1) \end{aligned}$$

となる。ゆえに、

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2} (\log x + 1)$$

より、両辺に y をかけて

$$y' = y \cdot \frac{1}{2} (\log x + 1)$$

となる。ここで、 $y = (\sqrt{x})^x$ であったから

$$y' = \frac{1}{2} (\sqrt{x})^x (\log x + 1)$$

となる。

$$(6) \ y = (\sin x)^x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

解答

$$y' = (\sin x)^x \left\{ \log(\sin x) + \frac{x}{\tan x} \right\}$$

解説

両辺は正であるから、両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log (\sin)^x$$

より

$$\log y = x \log(\sin x)$$

となる。ここで両辺を x で微分すると、積の微分と合成関数の微分より

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (x)' \cdot \log(\sin x) + x \cdot \{ \log(\sin x) \}'$$

となる。ここで、上式の右辺は

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= (x)' \cdot \log(\sin x) + x \cdot \{ \log(\sin x) \}' \\ &= 1 \cdot \log(\sin x) + x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' \\ &= 1 \cdot \log(\sin x) + x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \\ &= \log(\sin x) + \frac{x \cos x}{\sin x} \\ &= \log(\sin x) + \frac{x}{\frac{\sin x}{\cos x}} \\ &= \log(\sin x) + \frac{x}{\tan x} \end{aligned}$$

となる。ゆえに、

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \log(\sin x) + \frac{x}{\tan x}$$

より、両辺に y をかけて

$$y' = y \cdot \left\{ \log(\sin x) + \frac{x}{\tan x} \right\}$$

となる。ここで、 $y = (\sin x)^x$ であったから

$$y' = (\sin x)^x \left\{ \log(\sin x) + \frac{x}{\tan x} \right\}$$

となる。

$$(7) \ y = (\log x)^x \quad (x > 1)$$

解答

$$y' = (\log x)^x \left\{ \log(\log x) + \frac{1}{\log x} \right\}$$

解説

両辺は正であるから、両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log (\log x)^x$$

より

$$\log y = x \log (\log x)$$

となる。ここで両辺を x で微分すると、積の微分と合成関数の微分より

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (x)' \cdot \log (\log x) + x \cdot \{\log (\log x)\}'$$

となる。ここで、上式の右辺は

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= (x)' \cdot \log (\log x) + x \cdot \{\log (\log x)\}' \\ &= 1 \cdot \log (\log x) + x \cdot \frac{1}{\log x} \cdot (\log x)' \\ &= \log (\log x) + x \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \log (\log x) + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \\ &= \log (\log x) + \frac{1}{\log x} \end{aligned}$$

となる。ゆえに、

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \log (\log x) + \frac{1}{\log x}$$

より、両辺に y をかけて

$$y' = y \cdot \left\{ \log (\log x) + \frac{1}{\log x} \right\}$$

となる。ここで、 $y = (\log x)^x$ であったから

$$y' = (\log x)^x \left\{ \log (\log x) + \frac{1}{\log x} \right\}$$

となる。

$$(8) \ y = (\tan x)^{\sin x} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

解答

$$y' = (\tan x)^{\sin x} \left\{ (\cos x) \log (\tan x) + \frac{1}{\cos x} \right\}$$

解説

両辺は正であるから、両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log (\tan x)^{\sin x}$$

より

$$\log y = (\sin x) \log (\tan x)$$

となる。ここで両辺を x で微分すると、積の微分と合成関数の微分より

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\sin x)' \cdot \log (\tan x) + \sin x \cdot \{\log (\tan x)\}'$$

となる。ここで、上式の右辺は

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= (\sin x)' \cdot \log (\tan x) + \sin x \cdot \{\log (\tan x)\}' \\ &= \cos x \cdot \log (\tan x) + \sin x \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot (\tan x)' \\ &= (\cos x) \log (\tan x) + \sin x \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= (\cos x) \log (\tan x) + \sin x \cdot \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= (\cos x) \log (\tan x) + \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= (\cos x) \log (\tan x) + \cancel{\sin x} \cdot \frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\sin x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= (\cos x) \log (\tan x) + \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

となる。ゆえに、

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\cos x) \log (\tan x) + \frac{1}{\cos x}$$

より、両辺に y をかけて

$$y' = y \cdot \left\{ (\cos x) \log (\tan x) + \frac{1}{\cos x} \right\}$$

となる。ここで、 $y = (\tan x)^{\sin x}$ であったから

$$y' = (\tan x)^{\sin x} \left\{ (\cos x) \log (\tan x) + \frac{1}{\cos x} \right\}$$

となる。