

与えられた辺や角の条件を満たす三角形の形状を調べよう。

＜三角形の辺と角の決定＞

応用例題2

△ABCにおいて、 $a=2$ 、 $b=\sqrt{3}+1$ 、 $C=60^\circ$ のとき、残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

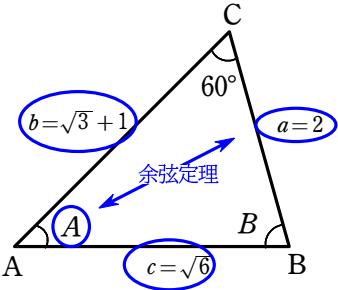
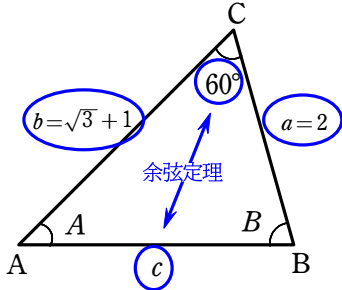
考え方 余弦定理により、 c 、 A が求められる。
 B は $B=180^\circ-(A+C)$ から求められる。

【解答】 余弦定理により

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \\ &= 2^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}+1) \cdot \cos 60^\circ \\ &= 4 + (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1^2 - 4(\sqrt{3}+1) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 4 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 2(\sqrt{3}+1) \\ &= 4 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{3} - 2 = 6 \\ c &= \pm\sqrt{6} \text{ であるが, } c > 0 \text{ であるから } c = \sqrt{6} \end{aligned}$$

余弦定理により 下の補足と注意参照

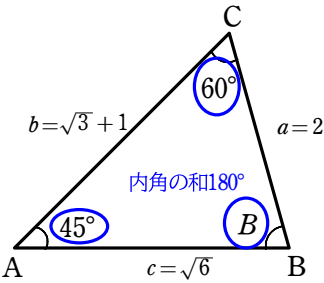
$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{6})^2 - 2^2}{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{6}} \\ &= \frac{(\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1^2 + 6 - 4}{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{6}} \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1 + 6 - 4}{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{6}} \\ &= \frac{6 + 2\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{6}} \\ &= \frac{\cancel{2}\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\cancel{2}(\sqrt{3}+1)\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$



分母の $\sqrt{3}+1$ をどうするか。有理化してもよいが、 A が有名な角度で出てくるので、 $\cos A$ は見たことがある分数になるはずである。よって分子を因数分解すると $\sqrt{3}+1$ が出てくるのではないかと考える。

$$\begin{aligned} &= 2(3+\sqrt{3}) \quad \sqrt{3} \text{ でくくる。} \\ &= 2(\sqrt{3})^2 + \sqrt{3} \cdot 1 \quad \text{普通は気がつかない。} \\ &= 2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1) \end{aligned}$$

$\cos A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす A は $0^\circ < A < 180^\circ$ より $A = 45^\circ$
したがって $B = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$
答 $c = \sqrt{6}$ 、 $A = 45^\circ$ 、 $B = 75^\circ$



【補足】 c を求めた後で、 A を求めるのに正弦定理を用いる方法もある。

正弦定理により $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$
よって $\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin A}$
両辺に $\sin A$ をかけて $\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} \times \sin A = 2$
両辺に $\sin 60^\circ$ をかけて $\sqrt{6} \times \sin A = 2 \times \sin 60^\circ$
両辺を $\sqrt{6}$ で割って

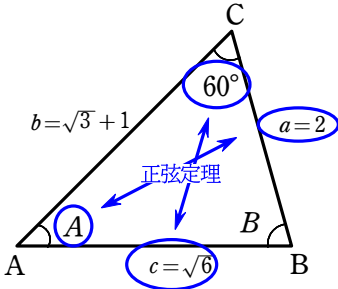
$$\sin A = \frac{2 \times \sin 60^\circ}{\sqrt{6}} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる A は $0^\circ < A < 180^\circ$ より $A = 45^\circ$ 、 135° であるが、
 $A + B + C = 180^\circ$ 、 $C = 60^\circ$ より、 $A = 135^\circ$ は不適となる。
 $A = 135^\circ$ 、 $C = 60^\circ$ だと内角の和 180° を超えてしまう。

正弦定理を用いると角度が2個出てくるが、余弦定理だと角度は1つしか出てこない。
ただし、余弦定理は2乗の計算が出てくるのでちょっと計算が大変である。

【注意】

この問題はトラップがある有名な問題です。 $c = \sqrt{6}$ を求めた後に A を求めています
が、 B を求めてはいけませんか？そこで B を求めにいくとトラップにひっかかります。
試しにやってみましょう。正弦定理を使ってみます。



正弦定理により $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$

よって $\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sin B}$

両辺に $\sin B$ をかけて $\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} \times \sin B = \sqrt{3}+1$

両辺に $\sin 60^\circ$ をかけて $\sqrt{6} \times \sin B = (\sqrt{3}+1) \times \sin 60^\circ$

両辺を $\sqrt{6}$ で割って

$$\begin{aligned}\sin B &= (\sqrt{3}+1) \times \sin 60^\circ \div \sqrt{6} \\ &= (\sqrt{3}+1) \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{6}} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+1) \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2} + 1 \times \sqrt{2}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$\sin B = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ となる B は...?

次の教科書「数学Ⅱ」の内容を用いれば、ここから $B=75^\circ$ と出てきますが今の段階では無理なので、ここで行き止まりです。余弦定理を用いて B を

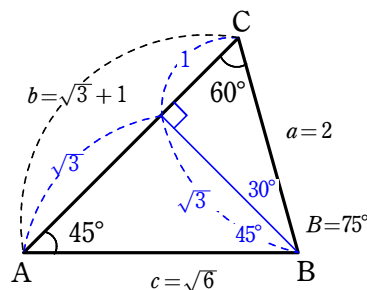
求めにいつても行き止まりです。 $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ や $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ が出てきたら

トラップに引っかかったと思ってください。引っかからない方法としては

$\sqrt{3}+1$ などの対角を求めに行くのは止めておくことです。

参考

今回の問題は2種類の三角定規をくっつけただけです。三角形のすべての角の大きさと辺の長さが出てくる問題は、三角定規を組み合わせでできた図形が多いです。



練習 28 $\triangle ABC$ において、 $a=\sqrt{2}$ 、 $c=\sqrt{3}+1$ 、 $B=45^\circ$ のとき、残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

解答

余弦定理により

$$\begin{aligned}b^2 &= c^2 + a^2 - 2ac \cos B \\ &= (\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{3}+1) \cdot \sqrt{2} \cos 45^\circ \\ &= (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1^2 + 2 - 2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 3 + 2\sqrt{3} + 1 + 2 - 2(\sqrt{3}+1) \\ &= 3 + 2\sqrt{3} + 1 + 2 - 2\sqrt{3} - 2 = 4\end{aligned}$$

$b = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ であるが、 $b > 0$ であるから $b = 2$

余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{2^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \cdot 2(\sqrt{3}+1)} \\ &= \frac{4 + (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1^2 - 2}{4(\sqrt{3}+1)} \\ &= \frac{4 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 2}{4(\sqrt{3}+1)} \\ &= \frac{6 + 2\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}+1)} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす A は $0^\circ < A < 180^\circ$ より $A = 30^\circ$

したがって $C = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$

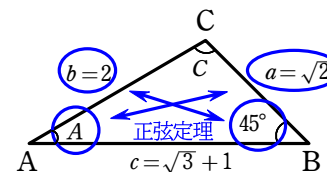
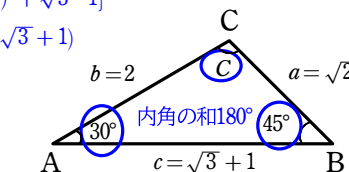
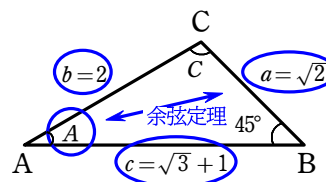
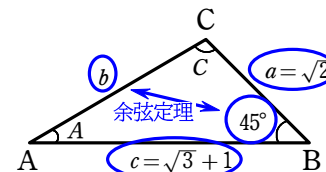
答 $b = 2$ 、 $A = 30^\circ$ 、 $C = 105^\circ$

補足

正弦定理により $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

よって $\frac{\sqrt{2}}{\sin A} = \frac{2}{\sin 45^\circ}$

両辺に $\sin A$ をかけて $\sqrt{2} = \frac{2}{\sin 45^\circ} \times \sin A$



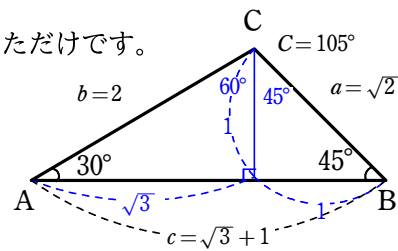
両辺に $\sin 45^\circ$ をかけて $\sqrt{2} \times \sin 45^\circ = 2 \times \sin A$
 左辺と右辺を入れ替えて $2 \times \sin A = \sqrt{2} \times \sin 45^\circ$
 両辺を2で割って

$$\sin A = \frac{\sqrt{2} \times \sin 45^\circ}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{1}{2}$$

$\sin A = \frac{1}{2}$ となる A は $0^\circ < A < 180^\circ$ より $A = 30^\circ, 150^\circ$ であるが,
 $A + B + C = 180^\circ, B = 45^\circ$ より, $A = 150^\circ$ は不適となる。
 $A = 150^\circ, B = 45^\circ$ だと内角の和 180° を超えてしまう。

参考

この問題は2種類の三角定規をくっつけただけです。



研究

○と△と□に, 足して 180° となる角を入れましょう。
 教科書後ろの表を見て, $\sin \bigcirc : \sin \triangle : \sin \square$ を簡単な比で表しましょう。
 (表の値をそのまま使うと大変なので, 小数第3位を四捨五入しましょう)

例 ○ = 50° , △ = 60° , □ = 70° とすると

$$\begin{aligned} \sin \bigcirc : \sin \triangle : \sin \square &= \sin 50^\circ : \sin 60^\circ : \sin 70^\circ \\ &\approx 0.7660 : 0.866 : 0.9397 \\ &\approx 0.77 : 0.87 : 0.94 \\ &= 77 : 87 : 94 \end{aligned}$$

同じようには見えない...

これって, ○ : △ : □ と同じ比になっていますか?

$$\bigcirc : \triangle : \square = 50^\circ : 60^\circ : 70^\circ = 5 : 6 : 7 = \frac{5}{5} : \frac{6}{5} : \frac{7}{5} = 1 : 1.2 : 1.4 = 77 : (77 \times 1.2) : (77 \times 1.4)$$

5で割る 92.4 107.8
77倍する

152 ページの正弦定理の関係式

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

を比の形で書くと,

$a : \sin A = b : \sin B = c : \sin C$ となる。

この比の関係を, 次のように書くこともできる。

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

なお, 正弦定理より 3つ以上の比を連比という

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \text{ で両辺に } \sin A \text{ をかけて}$$

$$a = 2R \sin A \text{ が成り立つ。}$$

他も同様で $b = 2R \sin B, c = 2R \sin C$ も成り立つ。

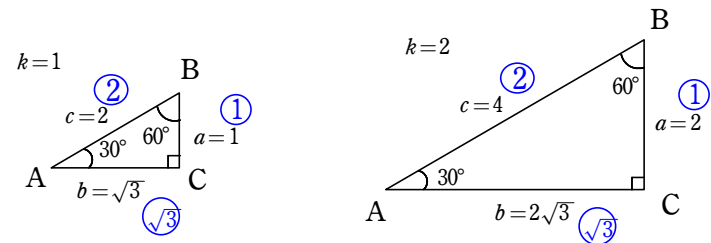
ゆえに

$$a : b : c = 2R \sin A : 2R \sin B : 2R \sin C = \sin A : \sin B : \sin C$$

と求めても良い。

つまり, 三角形の3辺の長さの比と3つの角の正弦の比は等しい。

参考



$A = 30^\circ, B = 60^\circ, C = 90^\circ$ のときを考えると

$$A : B : C = 30^\circ : 60^\circ : 90^\circ = 1 : 2 : 3$$

$$\sin A : \sin B : \sin C = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 = 1 : \sqrt{3} : 2$$

$$a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2$$

同じ

となる。よって $\sin A : \sin B : \sin C$ は $A : B : C$ でなく, $a : b : c$ に等しい。

~~$\sin A : \sin B : \sin C = A : B : C$~~ ではない。

例 $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ が成り立つ

(結局全部 $\frac{1}{2}$ である)。

これを比の形で書くと

$$1:2=3:6=4:8$$

と書くこともできる

(分子:分母はどの分数でも同じ)。

また,

$$1:3:4=2:6:8$$

と, 分子どうし 分母どうしを

並べた比で書くこともできる。

応用例題 3

△ABC において次の等式が成り立つとき、 A を求めよ。

$$\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 3$$

考え方 与えられた等式から、3 辺の長さ a, b, c の比を求める。

3 辺の長さの比がわかれば、 A は余弦定理から求められる。

解答 正弦定理により

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

が成り立つから

$$a : b : c = 7 : 5 : 3$$

となる。このとき、正の数 k を用いて

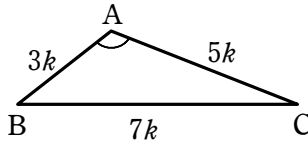
$$a = 7k, b = 5k, c = 3k$$

と表すことができる。

余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{(5k)^2 + (3k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 5k \cdot 3k} \\ &= \frac{25k^2 + 9k^2 - 49k^2}{30k^2} = \frac{-15k^2}{30k^2} = -\frac{1}{2} \\ \cos A &= -\frac{1}{2} \text{ となる } A \text{ は } 0^\circ < A < 180^\circ \text{ より } A = 120^\circ \end{aligned}$$

補足 $a : b : c = 7 : 5 : 3$ である △ABC では、三角形の大きさに関係なく、常に $A = 120^\circ$ となる。



$a=7, b=5, c=3$ でなくても
 $a=14, b=10, c=6$ でもよいので
 k を用いて a, b, c を表す。

参考

余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ &= \frac{(3k)^2 + (7k)^2 - (5k)^2}{2 \cdot 3k \cdot 7k} \\ &= \frac{9k^2 + 49k^2 - 25k^2}{42k^2} = \frac{33k^2}{42k^2} = \frac{11}{14} \end{aligned}$$

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1 \text{ に代入して } \sin^2 B + \left(\frac{11}{14}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 B = 1 - \left(\frac{11}{14}\right)^2 = 1 - \frac{121}{196} = \frac{75}{196}$$

$$\text{よって } \sin B = \pm \sqrt{\frac{75}{196}} = \pm \frac{5\sqrt{3}}{14} \text{ であり,}$$

$$0^\circ < B < 180^\circ \text{ より } \sin B > 0 \text{ であるから } \sin B = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

同様に、余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{(7k)^2 + (5k)^2 - (3k)^2}{2 \cdot 7k \cdot 5k} \\ &= \frac{49k^2 + 25k^2 - 9k^2}{70k^2} = \frac{65k^2}{70k^2} = \frac{13}{14} \end{aligned}$$

$$\sin^2 C + \cos^2 C = 1 \text{ に代入して } \sin^2 C + \left(\frac{13}{14}\right)^2 = 1$$

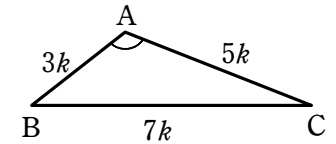
$$\sin^2 C = 1 - \left(\frac{13}{14}\right)^2 = 1 - \frac{169}{196} = \frac{27}{196}$$

$$\text{よって } \sin C = \pm \sqrt{\frac{27}{196}} = \pm \frac{3\sqrt{3}}{14} \text{ であり,}$$

$$0^\circ < C < 180^\circ \text{ より } \sin C > 0 \text{ であるから } \sin C = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

$$\text{以上より } \sin A : \sin B : \sin C = \sin 120^\circ : \frac{5\sqrt{3}}{14} : \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{5\sqrt{3}}{14} : \frac{3\sqrt{3}}{14} \stackrel{14\text{倍}}{=} 7\sqrt{3} : 5\sqrt{3} : 3\sqrt{3} \stackrel{\sqrt{3}\text{で割る}}{=} 7 : 5 : 3$$



$a=7k, b=5k, c=3k$ なら、
確かに $\sin A : \sin B : \sin C$ は
 $7 : 5 : 3$ となっている。

練習 29 $\triangle ABC$ において次の等式が成り立つとき、 B を求めよ。

$$\sin A : \sin B : \sin C = 8 : 7 : 3$$

解答

正弦定理により

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

が成り立つから、

$$a : b : c = 8 : 7 : 3 \text{ となる。}$$

このとき、正の数 k を用いて

$$a = 8k, \quad b = 7k, \quad c = 3k \text{ と表すことができる。}$$

余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ &= \frac{(3k)^2 + (8k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 3k \cdot 8k} \\ &= \frac{9k^2 + 64k^2 - 49k^2}{48k^2} = \frac{\cancel{24k^2}}{\cancel{48k^2}^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\cos B = \frac{1}{2} \text{ となる } B \text{ は } 0^\circ < B < 180^\circ \text{ より } B = 60^\circ$$

