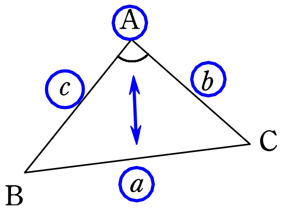
△ABC の面積 S を，3 辺の長さ a，b，c で表してみよう。



余弦定理から

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \cdots\cdots(\mathrm{I})$$

が成り立つ。

移項

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ より $\sin^2 A = 1-\cos^2 A$ として

(Ⅰ)を代入すると

$$\sin^2 A = 1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2$$

$$= 1-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{(2bc)^2}$$

通分

$X^2-Y^2=(X+Y)(X-Y)$

$2bc$ を X，$b^2+c^2-a^2$ を Y と考える。

$$= \frac{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{(2bc)^2}$$

$$= \frac{\{2bc+(b^2+c^2-a^2)\}\{2bc-(b^2+c^2-a^2)\}}{4b^2c^2}$$

分配法則

$-(b^2+c^2-a^2)$

$= -b^2-c^2+a^2$

$$= \frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{(b^2+2bc+c^2-a^2)(a^2-b^2+2bc-c^2)}{4b^2c^2}$$

マイナスでくくる

$-b^2+2bc-c^2$

$= -(b^2-2bc+c^2)$

$$= \frac{\{(b^2+2bc+c^2)-a^2\}\{a^2-(b^2-2bc+c^2)\}}{4b^2c^2}$$

$b^2+2bc+c^2=(b+c)^2$

$b^2-2bc+c^2=(b-c)^2$

$$= \frac{\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}}{4b^2c^2}$$

$X^2-Y^2=(X+Y)(X-Y)$

$(b+c)$ を X, a を Y と考える。

$X^2-Y^2=(X+Y)(X-Y)$

a を X, $(b-c)$ を Y と考える。

$$= \frac{\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}\times\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}}{4b^2c^2}$$

分配法則に注意

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)\times(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}$$

アルファベット順に

並べ替え

① ② ③ ④

$$= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)\times(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2} \cdots\cdots(\mathrm{II})$$

①

ここで，$a+b+c=2s$ とおく。

この s は小文字の s です。計算を楽にするために導入します。

なぜ $2s$ なのかというと，この方が公式が綺麗になるからです。

移項

すると $a+b+c=2s$ より $b+c=2s-a$ となるので，

②は $-a+b+c=-a+(2s-a)=2s-2a=2(s-a)$ となる。

同様に $a+b+c=2s$ より $a+b=2s-c$ となるので，

③は $a+b-c=(2s-c)-c=2s-2c=2(s-c)$ となる。

さらに $a+b+c=2s$ より $a+c=2s-b$ となるので，

④は $a-b+c=(a+c)-b=(2s-b)-b=2s-2b=2(s-b)$ となる。

以上より，(Ⅱ)に

①は $2s$，②は $2(s-a)$，③は $2(s-c)$，④は $2(s-b)$

を代入すると

$$\sin^2 A = \frac{2s\cdot 2(s-a)\times 2(s-c)\cdot 2(s-b)}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{\overset{4}{\cancel{16}}s(s-a)(s-b)(s-c)}{\cancel{4}b^2c^2} = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}$$

よって $\sin A = \pm\sqrt{\dfrac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}} = \pm\dfrac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$

4と b^2c^2 は√の外に出る

$0° < A < 180°$ より $\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc} \cdots\cdots(\mathrm{III})$$

△ABCの面積 S は公式より $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ であるので，この式に(Ⅲ)を代入して

$$S=\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{bc}\times\frac{\cancel{2}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{\cancel{bc}} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

以上から，次の **ヘロンの公式** が成り立つ。

$2s=a+b+c$ について，実際に使用するときは $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ として使います。s は三角形の周の長さの半分です。

> △ABC の面積 S は
>
> $2s=a+b+c$ **とすると**　　$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$a=7$，$b=8$，$c=9$

161 ページの例題 8 の △ABC の面積 S は，ヘロンの公式を用いると，次のように求められる。

$$2s=7+8+9 \text{ から } s=\frac{7+8+9}{2}=\frac{24}{2}=12$$

√の中を全部計算しないこと。

4·3 で12になるので，

この√の中は12が2個ある。

よって　$S=\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}=\sqrt{12\cdot 5\cdot 4\cdot 3}=\sqrt{12^2\times 5}=12\sqrt{5}$

練習1　3辺の長さが5，6，9である三角形の面積 S を求めよ。

解答

$2s=5+6+9$ とすると $s=\dfrac{5+6+9}{2}=\dfrac{20}{2}=10$

$\sqrt{\ }$ の中を全部計算しないこと。
$5\cdot4$ は10×2 になるので，
この$\sqrt{\ }$ の中は10が2個ある。

よって，ヘロンの公式から

$$S=\sqrt{10(10-5)(10-6)(10-9)}=\sqrt{10\cdot5\cdot4\cdot1}=\sqrt{10^2\times2}=10\sqrt{2}$$