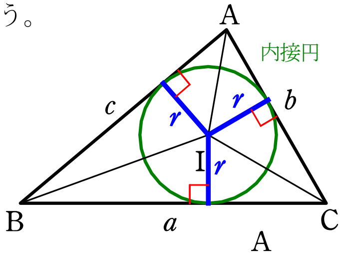
三角形の３辺に接する円を，その三角形の **内接円** という。

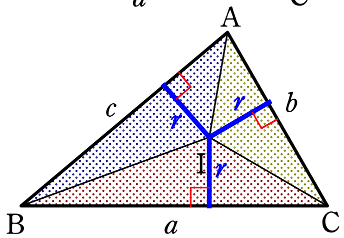
右の図のように，△ABC の内接円の中心を I とすると，△ABC は△IBC，△ICA，△IABに分けられる。

これらの面積の関係から

△ABC＝△IBC＋△ICA＋△IAB

が成り立つ。△ABC の内接円の半径を r とすると





△IBCの面積＝$\dfrac{1}{2}\times$(底辺BC)$\times$(高さr)＝$\dfrac{1}{2}\times a\times r=\dfrac{1}{2}ar$

△ICAの面積＝$\dfrac{1}{2}\times$(底辺CA)$\times$(高さr)＝$\dfrac{1}{2}\times b\times r=\dfrac{1}{2}br$

△IABの面積＝$\dfrac{1}{2}\times$(底辺AB)$\times$(高さr)＝$\dfrac{1}{2}\times c\times r=\dfrac{1}{2}cr$

よって，

△ABC＝△IBC＋△ICA＋△IAB

$$=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$$

$\frac{1}{2}r$ でくくる

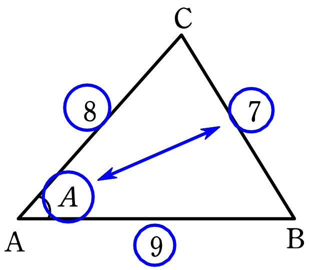
$$=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

したがって，次のことが成り立つ。

> **三角形の内接円と面積**
>
> △ABC の面積を S，△ABC の内接円の半径を r とするとき
>
> $$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

このことを利用して，3 辺の長さが $a=7$，$b=8$，$c=9$ である △ABC の内接円の半径 r を求めてみよう。△ABC の面積を S とすると，

余弦定理から



$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{8^2+9^2-7^2}{2\cdot8\cdot9}$$

$$=\frac{64+81-49}{2\cdot8\cdot9}=\frac{96}{2\cdot8\cdot9}=\frac{2}{3}$$

$\sin^2A+\cos^2A=1$ より $\cos A=\dfrac{2}{3}$ を代入して

$$\sin^2A+\left(\frac{2}{3}\right)^2=1$$

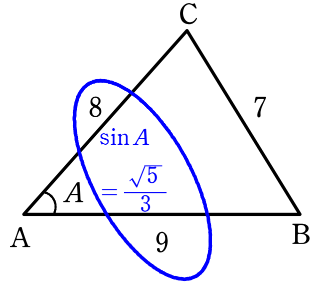
移項

$$\sin^2A=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

よって $\sin A=\pm\sqrt{\dfrac{5}{9}}=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$0°<A<180°$ より $\sin A>0$ であるから

$$\sin A=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

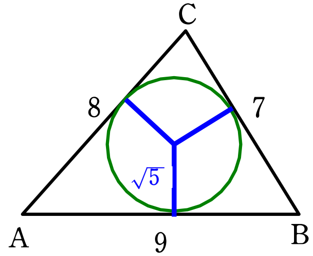


よって　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{\cancel{2}}\cdot\overset{4}{\cancel{8}}\cdot\overset{3}{\cancel{9}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\cancel{3}}=12\sqrt{5}$

公式 $S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$ から　　$12\sqrt{5}=\dfrac{1}{2}r(7+8+9)$

左辺と右辺を入れ替えて　$\dfrac{1}{2}r\times24=12\sqrt{5}$

よって　$12r=12\sqrt{5}$　より両辺12で割って　$r=\sqrt{5}$



練習1　3辺の長さが $a=5$，$b=7$，$c=8$ である △ABC について，次のものを求めよ。

(1)　△ABC の面積 S　　　(2)　内接円の半径 r

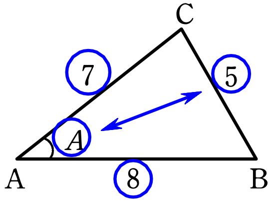
解答

(1)　余弦定理から

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{7^2+8^2-5^2}{2\cdot7\cdot8}$$

$$=\frac{49+64-25}{2\cdot7\cdot8}=\frac{\cancelto{11}{88}}{2\cdot7\cdot\cancel{8}}=\frac{11}{14}$$



$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ より $\cos A=\frac{11}{14}$ を代入して

$$\sin^2 A+\left(\frac{11}{14}\right)^2=1$$

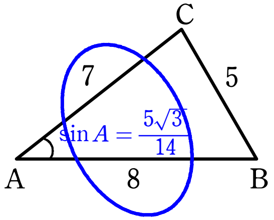
移項

$$\sin^2 A=1-\left(\frac{11}{14}\right)^2=1-\frac{121}{196}=\frac{75}{196}$$

よって $\sin A=\pm\sqrt{\frac{75}{196}}=\pm\frac{5\sqrt{3}}{14}$

$0°<A<180°$ より $\sin A>0$ であるから

$$\sin A=\frac{5\sqrt{3}}{14}$$



よって　$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{7}\cdot\cancelto{2}{8}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{\cancelto{2}{14}}=10\sqrt{3}$

別解　$2s=5+7+8$ とすると $s=\frac{5+7+8}{2}=\frac{20}{2}=10$

√の中を全部計算しないこと。
5·3·2 は10×3になるので，
この√の中は10が2個ある。

よって，ヘロンの公式から

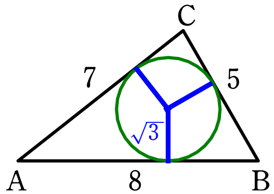
$$S=\sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)}=\sqrt{10\cdot5\cdot3\cdot2}=\sqrt{10^2\times3}=10\sqrt{3}$$

(2)　$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ と (1) の結果から

$$10\sqrt{3}=\frac{1}{2}r(5+7+8)$$

左辺と右辺を入れ替えて　$\frac{1}{2}r\times20=10\sqrt{3}$

よって　$10r=10\sqrt{3}$　より両辺10で割って　$r=\sqrt{3}$

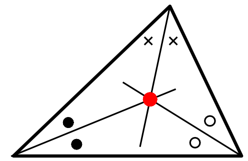


参考 ＜三角形の内心＞

三角形の内角の二等分線について，次の定理が成り立つ。

三角形の内角の二等分線

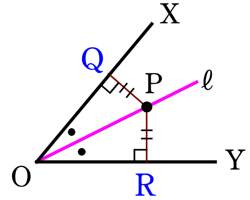
定理4　三角形の3つの内角の二等分線は1点で交わる。



定理4を証明するために，次のことを用いる。

∠XOY の二等分線 ℓ と点 P について，次が成り立つ。

点 P が ℓ 上にある ⟺ [点 P が2辺 OX，OY から等距離にある]

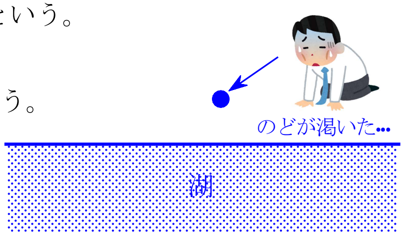


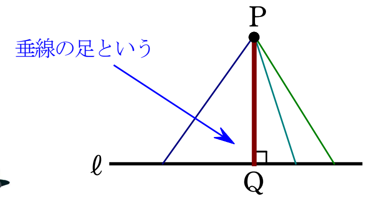
△OPQと△OPRが合同なのでPQ=PR

参考

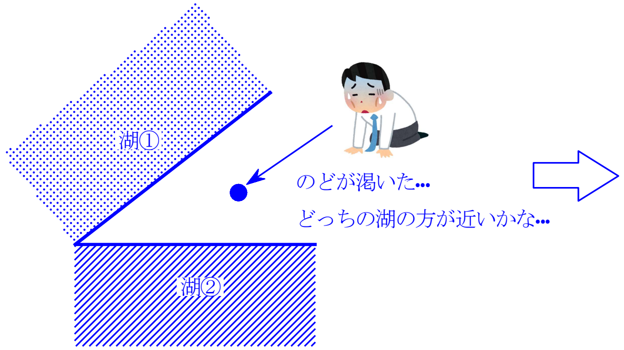
直線 ℓ と，ℓ 上にない点 P に対して，
P から ℓ に垂線を引き，ℓ との交点を Q と
するとき，Q を **垂線の足** という。
また，線分 PQ の長さを
点 P と直線 ℓ の距離 という。

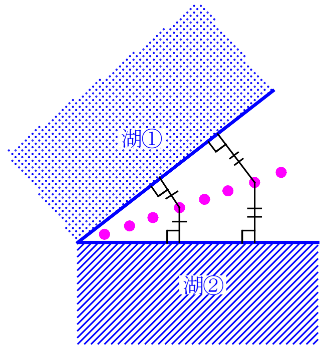
距離とは「最短距離」のことです





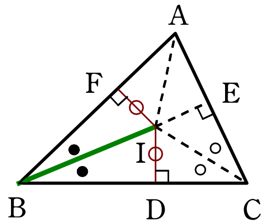
点 P と直線 ℓ の距離は，
P と ℓ 上の点を結ぶ線分のうち，
最も短いものの長さとなっている。



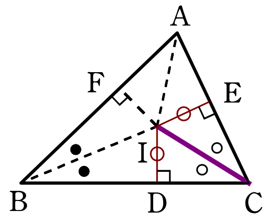


それぞれの湖に水を飲みに行くとき，
同じ距離になる点の集まり

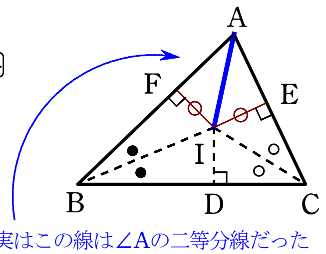
【定理４の証明】△ABC において，
∠B の二等分線と ∠C の二等分線の交点を
I とし，I から辺 BC，CA，AB に下ろした垂線を，
それぞれ ID，IE，IF とする。
I は ∠B の二等分線上の点であるので
IF＝ID　……①
が成り立つ。



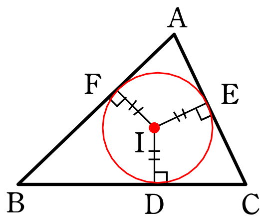
また I は ∠C の二等分線上の点であるので
IE＝ID　……②
が成り立つ。



よって①，②から IF＝IE となるので，
I は ∠A の二等分線上にもある。
したがって，
三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる。　終



上の証明により，次のことがいえる。
ID⊥BC，IE⊥CA，IF⊥AB
ID＝IE＝IF
よって，この点 I を中心とする半径 ID の円は，
△ABC の 3 辺に接する。



この円を △ABC の **内接円** といい，内接円の中心 I を △ABC の **内心** という。

三角形の内心は，3 つの内角の二等分線が交わる点である。