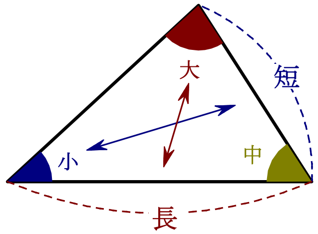
三角形の辺と角の大小関係について，

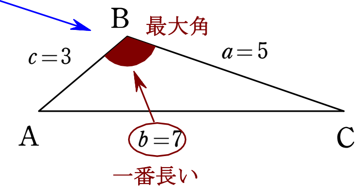
最大の辺に向かい合う角が最大である

ということが知られている。　次ページの参考参照



このことを用いて，３辺の長さが $a=5$，$b=7$，$c=3$ である △ABC の最大の角の大きさを求めてみよう。

b が最大の辺であるから，B が最大の角である。



余弦定理により

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot 3\cdot 5}$$

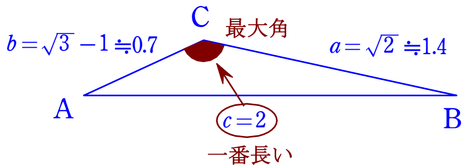
$$=\frac{9+25-49}{2\cdot 3\cdot 5}=\frac{-\cancel{15}}{2\cdot\cancel{3\cdot 5}}=-\frac{1}{2}$$

$\cos B=-\dfrac{1}{2}$ となる B は $B=120^\circ$

よって，最大の角の大きさは　$B=120^\circ$

練習１　３辺の長さが $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}-1$，$c=2$ である △ABC の，最大の角の大きさを求めよ。　$\sqrt{2}\fallingdotseq 1.4$　　$\sqrt{3}-1\fallingdotseq 1.7-1=0.7$

解答



c が最大の辺であるから，

C が最大の角である。

余弦定理により

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$

$$=\frac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-1)^2-2^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)}$$

$$=\frac{2+(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1^2-4}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$$

$$=\frac{2-2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$$

下の参考参照

分母に√があるので有理化する。ここで下の参考のように約分に気がつけばそっちの方が速いが，普通は気がつかない。

ただし，少なくとも2で割ることは気がついて欲しい。

2で約分

$$=\frac{\cancel{2}^{1}-\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}\sqrt{6}-\cancel{2}\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

有理化

$$=\frac{(1-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}\sqrt{6}-\sqrt{3}\sqrt{2}}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6-2}$$

$$=\frac{-2\sqrt{2}}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{(\sqrt{2})^{\cancel{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\sqrt{2}$ で約分

$\cos C=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となってびっくりしないこと。

$\sqrt{2}$ が出てくる角度は45°の倍数しかないので，

分母に $\sqrt{2}$ がいくように $\sqrt{2}$ で約分するとよい。

$\cos C=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる C は $C=135^\circ$

よって，最大の角の大きさは　　$C=135^\circ$

参考

$$\cos C=\frac{2-2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$$

$$=\frac{2(1-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$$

分子を因数分解する。さらに，

$1-\sqrt{3}$ と $\sqrt{3}-1$ は引き算の順番が逆なので，

$1-\sqrt{3}=-\sqrt{3}+1=-(\sqrt{3}-1)$

とするとと分母と同じものが現れて約分できる。

$$=\frac{-2(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$$

2で約分　　$\sqrt{3}-1$ で約分

$$=\frac{-\cancel{2}\cancel{(\sqrt{3}-1)}}{\cancel{2}\sqrt{2}\cancel{(\sqrt{3}-1)}}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\cos C=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる C は $C=135^\circ$

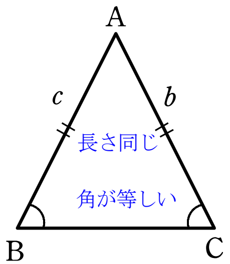
よって，最大の角の大きさは　　$C=135^\circ$

参考　△ABC の辺と角については，次が成り立つ。

$b=c \Longrightarrow \angle B=\angle C$

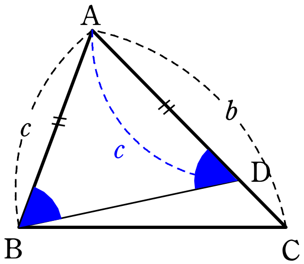
これは二等辺三角形の性質である。

この逆の「$\angle B=\angle C \Longrightarrow b=c$」も成り立つ。



△ABC において，次が成り立つ。

$b>c \Longrightarrow \angle B>\angle C$



【証明】

$b>c$ であるならば，辺 AC 上に AB＝AD となる点 D がとれる。

このとき，△ABD において

$\angle ABD=\angle ADB$

ここで，$\angle B>\angle ABD$，

∠Bは青＋● であるから，●の分だけ青よりも∠Bの方が大きい

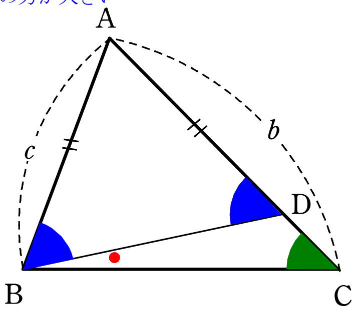
$\angle ADB>\angle C$ であるから

$\angle B>\angle ABD>\angle C$

したがって

$\angle B>\angle C$　終

「三角形の1つの外角はそれと隣り合わない2つの内角の和に等しい」ので，青は緑＋●である。よって，青は緑より●の分だけ大きい。



例 1 について，その逆「$\angle B>\angle C \Longrightarrow b>c$」も成り立つことが知られている。

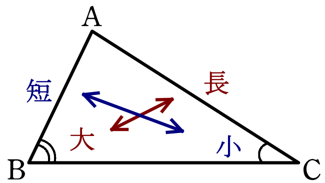
一般に，次のことが成り立つ。

三角形の辺と角の大小関係

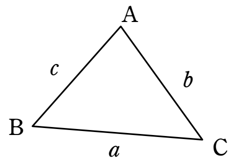
△ABC において

$b>c \Longleftrightarrow \angle B>\angle C$

三角形の 2 辺の大小関係は，その向かい合う角の大小関係と一致する。



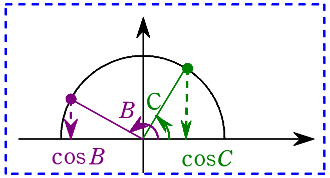
参考　△ABCにおいて，余弦定理より $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$



$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ である。

ここで，

角が大きい方が cosの値は小さくなる



$\angle B>\angle C \Leftrightarrow \cos B<\cos C$

$\Leftrightarrow \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}<\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

各辺に $2abc$ をかける。$2abc$ は正より不等号の向きは変わらない

$\Leftrightarrow b(c^2+a^2-b^2)<c(a^2+b^2-c^2)$

$\Leftrightarrow bc^2+ba^2-b^3<ca^2+b^2c-c^3$

全部左辺に移項

$\Leftrightarrow (ba^2-ca^2)+(bc^2-cb^2-b^3+c^3)<0$

a が次数が一番低いので，a について降べきの順に並べる

$\Leftrightarrow (b-c)a^2-(cb^2-bc^2)-(b^3-c^3)<0$

$b-c$ を出すために工夫

$\Leftrightarrow (b-c)a^2-bc(b-c)-(b-c)(b^2+bc+c^2)<0$

$\Leftrightarrow (b-c)\{a^2-bc-(b^2+bc+c^2)\}<0$

$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$ 覚えてますか？

$\Leftrightarrow (b-c)\{a^2-(b^2+2bc+c^2)\}<0$

$\Leftrightarrow (b-c)\{a^2-(b+c)^2\}<0$

$a^2-(\ )^2=\{a+(\ )\}\{a-(\ )\}$

$\Leftrightarrow (b-c)\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}<0$

3 つの括弧かけて負

a, b, c 全部正だから，この括弧は正

三角形の成立条件①より，$a<b+c$ が成り立たなければならないので，この括弧は負

３つの括弧を掛けて負にならなければいけないので，$(b-c)\times$ 正 $\times$ 負 ＝負

ゆえに $b-c$ は正でなければならない。

$\Leftrightarrow b-c>0$

$\Leftrightarrow b>c$

以上より $\angle B>\angle C \Leftrightarrow b>c$ が成り立つ。