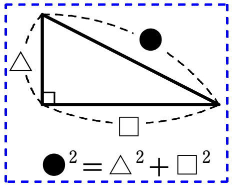
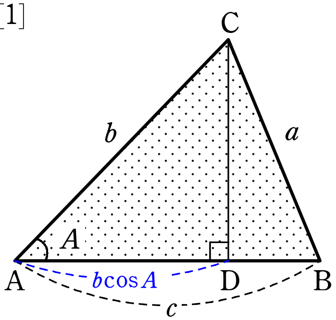
直角三角形においては，3 辺の長さの間に三平方の定理が成り立つ。ここでは，一般の三角形において 3 辺の長さの間に成り立つ関係を調べよう。



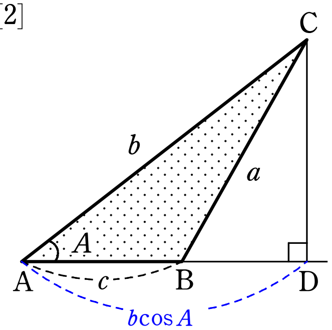
＜余弦定理＞

下の図 [1]，[2] のように，△ABC の A が鋭角の場合について調べる。
△ABC の頂点 C から辺 AB またはその延長に垂線 CD を下ろす。

[1]



[2]



上の図 [1]，[2] では，いずれの場合にも次が成り立つ。

$BC^2=CD^2+BD^2$ ……①， ← 三平方の定理

直角三角形△ACD において

$$\frac{CD}{AC}=\frac{高さ}{斜辺}=\sin A$$

両辺にACをかけて $CD=AC\sin A$

$AC=b$ より $CD=b\sin A$ ……②，

同様に，直角三角形△ACD において

$$\frac{AD}{AC}=\frac{底辺}{斜辺}=\cos A$$

両辺にACをかけて $AD=AC\cos A$

$AC=b$ より $AD=b\cos A$，

また，$BD=AB-AD=c-b\cos A$ ……③

図 [2] では
$BD=AD-AB=b\cos A-c$ であるが，
2乗すると
$BD^2=(b\cos A-c)^2$
$=(-c+b\cos A)^2$
$=\{-(c-b\cos A)\}^2$
$=\{(-1)\times(c-b\cos A)\}^2$
$=(-1)^2\times(c-b\cos A)^2$
$=(+1)\times(c-b\cos A)^2$
$=(c-b\cos A)^2$
より同じになる。

ゆえに，BC^2 すなわち a^2 は①に②，③を代入することで次のように表される。

$a^2=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2$

$=b^2\sin^2 A+c^2-2bc\cos A+b^2\cos^2 A$

$=b^2(\sin^2 A+\cos^2 A)+c^2-2bc\cos A$ ← $\sin^2 A+\cos^2 A=1$

$=b^2+c^2-2bc\cos A$

このことは，△ABC の A が直角の場合にも，成り立つ。

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos 90^\circ$ となり，$\cos 90^\circ=0$ であるから，この式で $2bc\cos 90^\circ$ の部分は消えてしまう。
ゆえに，$a^2=b^2+c^2$ が成り立つ。これは，$A=90^\circ$ のときに三平方が成り立つと言っているだけである。
つまり三平方の定理は余弦定理の一部である。

練習 23　右の図 [3] のように，A が鈍角の場合にも

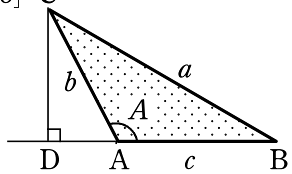
$BC^2=CD^2+BD^2$,

$CD^2=(b\sin A)^2$,

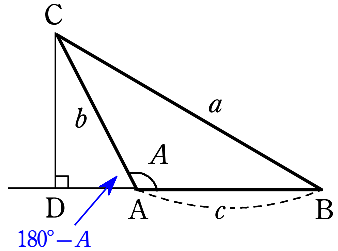
$BD^2=(c-b\cos A)^2$

が成り立つことを確かめよ。

[3]



[3]



解答

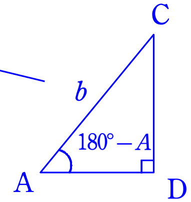
直角三角形 BCD において，三平方の定理により

$BC^2=CD^2+BD^2$

直角三角形 ADC において，$\angle CAD=180^\circ-A$

であるから直角三角形△ACD において

$$\frac{CD}{AC}=\frac{高さ}{斜辺}=\sin(180^\circ-A)$$



両辺にACをかけて $CD=AC\sin(180^\circ-A)$

$AC=b$ より $CD=b\sin(180^\circ-A)=b\sin A$

$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$

よって　$CD^2=(b\sin A)^2$

同様に，直角三角形△ACD において

$$\frac{AD}{AC}=\frac{底辺}{斜辺}=\cos(180^\circ-A)$$

両辺にACをかけて $AD=AC\cos(180^\circ-A)$

$AC=b$ より $AD=b\cos(180^\circ-A)$，

そして　$BD=BA+AD$

$= c + b\cos(180° - A)$

$= c + b(-\cos A)$　　$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$

$= c - b\cos A$

であるから

$BD^2 = (c - b\cos A)^2$

前ページで調べたことから，次の **余弦定理** が得られる。

余弦定理

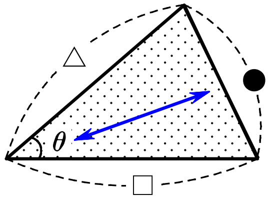
△ABC において，次が成り立つ。

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

マイナスに注意　　2を忘れないこと

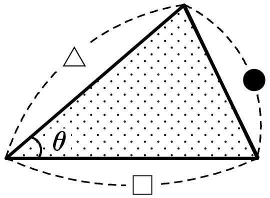


θの両隣の2辺

$●^2 = △^2 + □^2 - 2△□\cos\theta$

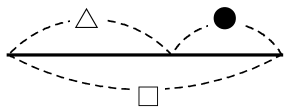
対辺と対角

参考



θ=0°とすると

三角形がつぶれてしまった



$●^2 = △^2 + □^2 - 2△□\cos\theta$ 　θ=0°とすると

$●^2 = △^2 + □^2 - 2△□\cos 0°$

$●^2 = △^2 + □^2 - 2△□ \times 1$

$●^2 = (□ - △)^2$

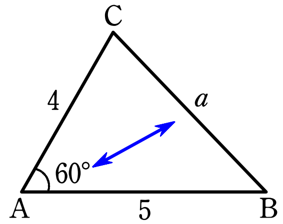
$● = □ - △$

確かにこの関係になっている

三角形の 2 辺の長さとその間の角の大きさがわかっている場合には，余弦定理を用いて，残りの辺の長さを求めることができる。

例題 6　△ABC において，$b=4$，$c=5$，$A=60°$ のとき，a を求めよ。

解答　余弦定理により



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$= 4^2 + 5^2 - 2\cdot 4\cdot 5\cos 60°$

$= 16 + 25 - \cancel{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{1}{\cancel{2}}$

$= 16 + 25 - 20 = 21$

$a^2 = 21$ より $a = \pm\sqrt{21}$ であるが，$a > 0$ であるから　$a = \sqrt{21}$

練習 24　次のような △ABC において，指定されたものを求めよ。

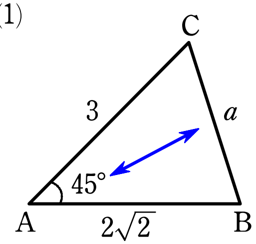
(1)　$b=3$，$c=2\sqrt{2}$，$A=45°$ のとき　a

(2)　$a=3$，$c=5$，$B=120°$ のとき　b

(3)　$a=\sqrt{3}$，$b=3$，$C=150°$ のとき　c

解答

(1)　余弦定理により



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$　　ルートの数の2乗は かっこをつける

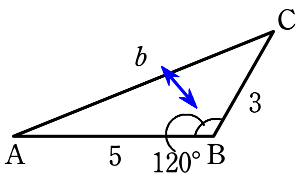
$= 3^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}\cos 45°$

$= 9 + 8 - 2\cdot 3\cdot 2\cancel{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}$

$= 9 + 8 - 12 = 5$

$a^2 = 5$ より $a = \pm\sqrt{5}$ であるが，$a > 0$ であるから $a = \sqrt{5}$

(2)　余弦定理により



$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$　　負の数は かっこをつける

$= 5^2 + 3^2 - 2\cdot 5\cdot 3\cos 120°$

$= 25 + 9 - \cancel{2}\cdot 5\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)$

$= 25 + 9 + 15 = 49$　　プラスになることに注意

$b^2 = 49$ より $b = \pm\sqrt{49} = \pm 7$ であるが，$b > 0$ であるから $b = 7$

(3)　余弦定理により

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

負の数は かっこをつける

$$= (\sqrt{3})^2 + 3^2 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot 3\cos 150^\circ$$

$$= 3 + 9 - \cancel{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 3\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)$$

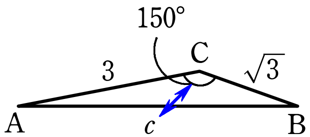
$3\times(\sqrt{3})^2=3\times3=9$

$$= 3 + 9 + 9 = 21$$

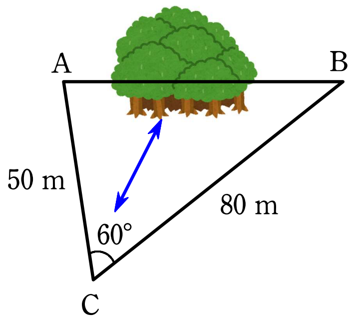
プラスになることに注意

$c^2=21$ より $c=\pm\sqrt{21}$ であるが，$c>0$ であるから　$c=\sqrt{21}$

(3)



練習 25　林をはさんだ 2 地点 A，B と地点 C について，右の図のようになった。
A，B 間の距離を求めよ。



解答

余弦定理により

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\cdot AC\cdot BC\cos 60^\circ$$

$$= 50^2 + 80^2 - \cancel{2}\cdot 50\cdot 80\cdot\frac{1}{\cancel{2}}$$

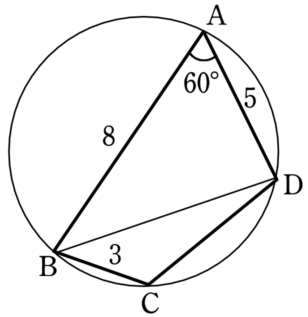
$$= 2500 + 6400 - 4000 = 4900$$

$AB^2=4900$ より $AB=\pm\sqrt{4900}=\pm70$ であるが，

$AB>0$ であるから　　$AB=70$　　　答　70 m

問題(超有名)円に内接する四角形 ABCD において，
$\angle A=60^\circ$，$AB=8$，$BC=3$，$DA=5$ のとき，
次のものを求めよ。

(1)　線分 BD の長さ　　　　(2)　線分 CD の長さ



解答

(1)　△ABD に余弦定理を使うと

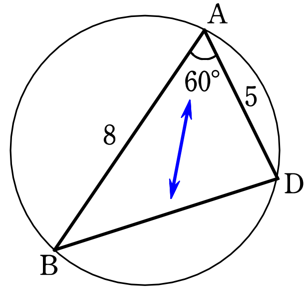
$$BD^2 = 8^2 + 5^2 - 2\cdot 8\cdot 5\cdot\cos 60^\circ$$

$$= 64 + 25 - \cancel{2}\cdot 8\cdot 5\cdot\frac{1}{\cancel{2}}$$

$$= 64 + 25 - 40 = 49$$

$BD^2=49$ より $BD=\pm\sqrt{49}=\pm7$ であるが，

$BD>0$ であるから　　　$BD=7$



(2)　円に内接する四角形において，
向かい合う角の和は 180° であるから

$$\angle BCD = 120^\circ$$

よって，$CD=x$ とおいて，
△BCD に余弦定理を使うと

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2\cdot BC\cdot CD\cdot\cos 120^\circ$$

$$7^2 = 3^2 + x^2 - 2\cdot 3\cdot x\cdot\cos 120^\circ$$

$$49 = 9 + x^2 - \cancel{2}\cdot 3\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)$$

$$49 = 9 + x^2 + 3x$$

プラスになることに注意

左辺と右辺を入れ替えて

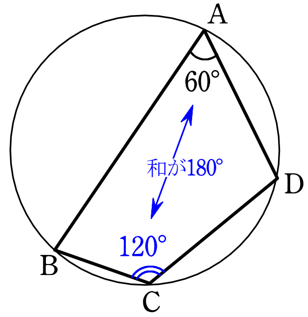
$$9 + x^2 + 3x = 49$$

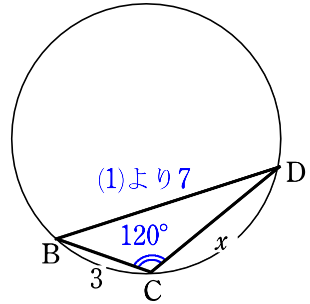
すなわち　　　$x^2+3x-40=0$

左辺を因数分解して　$(x-5)(x+8)=0$

これを解いて　　　　$x=5,\ -8$

$x>0$ であるから　$x=5$　したがって　$CD=5$





三角形の2辺と1つの角が分かれば，
余弦定理より残りの辺も求められる。

余弦定理より

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ より a^2 と $2bc\cos A$ を移項して

$2bc\cos A=b^2+c^2-a^2$　さらに両辺 $2bc$ で割って　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ より b^2 と $2ca\cos B$ を移項して

$2ca\cos B=c^2+a^2-b^2$　さらに両辺 $2ca$ で割って　$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ より c^2 と $2ab\cos C$ を移項して

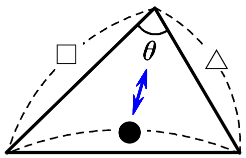
$2ab\cos C=a^2+b^2-c^2$　さらに両辺 $2ab$ で割って　$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

よって，△ABC において，次の等式が成り立つ。

$$\boxed{\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$$

三角形の 3 辺の長さがわかっている場合には，上の等式を用いて，3 つの角の大きさを求めることができる。

これ,すごく大事！

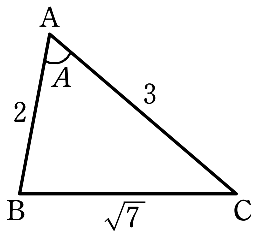


対辺と対角

$$\cos\theta=\frac{\triangle^2+\square^2-●^2}{2\triangle\square}$$

θの両隣の2辺

例題 7　△ABC において，$a=\sqrt{7}$，$b=3$，$c=2$ のとき，$\cos A$ の値と A を求めよ。



解答　余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

√の2乗はかっこをつける

$$=\frac{3^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot3\cdot2}$$

$$=\frac{9+4-7}{2\cdot3\cdot2}$$

約分できるかもしれないので，分母は計算しないで最後まで残しておく。

$$=\frac{\cancel{6}}{\cancel{2\cdot3}\cdot2}=\frac{1}{2}$$

簡単な図を書くこと。
長さが√で分からないことも多いので，
正確でなくてもいい。

また，$\cos A=\dfrac{1}{2}$ を満たす A は $0^\circ<A<180^\circ$ より $A=60^\circ$

この問題のように表を使わずにcos の値から三角形の角度を求める場合，
求められる角度は 30°, 45°,60°,90°,120°,135°,150° しかない。

参考　$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ のとき，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ を満たす θ を求めよ。

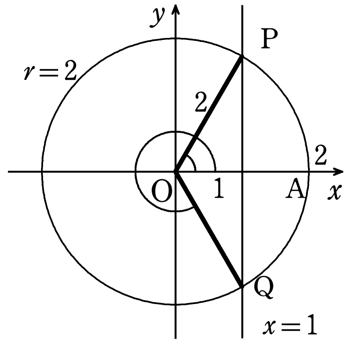
$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$ より，$r=2$ とすると $x=1$ となる。

原点 O を中心とする半径 2 の円上で，x 座標が 1 である点は 下図のPとQの2 つある。
円と x 軸の正の部分との交点をAとすると，求める θ は下図で ∠AOP と ∠AOQ である。
x 軸の正の方向を 0 °として，反時計回りに角を測る。

∠AOP=60°

∠AOQ=360°−60°=300°

よって　　$\theta=60^\circ$，300°



練習 26　次のような △ABC において，指定されたものを求めよ。

(1)　$a=2\sqrt{3}$，$b=\sqrt{7}$，$c=1$ のとき，$\cos B$ の値と B

(2)　$a=\sqrt{2}$，$b=1$，$c=\sqrt{5}$ のとき，$\cos C$ の値と C

この問題は，実際には鈍角三角形になるが，
そんなことは最初から分からないので簡単な図をかけばよい。

解答

(1)　余弦定理により

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

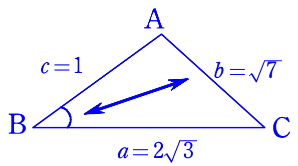
$$=\frac{1^2+(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot1\cdot2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1+12-7}{2\cdot1\cdot2\sqrt{3}}$$

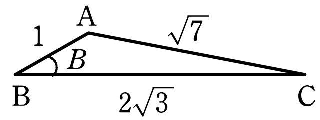
$$=\frac{6}{4\sqrt{3}}$$

cos で $\sqrt{3}$ が登場するものは $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のみ。だから有理化する。

$$=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{3\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{2\times\cancel{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



(1)実際の図

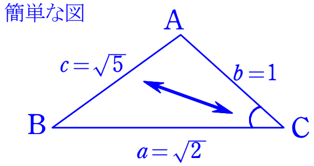


また，$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす B は $0^\circ<B<180^\circ$ より $B=30^\circ$

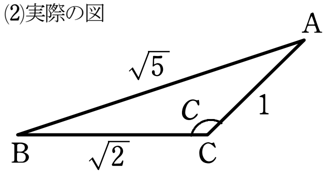
(2)　余弦定理により

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$
$$=\frac{(\sqrt{2})^2+1^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot 1}$$
$$=\frac{2+1-5}{2\cdot\sqrt{2}\cdot 1}$$
$$=\frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}}$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

簡単な図



(2)実際の図



また，$\cos C=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす C は $0°<C<180°$ より　$C=135°$

$\boxed{\text{Point}}$　余弦定理を使う場合，△ABC について与えられた条件によって，利用する等式を使い分ける。

155 ページ 例題 6

辺の長さを求めたい→　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

例題 7

角の大きさを求めたい→　$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ から，△ABC において，$\cos A$ の符号は $b^2+c^2-a^2$ の符号と同じになる。

辺の長さは正なので, 分母は必ず正

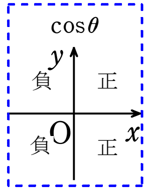
- $\cos A>0 \Leftrightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>0 \Leftrightarrow b^2+c^2-a^2>0 \Leftrightarrow b^2+c^2>a^2$

両辺に $2bc$ かける　　a^2 を移項

- $\cos A=0 \Leftrightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=0 \Leftrightarrow b^2+c^2-a^2=0 \Leftrightarrow b^2+c^2=a^2$
- $\cos A<0 \Leftrightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}<0 \Leftrightarrow b^2+c^2-a^2<0 \Leftrightarrow b^2+c^2<a^2$

b^2+c^2 と a^2 の大小によって，次のことがいえる。

b^2+c^2 と a^2 の大小	$b^2+c^2>a^2$	$b^2+c^2=a^2$	$b^2+c^2<a^2$
$\cos A$	$\cos A>0$	$\cos A=0$	$\cos A<0$
A の種類	A は鋭角	A は直角	A は鈍角



つまり , b^2+c^2 と a^2 のどちらが大きいかを調べると , A が鋭角か鈍角か図を描かなくても分かる。

練習 27　△ABC の 3 辺の長さが次のようなとき，A は鋭角，直角，鈍角のいずれであるかを調べよ。

(1)　$a=9$，$b=4\sqrt{2}$，$c=7$　　(2)　$a=\sqrt{7}$，$b=\sqrt{6}$，$c=2$

(3)　$a=2\sqrt{10}$，$b=4$，$c=4$

$\boxed{\text{解答}}$

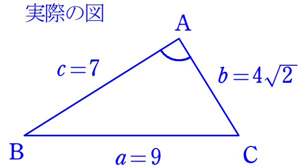
(1)　$a^2=81$，$b^2=32$，$c^2=49$

よって，$b^2+c^2=32+49=81$ から

b^2+c^2 は a^2 と等しい。

$b^2+c^2=a^2$が成り立つので , A は直角

実際の図



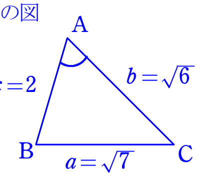
(2)　$a^2=7$，$b^2=6$，$c^2=4$

よって，$b^2+c^2=6+4=10$ から

b^2+c^2 の方が a^2 より大きい。

$b^2+c^2>a^2$が成り立つので，A は鋭角

実際の図



(3)　$a^2=40$，$b^2=16$，$c^2=16$

よって，$b^2+c^2=16+16=32$ から

a^2 の方が b^2+c^2 より大きい。$b^2+c^2<a^2$が成り立つので，A は鈍角

実際の図