空間図形に含まれる三角形に着目して，距離や面積を求めてみよう。

空間図形は「いくつかの平面図形がくっついただけ」と考えよう！

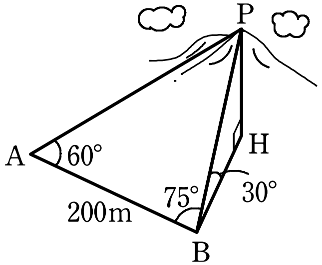
応用例題 4

200 m 離れた山のふもとの 2 地点 A と B から，山の頂上 P を見ると

$\angle PAB = 60°$，$\angle PBA = 75°$

であった。また，B から P を見上げた角度は 30° であった。右の図において，P と B の標高差 PH を求めよ。

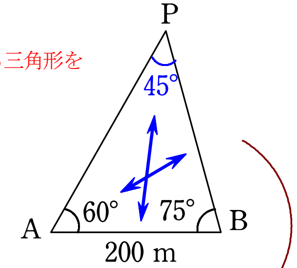
実際にも使えそうな方法ですね。30°は分度器で測れそうですし，60°や75°はその方向に腕を向ければ測れそうです。



考え方　図の直角三角形 BPH に着目すると，$PH = BP\sin 30°$ である。
そこで，まず BP の長さを求める。

解答　$\angle APB = 180° - (60° + 75°) = 45°$

角度が分かっている三角形を取り出して考える



△ABP に正弦定理を使うと

$$\frac{BP}{\sin 60°} = \frac{200}{\sin 45°}$$

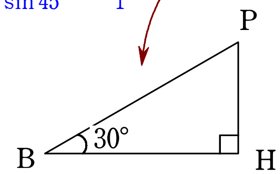
よって両辺に $\sin 60°$ をかけて

$$BP = 200 \times \frac{1}{\sin 45°} \times \sin 60° = \cancel{200}^{100} \times \frac{\sqrt{2}}{1} \times \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 100\sqrt{6}$$

$\frac{\sin 45°}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より $\frac{1}{\sin 45°} = \frac{\sqrt{2}}{1}$

また，直角三角形PHB において

$100\sqrt{6}$



$$\frac{PH}{PB} = \frac{高さ}{斜辺} = \sin 30°$$

両辺にPBをかけて

$$PH = BP\sin 30° = \cancel{100}^{50}\sqrt{6} \times \frac{1}{\cancel{2}} = 50\sqrt{6}$$

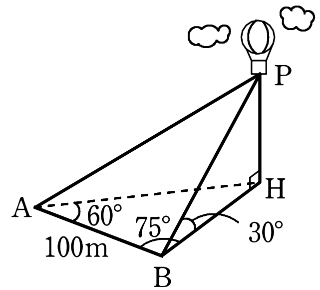
答　$50\sqrt{6}$ m

補足　$50\sqrt{6} = 122.4\cdots$ となり，PH はおよそ 122 m である。

練習 33　100 m 離れた 2 地点 A と B から，気球 P の真下で B と同じ標高の地点 H を見たとき，

$\angle HAB = 60°$，$\angle HBA = 75°$

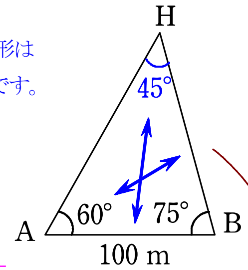
であった。また，B から P を見上げた角度は 30° であった。
右の図において，気球 P の高さ PH を求めよ。



解答

$\angle AHB = 180° - (60° + 75°) = 45°$

角度が分かっている三角形は△PABでなくて△HABです。



△ABH に正弦定理を使うと

$$\frac{BH}{\sin 60°} = \frac{100}{\sin 45°}$$

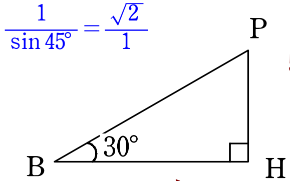
よって両辺に $\sin 60°$ をかけて

$$BH = 100 \times \frac{1}{\sin 45°} \times \sin 60° = \cancel{100}^{50} \times \frac{\sqrt{2}}{1} \times \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 50\sqrt{6}$$

$\frac{\sin 45°}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より $\frac{1}{\sin 45°} = \frac{\sqrt{2}}{1}$

また，直角三角形PHB において

$50\sqrt{6}$



$$\frac{PH}{BH} = \frac{高さ}{底辺} = \tan 30°$$

両辺にBHをかけると，求める気球の高さPHは

$$PH = BH\tan 30° = 50\sqrt{\cancel{6}} \times \frac{1}{\sqrt{\cancel{3}}} = 50\sqrt{2}$$

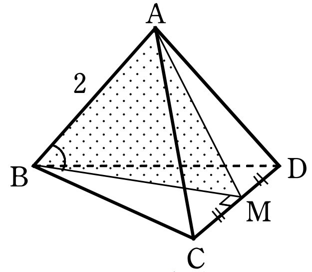
答　$50\sqrt{2}$ m

応用例題 5　封筒で正四面体を作ってみよう！

1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において，
辺 CD の中点を M とするとき，次のものを求めよ。

(1)　$\cos\angle ABM$ の値

(2)　$\triangle ABM$ の面積 S



すべての面が正三角形である
三角錐を**正四面体**といいます。

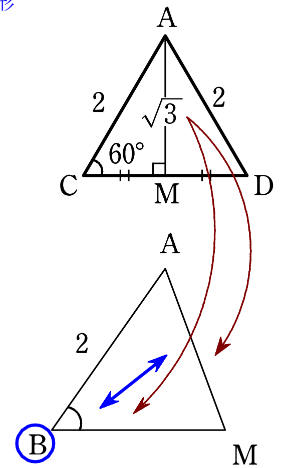
考え方　(1)　$\triangle ABM$ において，3 辺の長さから求める。

(2)　まず，$\sin\angle ABM$ の値を求める。

直角三角形ACMにおいて，$\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{高さ}{斜辺}=\sin 60^\circ$ より両辺にACをかけて

$AM=AC\sin 60^\circ$ としている。ただ，この直角三角形は$1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形

であるから，AC=2であるので$AM=\sqrt{3}$ となることはすぐに分かる。



$\boxed{解答}$　(1)　$AM=AC\sin 60^\circ=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

また，$\triangle ACD$における線分AMと
$\triangle BCD$における線分BMは同じ場所なので，
$BM=AM$ より　$BM=\sqrt{3}$ となる。
よって，$\triangle ABM$ に余弦定理を使うと

$$\cos\angle ABM=\frac{AB^2+BM^2-AM^2}{2\times AB\times BM}$$

$$=\frac{2^2+(\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}{2\times 2\times\sqrt{3}}$$

$$=\frac{4+3-3}{2\times 2\times\sqrt{3}}=\frac{\cancel{4}}{\cancel{2\times 2}\times\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2)　$\sin^2\angle ABM+\cos^2\angle ABM=1$ より(1)の結果を代入して

$$\sin^2\angle ABM+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=1$$　移項

$$\sin^2\angle ABM=1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

よって $\sin\angle ABM=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$0^\circ<\angle ABM<180^\circ$ より $\sin\angle ABM>0$ であるから　$\sin\angle ABM=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\times AB\times BM\times\sin\angle ABM=\dfrac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}\times\cancel{\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{3}}}=\sqrt{2}$

$\boxed{別解}$(ヘロンの公式)

V字約分

$2s=2+\sqrt{3}+\sqrt{3}$ とすると $s=\dfrac{2+\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\cancel{2}+\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}}=1+\sqrt{3}$

よって，ヘロンの公式から

$$S=\sqrt{(1+\sqrt{3})\{(1+\sqrt{3})-2\}\{(1+\sqrt{3})-\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{3})-\sqrt{3}\}}$$

$$=\sqrt{(1+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot 1\cdot 1}$$

$1+\sqrt{3}$ を $\sqrt{3}+1$ にする

$$=\sqrt{(\sqrt{3}+1)\cdot(\sqrt{3}-1)}$$

$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$

$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=(\sqrt{3})^2-1^2$

$$=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}$$

$$=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$$

参考

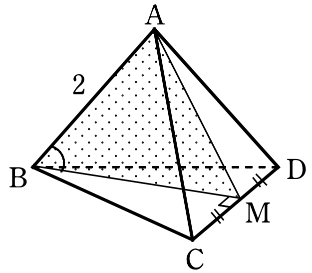
$\cos\angle ABM=\dfrac{AB^2+BM^2-AM^2}{2\times AB\times BM}$ について，

AMとBMは同じ長さなので

$\cos\angle ABM=\dfrac{AB^2+\overbrace{\cancel{BM^2}-\cancel{AM^2}}^{\text{同じ}}}{2\times AB\times BM}$

$=\dfrac{AB^{\cancel{2}}}{2\times \cancel{AB}\times BM}$ 約分 $=\dfrac{AB}{2BM}$ ……(※)

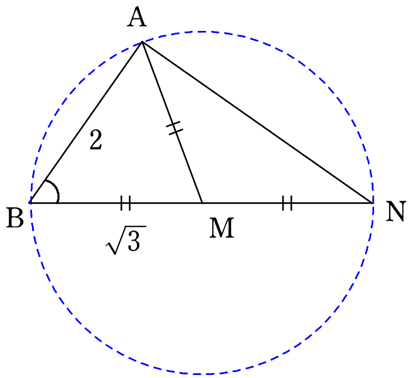
が成り立つ。



この式の図形的な意味を考えてみよう。

右図のように，BMの延長線上にBM＝MNとなる点Nをとる。BM＝AMであったので，AM＝BM＝MNが成り立つから，Mは3点 A，B，N を通る円の中心となる。

したがって，BNはこの円の直径となるから直径に対する円周角より∠BAN＝90°となる。



直角三角形ABNにおいて

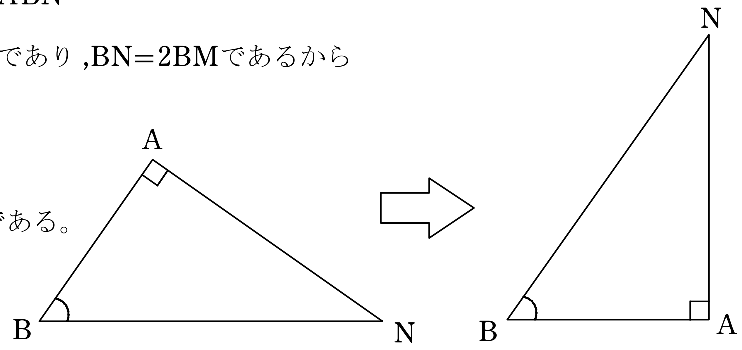
$\dfrac{AB}{BN}=\dfrac{\text{底辺}}{\text{斜辺}}=\cos\angle ABN$

∠ABNは∠ABMと同じであり，BN＝2BMであるから

$\dfrac{AB}{2BM}=\cos\angle ABM$

が成り立つ。

これが(※)の図形的意味である。



このことを用いると△ABMの面積を簡単に求められる。

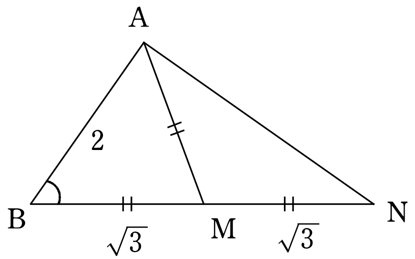
三平方の定理より $AB^2+AN^2=BN^2$ が成り立つ。

$BN=2BM=2\sqrt{3}$ より $2^2+AN^2=(2\sqrt{3})^2$

ゆえに $AN^2=(2\sqrt{3})^2-2^2=12-4=8$

$AN=\pm\sqrt{8}=\pm2\sqrt{2}$ であるが，AN>0より

$AN=2\sqrt{2}$ である。



したがって，直角三角形ABNの面積は

$\dfrac{1}{2}\times(\text{底辺}AB)\times(\text{高さ}AN)=\dfrac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ である。

BNを底辺と考えると，△ABMの高さと△AMNの高さは同じでありまたそれぞれの底辺もBMとMNで同じであるから，△ABMと△AMNの面積は等しい。つまり，△ABMの面積は△ABNの面積 $2\sqrt{2}$ の半分であるから

△ABMの面積は $2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}=\sqrt{2}$ である。

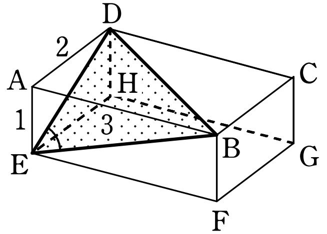
練習 34　右の図のように，

$AB=3,\ AD=2,\ AE=1$

である直方体 ABCD－EFGH がある。

(1)　$\cos\angle BED$ の値を求めよ。

(2)　$\triangle BED$ の面積 S を求めよ。



解答

(1)　$\triangle ADE$で三平方の定理により

$DE^2=AD^2+AE^2=2^2+1^2=4+1=5$

$DE=\pm\sqrt{5}$ で$DE>0$より $DE=\sqrt{5}$，

$\triangle ABE$で三平方の定理により

$EB^2=AB^2+AE^2=3^2+1^2=9+1=10$

$EB=\pm\sqrt{10}$ で$EB>0$より $EB=\sqrt{10}$，

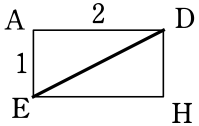
$\triangle ABD$で三平方の定理により

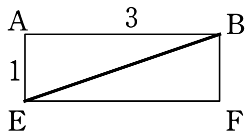
$BD^2=AB^2+AD^2=3^2+2^2=9+4=13$

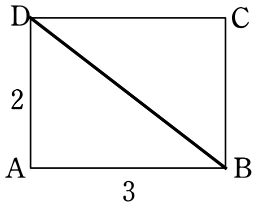
$BD=\pm\sqrt{13}$ で$BD>0$より $BD=\sqrt{13}$，

よって，$\triangle BDE$ の 3 辺の長さは

$\sqrt{5}$，$\sqrt{10}$，$\sqrt{13}$







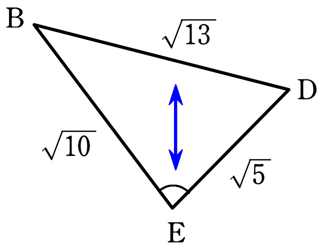
$\triangle BDE$ に余弦定理を使うと

$$\cos\angle BED=\frac{DE^2+BE^2-BD^2}{2\times DE\times BE}$$

$$=\frac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{10})^2-(\sqrt{13})^2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{10}}$$

$$=\frac{5+10-13}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{10}}$$

$$=\frac{\cancel{2}}{{}_{5}\cancel{10}\sqrt{2}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}$$



(2)　$\sin^2\angle BED+\cos^2\angle BED=1$ より(1)の結果を代入して

$$\sin^2\angle BED+\left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)^2=1$$ 移項

$$\sin^2\angle BED=1-\left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)^2=1-\frac{1}{50}=\frac{49}{50}$$

よって $\sin\angle BED=\pm\sqrt{\frac{49}{50}}=\pm\frac{7}{5\sqrt{2}}$

$0°<\angle BED<180°$ より $\sin\angle BED>0$ であるから　$\sin\angle BED=\frac{7}{5\sqrt{2}}$

よって　$S=\frac{1}{2}\times DE\times BE\times\sin\angle BED$

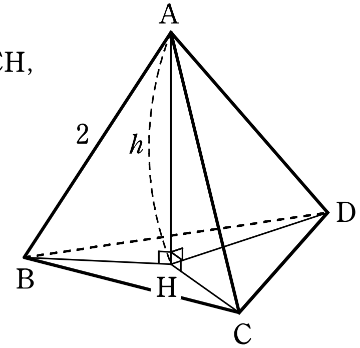
$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{10}\times\frac{7}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\times\cancel{5\sqrt{2}}\times\frac{7}{\cancel{5\sqrt{2}}}=\frac{7}{2}$$

■ 正四面体の体積

1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD の体積 V を求める。

次の $\boxed{}$ に適する数字 (0 ～ 9) を入れて，説明を完成させよう。

頂点 A から底面の正三角形 BCD に垂線 AH を下ろすと，
AH の長さは正四面体の高さ h に等しい。△ABH，△ACH，
△ADH はどれも斜辺が等しく AHが共通になるので
合同な直角三角形となるから，BH＝CH＝DH
である。よって，点 H は △BCD の外接円の中心で，
BH はその外接円の半径である。 R＝BDである。

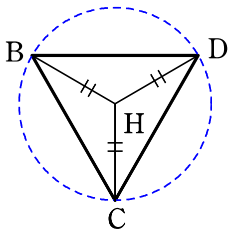


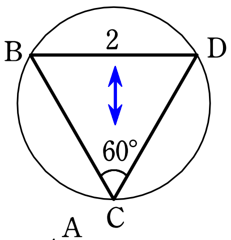
BH の長さを求めるには，△BCD に正弦定理を使って

$$\frac{BD}{\sin C}=2R \quad より \quad \frac{2}{\sin 60^\circ}=\boxed{2}\times BH$$

よって両辺2で割って

$$BH=\frac{2}{\boxed{2}\times\sin 60^\circ}=\frac{2}{\cancel{2}\times\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}=\frac{\boxed{2}}{\sqrt{3}}$$





また△ABHで三平方の定理により

移項

$$BH^2+AH^2=AB^2$$

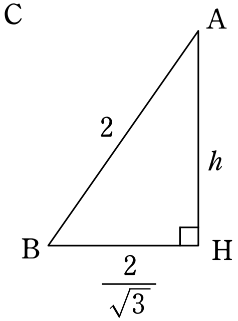
$$AH^2=AB^2-BH^2$$

よってAH>0より

$$h=AH=\sqrt{AB^2-BH^2}$$

$$=\sqrt{2^2-\left(\frac{\boxed{2}}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$=\sqrt{4-\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{2}}}{\sqrt{3}}$$



△BCD の面積 S は

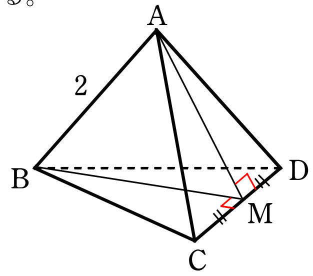
どっちも2

$$S=\frac{1}{2}\times BC\times CD\times\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\times\boxed{2}^2\times\sin 60^\circ=\frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2^2}\times\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}=\sqrt{\boxed{3}}$$

したがって
$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times\sqrt{\boxed{3}}\times\frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{2}}}{\sqrt{3}}=\frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{2}}$$

$\frac{1}{3}\times$(底面積)×(高さ)

また，前ページの応用例題 5 の結果を用いて求めることもできる。
正四面体 ABCD を角錐 CABM と角錐 DABM に分けると，
2 つの角錐は，底面の △ABM が共通で高さが等しいから，
体積が等しい。角錐 CABM について
△ABMを底面と考えると，AM⊥CM，BM⊥CM
であるから△ABM⊥CMが成り立つので，CMは高さになる。
したがって



2個分

$$V=\left(\frac{1}{3}\times\triangle ABM\times CM\right)\times\boxed{2}=\left(\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times 1\right)\times 2=\frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{3}}$$

$\frac{1}{3}\times$(底面積)×(高さ)