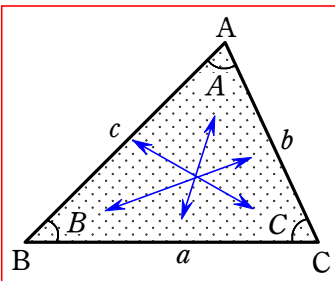


第4章「図形と計量」第2節 三角形への応用 4 正弦定理

以下では、△ABC において頂点 A, B, Cに向かい合う
辺 BC, CA, ABの長さを、それぞれ a, b, c で表す。
また、∠A, ∠B, ∠Cの大きさを、
それぞれ A, B, C で表す。
△ABC において、3 辺の長さ a, b, c と
3 つの角の正弦 $\sin A, \sin B, \sin C$ の間
に成り立つ関係を調べてみよう。



角の大きさが大文字のアルファベット
(頂点と角の大きさに微妙に違います)
角の大きさのアルファベットは傾いています
辺の長さが小文字のアルファベット

sin のこと
＜三角形の外接円と正弦＞

三角形の3つの頂点を通る円を、その三角形の **外接円** という。
△ABC の外接円の半径を R とする。

A が鋭角のとき
[1] $0^\circ < A < 90^\circ$ のとき、右の図で、線分 BD は
△ABC の外接円の直径とする。

このとき、円周角と中心角の性質により、
 $\angle BDC = \angle BAC = A$,
また直径に対する円周角は 90° より
 $\angle BCD = 90^\circ$
が成り立つ。

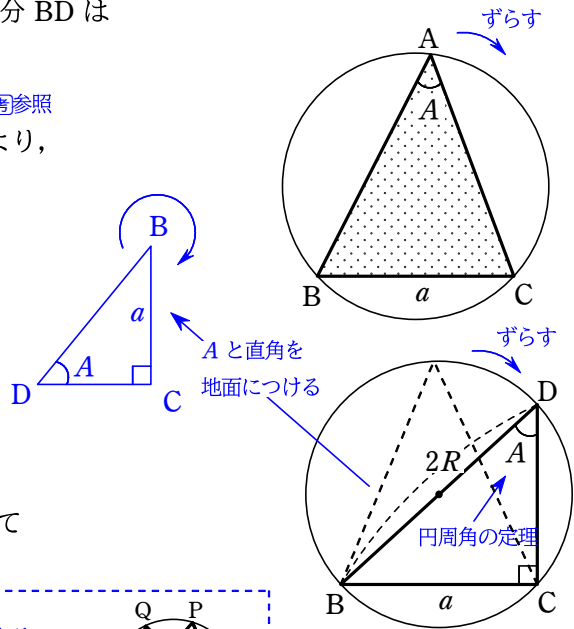
よって、直角三角形△BCD において

$$\frac{BC}{BD} = \frac{\text{高さ}}{\text{斜辺}} = \sin A$$

両辺に BD をかけて $BC = BD \sin A$
 $BC = a, BD = 2R$ であるから代入して
 $a = 2R \sin A$ が成り立つ。

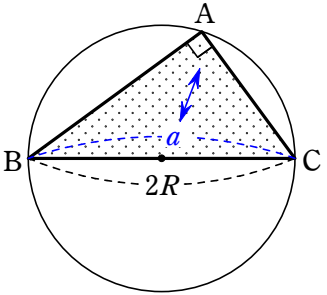
【参考】1つの弧に対する円周角の大きさは一定であり、
その弧に対する中心角の大きさの半分である。
とくに、半円の弧に対する円周角の大きさは 90° である。

半径を英語でradiusといいます。
大文字のアルファベット R で表す
のは、後で内接円がでてきて、そっ
ちを小文字の r で表すからです。



$A = 90^\circ$ と $90^\circ < A < 180^\circ$ のときでも、同じ関係式が得られることを次の [2], [3] で調べよう。

A が直角のとき
[2] $A = 90^\circ$ のとき
直径に対する円周角は 90° より
辺 BC は、△ABC の外接円の直径になる。
外接円の半径は R であるから、
 $a = 2R$ である。
一方、 $\sin A = \sin 90^\circ = 1$ であるから、
 $a = 2R = 2R \times 1 = 2R \times \sin 90^\circ$ と考えれば
 $A = 90^\circ$ のときも $a = 2R \sin A$ が成り立つ。



A が鈍角のとき
[3] $90^\circ < A < 180^\circ$ のとき
右の図で、線分 BD は、△ABC の外接円の直径とする。
 $\angle BDC = D$ とすると、円に内接する四角形の性質
より $A + D = 180^\circ$ が成り立つ。

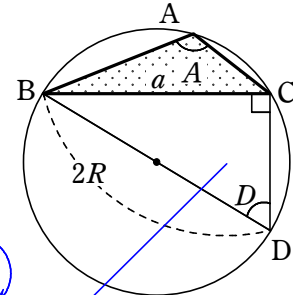
$D = 180^\circ - A$ とすると $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ の公式
 $\sin D = \sin(180^\circ - A) = \sin A$ ①
 $\angle BCD = 90^\circ$ であるから、
直角三角形△BCD において

$$\frac{BC}{BD} = \frac{\text{高さ}}{\text{斜辺}} = \sin D$$

両辺に BD をかけて $BC = BD \sin D$
 $BC = a, BD = 2R$ であるから代入して
 $a = 2R \sin D$

よって、① により、 $a = 2R \sin A$ が成り立つ。
①より $\sin A$ と $\sin D$ は同じ

円に内接する四角形では、
向かい合う角の和は 180° に
なることが知られている。



D と直角を
地面につける
 A が鈍角より D が鋭角になる
から、直角三角形で考えるこ
とができる。



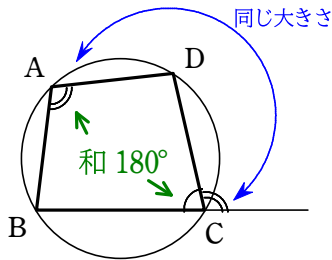
次ページにより詳しく載せています

【参考】 円に内接する四角形には、次の性質がある。

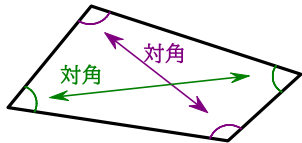
円に内接する四角形の性質

定理 8 円に内接する四角形について、
次の [1], [2] が成り立つ。

- [1] 対角の和は 180° である。
- [2] 内角は、その対角の外角に等しい。



【注意】 四角形において、
1つの内角に向かい合う内角を
その **対角** という。



【定理 8 の証明】

中心が点 O である円を **円 O** という。

四角形 ABCD が円 O に内接するとき、

$$\angle BAD = \alpha, \angle BCD = \beta$$

とする。

中心角と円周角の関係により

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ \quad \text{2}\alpha\text{と}2\beta\text{でぐるっと一周}$$

となるから、左辺を因数分解して

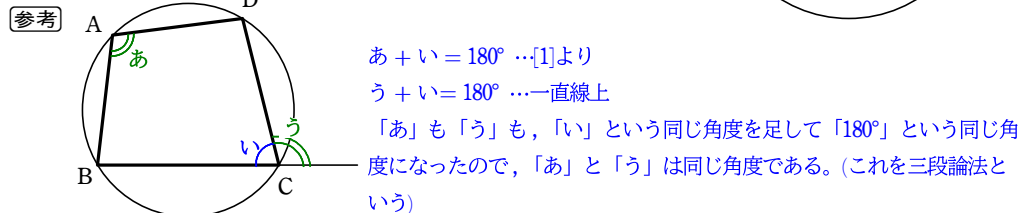
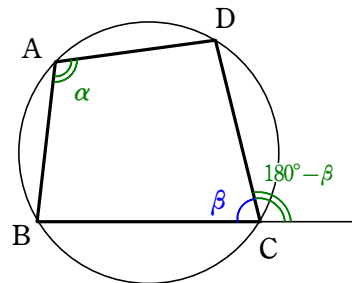
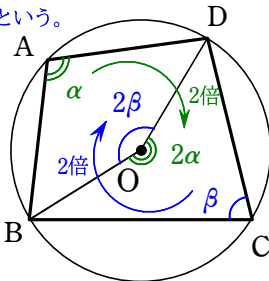
$$2(\alpha + \beta) = 360^\circ$$

両辺2で割って $\alpha + \beta = 180^\circ$ である。

よって、[1] が成り立つ。

また、 $\angle BCD$ の外角の大きさは

$180^\circ - \beta = \alpha$ となるから、[2] が成り立つ。 終



<正弦定理>

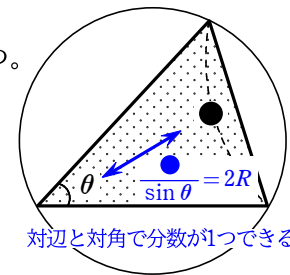
一般に、 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、次が成り立つ。

$$a = 2R \sin A \quad \text{両辺 } \sin A \text{ で割って } \frac{a}{\sin A} = 2R$$

同様に、次が成り立つ。

$$\frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R$$

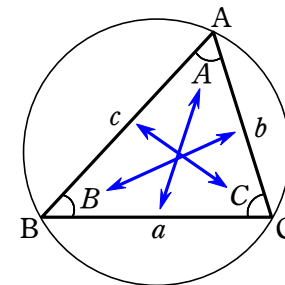
よって、次の **正弦定理** が得られる。



正弦定理

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、
次が成り立つ。 2を忘れないこと

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



例 10 正三角形の外接円の半径

1 辺の長さが 10 の正三角形の外接円
の半径を R とする。

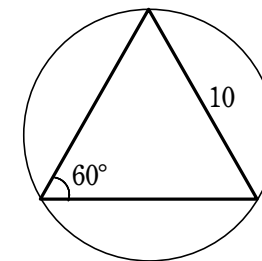
正弦定理により

$$\frac{10}{\sin 60^\circ} = 2R$$

が成り立つから両辺2で割って

$$R = \frac{10}{2 \sin 60^\circ} = \frac{10}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \quad \text{終}$$

sinなどは有理化しないが、
辺の長さや面積などは有理化する



練習 19 次のような △ABC において、外接円の半径 R を求めよ。

(1) $a=5, A=45^\circ$

(2) $b=\sqrt{3}, B=120^\circ$

解答

(1) 正弦定理により

$$\frac{5}{\sin 45^\circ}=2R$$

よって両辺2で割って

$$R=\frac{5}{2\sin 45^\circ}=\frac{5}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{5}{\frac{2}{\sqrt{2}}}=5\div\frac{2}{\sqrt{2}}=5\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

ひっくり返して掛け算

(2) 正弦定理により

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}=2R$$

よって両辺2で割って

$$R=\frac{\sqrt{3}}{2\sin 120^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1$$

練習 20 $c=10$ である △ABC において、外接円の半径が $R=10$ のとき、 C を求めよ。

解答

正弦定理により

$$\frac{10}{\sin C}=2\cdot 10$$

両辺に $\sin C$ をかけて

$$10=20\sin C$$

両辺を20で割って

$$\sin C=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

$\sin C=\frac{1}{2}$ を満たす C は

$C=30^\circ, 150^\circ$

参考 $0^\circ\leq\theta<360^\circ$ のとき、 $\sin\theta=\frac{1}{2}$ を満たす θ を求めよ。

$\sin\theta=\frac{y}{r}$ より、 $r=2$ とすると $y=1$ となる。

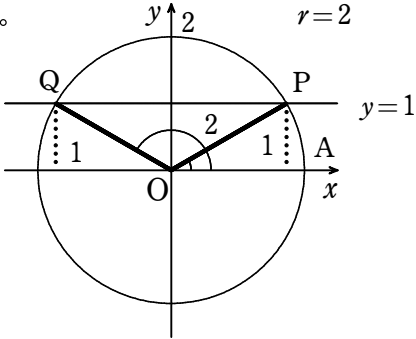
原点 O を中心とする半径 2 の円上で、 y 座標が 1 である点は下図の P と Q の2つある。
 円と x 軸の正の部分との交点を A とすると、求める θ は下図で $\angle AOP$ と $\angle AOQ$ である。
 x 軸の正の方向を 0° として、反時計回りに角を測る。

$\angle AOP=30^\circ$

$\angle AOQ=180^\circ-30^\circ=150^\circ$

よって

$\theta=30^\circ, 150^\circ$



正弦定理から、 $\triangle ABC$ において、次の等式が成り立つ。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

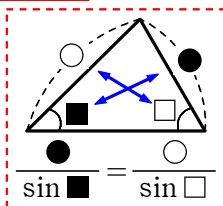
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

正弦定理

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、
次が成り立つ。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

三角形の1辺の長さと2つの角の大きさがわかっている場合には、
上のいずれかの等式を用いて、他の辺の長さを求めることができる。



【参考】(図形的意味)

頂点Cから辺ABに垂線CDを下ろす。

直角三角形 $\triangle ACD$ において

$$\frac{CD}{AC} = \frac{\text{高さ}}{\text{斜辺}} = \sin A$$

両辺にACをかけて $CD = AC \sin A$

$AC = b$ を代入すると

$$CD = b \sin A \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。

同様に直角三角形 $\triangle BCD$ において

$$\frac{CD}{BC} = \frac{\text{高さ}}{\text{斜辺}} = \sin B$$

両辺にBCをかけて $CD = BC \sin B$

$BC = a$ を代入すると

$$CD = a \sin B \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。

①, ②より $b \sin A = a \sin B$ が成り立つので

この式の両辺を $\sin A \times \sin B$ で割ると

$$\frac{b \cancel{\sin A}}{\cancel{\sin A} \times \sin B} = \frac{a \cancel{\sin B}}{\sin A \times \cancel{\sin B}} \quad \text{つまり} \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \quad \text{が成り立つ。}$$

例題5 $\triangle ABC$ において、 $b = \sqrt{6}$, $A = 45^\circ$, $B = 60^\circ$ であるとき、 a を求めよ。

【解答】 正弦定理により

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\text{よって} \quad \frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}$$

したがって両辺に $\sin 45^\circ$ をかけて

$$a = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} \times \sin 45^\circ$$

$$a = \sqrt{6} \times \frac{1}{\sin 60^\circ} \times \sin 45^\circ = \sqrt{6} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = 2$$

$\frac{1}{\sin 60^\circ}$ は $\sin 60^\circ$ の分子と分母をひっくり返したもの。

$$\frac{\sin 60^\circ}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{より} \quad \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

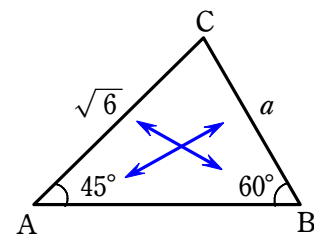
【参考】(割り算を使ってもよい)

$$a = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} \times \sin 45^\circ$$

$$= \sqrt{6} \div \sin 60^\circ \times \sin 45^\circ$$

ひっくり返して掛け算

$$= \sqrt{6} \div \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{6} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2$$



図を書くのも練習です。できるだけ
大きい角の頂点から書いた方が書き
やすいです。

練習 21 次のような $\triangle ABC$ において、指定されたものを求めよ。

- (1) $b = \sqrt{2}$, $A = 30^\circ$, $B = 45^\circ$ のとき a
 (2) $c = 2\sqrt{6}$, $B = 45^\circ$, $C = 120^\circ$ のとき b
 (3) $a = 3$, $A = 135^\circ$, $C = 30^\circ$ のとき c

【解答】

(1) 正弦定理により

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

よって
$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$$

したがって両辺に $\sin 30^\circ$ をかけて $a = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} \times \sin 30^\circ$

$$a = \sqrt{2} \times \frac{1}{\sin 45^\circ} \times \sin 30^\circ = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ より } \frac{1}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

【参考】(割り算を使ってもよい)

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} \times \sin 30^\circ \\ &= \sqrt{2} \div \sin 45^\circ \times \sin 30^\circ \quad \text{ひっくり返して掛け算} \\ &= \sqrt{2} \div \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

(2) 正弦定理により

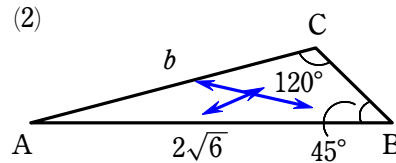
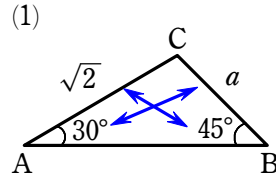
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

よって
$$\frac{b}{\sin 45^\circ} = \frac{2\sqrt{6}}{\sin 120^\circ}$$

したがって両辺に $\sin 45^\circ$ をかけて $b = \frac{2\sqrt{6}}{\sin 120^\circ} \times \sin 45^\circ$

$$b = 2\sqrt{6} \times \frac{1}{\sin 120^\circ} \times \sin 45^\circ = 2\sqrt{6} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6} \times 4}{\sqrt{3} \sqrt{2}} = 4$$

$$\frac{\sin 120^\circ}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ より } \frac{1}{\sin 120^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$



【参考】(割り算を使ってもよい)

$$\begin{aligned} b &= \frac{2\sqrt{6}}{\sin 120^\circ} \times \sin 45^\circ \\ &= 2\sqrt{6} \div \sin 120^\circ \times \sin 45^\circ \quad \text{ひっくり返して掛け算} \\ &= 2\sqrt{6} \div \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{6} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6} \times 2}{\sqrt{3} \sqrt{2}} = 4 \end{aligned}$$

(3) 正弦定理により

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$

よって
$$\frac{c}{\sin 30^\circ} = \frac{3}{\sin 135^\circ}$$

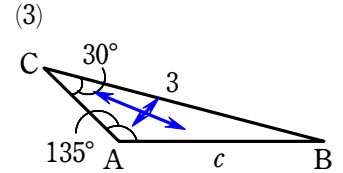
したがって両辺に $\sin 30^\circ$ をかけて $c = \frac{3}{\sin 135^\circ} \times \sin 30^\circ$

$$c = 3 \times \frac{1}{\sin 135^\circ} \times \sin 30^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{2}}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

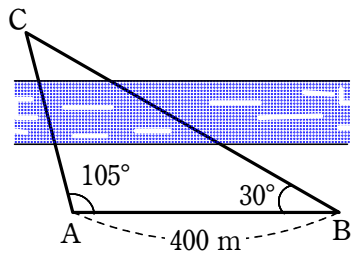
$$\frac{\sin 135^\circ}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ より } \frac{1}{\sin 135^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

【参考】(割り算を使ってもよい)

$$\begin{aligned} c &= \frac{3}{\sin 135^\circ} \times \sin 30^\circ \\ &= 3 \div \sin 135^\circ \times \sin 30^\circ \quad \text{ひっくり返して掛け算} \\ &= 3 \div \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = 3 \times \frac{\sqrt{2}}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$



練習 22 400 m 離れた 2 地点 A, B と、川をはさんで
A, B の反対側にある地点 C について、
右の図のようになった。A, C 間の距離を求めよ。
川を渡らないで川幅が分かるというのすごいことです。



解答 正弦定理により $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{\sin \angle ACB}$ ← ABの対角の∠Cが分からないので求める。

ここで $\angle ACB = 180^\circ - (105^\circ + 30^\circ) = 45^\circ$

よって $\frac{AC}{\sin 30^\circ} = \frac{400}{\sin 45^\circ}$

したがって両辺に $\sin 30^\circ$ をかけて $AC = \frac{400}{\sin 45^\circ} \times \sin 30^\circ$

$$AC = 400 \times \frac{1}{\sin 45^\circ} \times \sin 30^\circ = 400 \times \frac{\sqrt{2}}{1} \times \frac{1}{2} = 200\sqrt{2} \quad \text{答} \quad 200\sqrt{2} \text{ m}$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ より } \frac{1}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

参考(割り算を使ってもよい)

$$\begin{aligned} AC &= \frac{400}{\sin 45^\circ} \times \sin 30^\circ \\ &= 400 \div \sin 45^\circ \times \sin 30^\circ \\ &= 400 \div \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = 400 \times \frac{\sqrt{2}}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{400\sqrt{2}}{2} = 200\sqrt{2} \quad \text{答} \quad 200\sqrt{2} \text{ m} \end{aligned}$$

ひっくり返して掛け算