三角形の面積は，次の計算式で求められる。

$$(\text{三角形の面積})=\frac{1}{2}\times(\text{底辺})\times(\text{高さ})$$

(底辺)×(高さ)÷2

$=(\text{底辺})\times(\text{高さ})\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times(\text{底辺})\times(\text{高さ})$

ここでは，この計算式から三角比を使う面積の計算式を導いてみよう。

＜三角形の面積と正弦＞

△ABC において，辺 AB を底辺とするときの高さを h とする。図[1]では△ACDにおいて

$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AC}}=\frac{\text{高さ}}{\text{斜辺}}=\sin A$$

両辺にACをかけて　$\mathrm{CD}=\mathrm{AC}\sin A$

$\mathrm{CD}=h$, $\mathrm{AC}=b$ を代入して　$h=b\sin A$

同様に図[2]でも△ACDにおいて

$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AC}}=\frac{\text{高さ}}{\text{斜辺}}=\sin(180^\circ-A)$$

両辺にACをかけて　$\mathrm{CD}=\mathrm{AC}\sin(180^\circ-A)$

公式より $\sin(180^\circ-A)=\sin A$ となることと

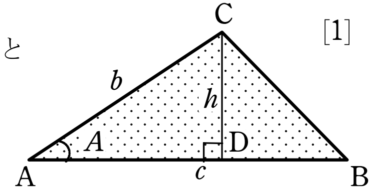
$\mathrm{CD}=h$, $\mathrm{AC}=b$ を代入して　$h=b\sin A$

となる。よって，△ABC の面積 S は，

次の式で表される。

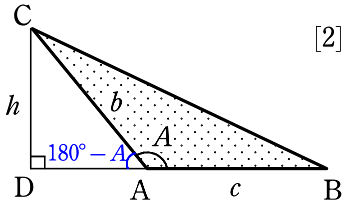
$$S=\frac{1}{2}\times(\text{底辺}c)\times(\text{高さ}h)=\frac{1}{2}\times c\times b\sin A$$

[1]



$h=b\sin A$

[2]

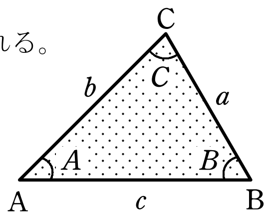


$h=b\sin(180^\circ-A)=b\sin A$

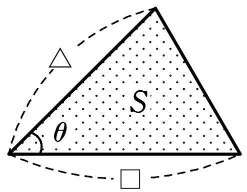
面積を S と表す理由はいくつかあります。一番有力なのはsumの頭文字のsです。なぜsum, つまり和なのかという理由は「数学Ⅲ」の教科書に載っています。他に領域という意味のsphereの頭文字などの説もあります。

一般に，三角形の面積について，次のことが成り立つ。

> **三角形の面積**
>
> 1つの角とその両隣の辺で計算できる
>
> △ABC の面積 S は，次の式で表される。
>
> $S=\frac{1}{2}bc\sin A$,　$S=\frac{1}{2}ca\sin B$,
>
> $S=\frac{1}{2}ab\sin C$



この公式では，「面積の S は sinのs」と覚えましょう。



$S=\frac{1}{2}\triangle\square\sin\theta$

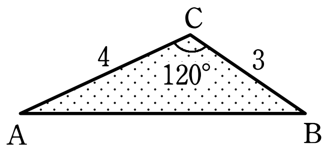
三角形の面積 S は，2 辺の長さとその間の角の大きさから求めることができる。

例 11　$a=3$，$b=4$，$C=120^\circ$ である △ABC の面積 S

簡単でいいので図を書きましょう

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\sin120^\circ$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot3\cdot\cancel{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}=3\sqrt{3}$$　終



練習 30　次のような △ABC の面積 S を求めよ。

(1)　$b=10$，$c=8$，$A=45^\circ$　　(2)　$a=6$，$c=5$，$B=150^\circ$

(3)　1 辺の長さが 4 の正三角形 ABC

解答

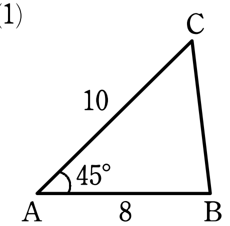
(1)　$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot10\cdot8\sin45^\circ$

$=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancelto{5}{10}\cdot8\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

面積は有理化します

$=\frac{40}{\sqrt{2}}=\frac{40\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{\cancelto{20}{40}\sqrt{2}}{\cancel{2}}=20\sqrt{2}$

(1)

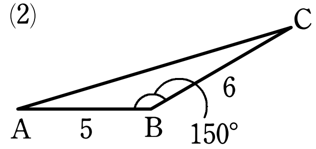


(2)　$S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}\cdot5\cdot6\sin150^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\cancelto{3}{6}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}$

$=\frac{15}{2}$

(2)

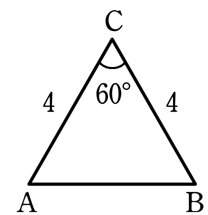


(3)　$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot4\cdot4\sin60^\circ$

$=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{4}\cdot4\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$

$=4\sqrt{3}$

(3)



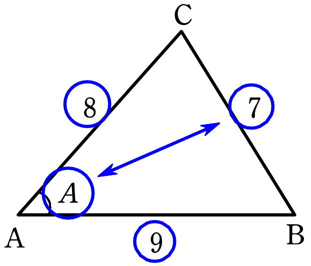
＜三角形の３辺の長さと面積＞

例題 8(超大事)　△ABC において，3 辺の長さが $a=7$，$b=8$，$c=9$ であるとき，次のものを求めよ。

(1)　$\cos A$ の値　　(2)　$\sin A$ の値　　(3)　△ABC の面積 S

解答　(1)　余弦定理から

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$=\frac{8^2+9^2-7^2}{2\cdot 8\cdot 9}$$
$$=\frac{64+81-49}{2\cdot 8\cdot 9}=\frac{96}{2\cdot 8\cdot 9}\overset{\text{約分}}{=}\frac{2}{3}$$



(2)　$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ より(1)の結果を代入して

$$\sin^2 A+\left(\frac{2}{3}\right)^2=1$$　移項

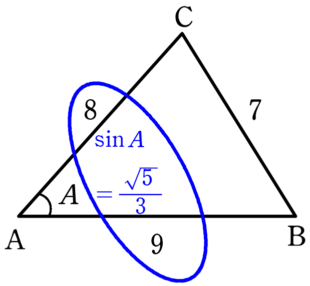
$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$
という公式はこの公式を変形したものです。

$$\sin^2 A=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

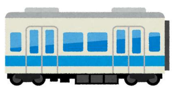
よって $\sin A=\pm\sqrt{\dfrac{5}{9}}=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$0^\circ<A<180^\circ$ より $\sin A>0$ であるから

$$\sin A=\frac{\sqrt{5}}{3}$$



(3)　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{\cancel{2}}\cdot\overset{4}{\cancel{8}}\cdot\overset{3}{\cancel{9}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\cancel{3}}=12\sqrt{5}$



$a,b,c\xrightarrow{\text{余弦定理}}\cos A\xrightarrow{\sin^2 A+\cos^2 A=1}\sin A\xrightarrow{\text{面積の公式}}$ 面積 S

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$　　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

参考 後で習う「ヘロンの公式」を使うと，一気に面積まで求められます。

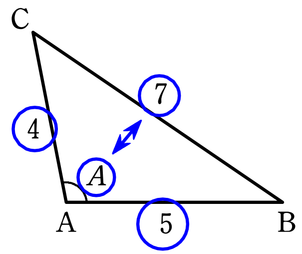
練習 31　△ABC において，3 辺の長さが $a=7$，$b=4$，$c=5$ であるとき，次のものを求めよ。

(1)　$\cos A$ の値　　(2)　$\sin A$ の値　　(3)　△ABC の面積 S

解答

(1)　余弦定理から

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$=\frac{4^2+5^2-7^2}{2\cdot 4\cdot 5}$$
$$=\frac{16+25-49}{2\cdot 4\cdot 5}=\frac{-8}{2\cdot 4\cdot 5}\overset{\text{約分}}{=}-\frac{1}{5}$$



(2)　$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ より(1)の結果を代入して

$$\sin^2 A+\left(-\frac{1}{5}\right)^2=1$$　移項

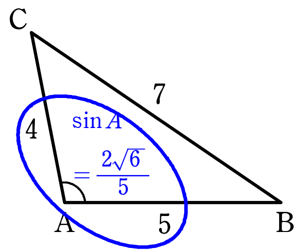
$\left(-\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$

$$\sin^2 A=1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2=1-\frac{1}{25}=\frac{24}{25}$$

よって $\sin A=\pm\sqrt{\dfrac{24}{25}}=\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

$0^\circ<A<180^\circ$ より $\sin A>0$ であるから

$$\sin A=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$



(3)　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{\cancel{2}}\cdot\overset{2}{\cancel{4}}\cdot\cancel{5}\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{\cancel{5}}=4\sqrt{6}$

練習 32　3 辺の長さが $a=2$，$b=3$，$c=4$ である △ABC の面積 S を求めよ。

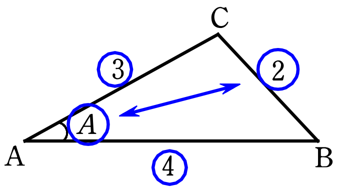
解答

余弦定理から

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{3^2+4^2-2^2}{2\cdot3\cdot4}$$

$$=\frac{9+16-4}{2\cdot3\cdot4}=\frac{21}{2\cdot3\cdot4}\overset{\text{約分}}{=}\frac{7}{8}$$

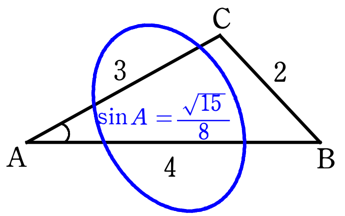


$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ に $\cos A=\dfrac{7}{8}$ を代入して

$$\sin^2 A+\left(\frac{7}{8}\right)^2=1$$

移項

$$\sin^2 A=1-\left(\frac{7}{8}\right)^2=1-\frac{49}{64}=\frac{15}{64}$$



よって $\sin A=\pm\sqrt{\dfrac{15}{64}}=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

$0°<A<180°$ より $\sin A>0$ であるから

$$\sin A=\frac{\sqrt{15}}{8}$$

よって　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot\cancel{4}\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{\cancel{8}_{2}}=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$