

第4章「図形と計量」第1節 三角比 3 三角比の拡張

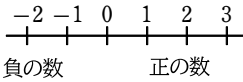
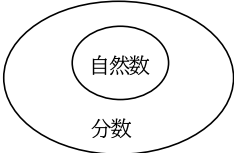
これまでは、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ の範囲にある θ についての三角比を扱ってきたが、ここでは θ の範囲を $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ に広げて三角比を考えよう。

参考(拡張とは?)
来年のことも考えて、
以下では $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ で考えていきます。

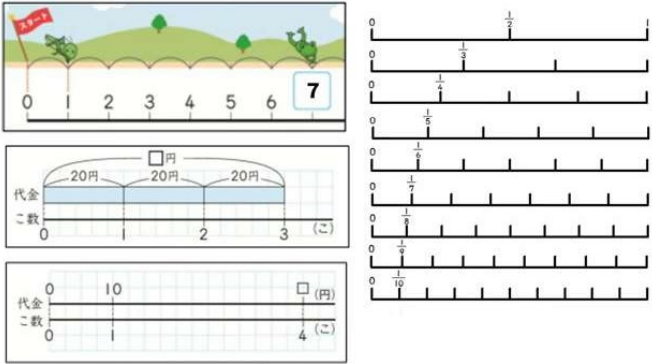
人間が最初に習う数は自然数です。自然数とは指を折ることで数えられる数のことです。例えば「6個のあめを3人で分けると、1人につき2個ずつ」分けられます。この割り算の問題での答えは自然数になります。しかし、1個のケーキを3人で分けると答えは自然数で表せません。現段階で知っている数で答えが出ないので、新しい考え方をして分数を導入します。つまり「1個のケーキを3人で分けると1人につき $\frac{1}{3}$ 個となる」と決めます。するとどんな割り算の問題も答えが出ることになります。そして導入した分数を用いて「6個のあめを3人で分けると、1人につき $\frac{6}{3}$ 個ずつ」と考えてると、 $\frac{6}{3}$ という分数は2という自

然数と同じであることが分かります。したがって分数は、自然数にもなるし自然数以外の数にもなるので、自分の知っている数字の世界が広がりました。自然数という壁を突破したと考えてもいいです。これが拡張です。

中学1年でも負の数を習いました。小学校のとき、0 という数は「何もない」と習いましたが、中学1年では0 という数を「数直線上の基準」として扱い、0 を基準として正の数の反対側を負の数としました。しかし負の数でも今までの正の数と同じように計算できます。これも拡張ですね。数直線で0 という壁を突破したわけです。



(小学校の数直線)(参考 https://www.youtube.com/watch?v=HAIZt_H6KwE)

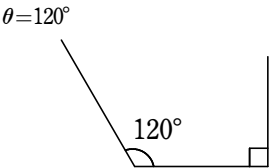
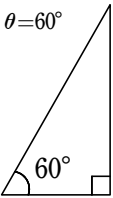


他の例として
 $\sqrt{2}$ なども拡張です

三角比の拡張では三角形という壁を突破します。今の段階でが、直角三角形の辺の長さを使って $\sin \theta$ や $\cos \theta$ の求め方を決めています。しかし、 θ が 90° を超えたときに $\sin \theta$ や $\cos \theta$ を求められません。

右の例のように、 120° の直角三角形は存在しません。よって $\sin 120^\circ$ や $\cos 120^\circ$ は直角三角形を使っては求められません。

では θ が 90° を超えたときの $\sin \theta$ や $\cos \theta$ をどうするか。そもそも直角三角形の辺の長さを使っている以上はこの問題を解決できないので三角形という壁を突破します。方法としては座標を用いて $\sin \theta$ や $\cos \theta$ の求め方を決めます(方法は次のページ以降を見ましょう)。



120°の直角三角形は無理

θ	90°未満	90°以上
直角三角形	辺の長さを使う	無理
座標	90°以上と同じ方法で求められる	回った点のx座標とy座標を使う

なぜいきなり座標が出てくるのかとまどう人もいるかもしれませんが。次のような例を考えてください。

テニスという競技には硬式と軟式があります。硬式と軟式では得点の数え方など、ルールが異なります。公立の中学校だと軟式をやっているところが多いですが、高校になるとどこも硬式ですよ。同じテニスなのに、軟式は軟式のルールがあり、硬式は硬式のルールがあってその中でテニスをしています。硬式をやっている子は軟式に対応しやすいが、軟式をやっている子は硬式の対応に苦労するそうです(あくまで人によりけりですが)。つまり、「硬式をやっていれば軟式も含めてテニス全体をカバーできる」ということです(くだいようですが、あくまで人によりけりです)。

座標を用いた求め方なら、どんな角度でも $\sin \theta$ や $\cos \theta$ を求められるので、三角比全体をカバーできます。90°より小さな θ での $\sin \theta$ や $\cos \theta$ は座標を使っても直角三角形を使っても同じ値になるので、好きな方でやればいいです。

＜座標を用いた三角比の定義＞

右の図のように、座標平面上で、原点 O を中心とする半径 r の円をかき、この円と x 軸の正の部分との交点を A とする。

r は θ によって自分で好みに決めればいいです。後で説明します。

$0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ の範囲にある θ に対して、 $\angle AOP = \theta$ となる点 P をこの円上にとり、点 P の座標を (x, y) とする。

このとき、 θ の三角比を次の式で定義する。

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \cos \theta = \frac{x}{r}, \tan \theta = \frac{y}{x}$$

これは絶対に覚える

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ のときは、135 ページの定義と一致する。



ワニが口を開けるイメージです。

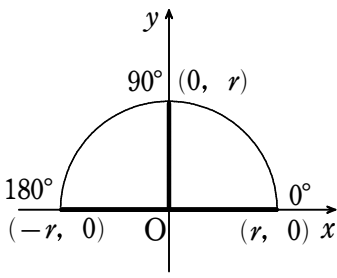
θ の範囲を $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ に広げた場合も、三角比 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値は、 r の大きさに関係なく、いずれも角 θ の大きさだけで決まる。

注意 $\theta = 90^\circ, 270^\circ$ のときは、 $x = 0$ であるから、 $\tan \theta \left(= \frac{y}{x} \right)$ は定義されない。

したがって、 $\tan \theta$ と書いたときには $\theta \neq 90^\circ, 270^\circ$ であるものとする。

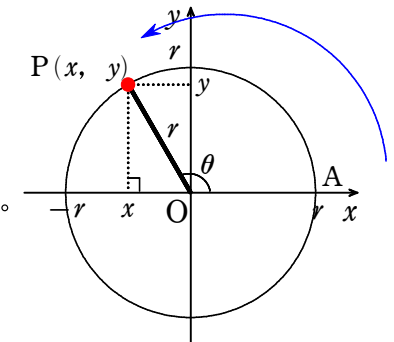
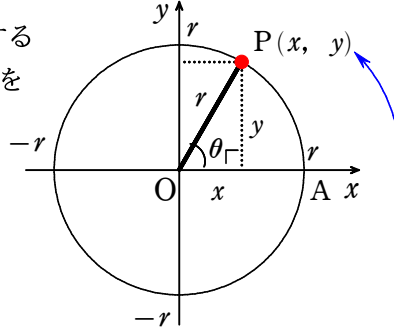
$0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ の三角比については、次のようになる。

θ	0°	90°	180°
$\sin \theta$	$\sin 0^\circ = 0$	$\sin 90^\circ = 1$	$\sin 180^\circ = 0$
$\cos \theta$	$\cos 0^\circ = 1$	$\cos 90^\circ = 0$	$\cos 180^\circ = -1$
$\tan \theta$	$\tan 0^\circ = 0$		$\tan 180^\circ = 0$



これも後で説明します。

赤い点がAを出発して θ だけ円の上を回ります。AOPが中心角 θ の扇形になります。



例 6 120° の正弦、余弦、正接
右の図で、 $\angle AOP = 120^\circ$ とする。
半円の半径を $r = 2$ にとると、
点 P の座標は $(-1, \sqrt{3})$ である。
そこで $x = -1, y = \sqrt{3}$ として

$$\sin 120^\circ = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \cos \theta = \frac{x}{r}, \tan \theta = \frac{y}{x}$$

注意 三角比の値は r の大きさに関係なく決まるが、例 6 では、点 P の座標が求めやすくなるような r の大きさとして、 $r = 2$ としている。

参考 (r の決め方について)

半円の半径を $r = 100$ にとると、
点 P の座標は $(-50, 50\sqrt{3})$ である。
そこで $x = -50, y = 50\sqrt{3}$ として

$$\sin 120^\circ = \frac{y}{r} = \frac{50\sqrt{3}}{100} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-50}{100} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \frac{y}{x} = \frac{50\sqrt{3}}{-50} = -\sqrt{3}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \cos \theta = \frac{x}{r}, \tan \theta = \frac{y}{x}$$

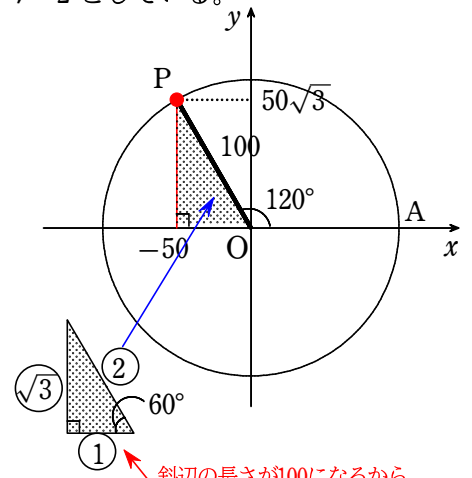
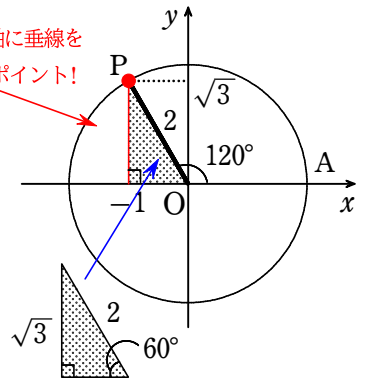
約分が発生して、結局同じ値になる。したがって好きな r で計算すればいいが、
 θ が 30° の倍数のときは $r = 2$ 、 90° の倍数のときは $r = 1$ 、 45° の倍数のときは $r = \sqrt{2}$ とした方が計算は楽である。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
r	1	2	$\sqrt{2}$	2	1	2	$\sqrt{2}$	2	1

θ	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°
r	2	$\sqrt{2}$	2	1	2	$\sqrt{2}$	2

赤い点がAを出発して 120° だけ円の上を回ります。
ワニが口を開けるイメージです。
AOPが中心角 120° の扇形になります。

点Pから x 軸に垂線を下ろすのがポイント!

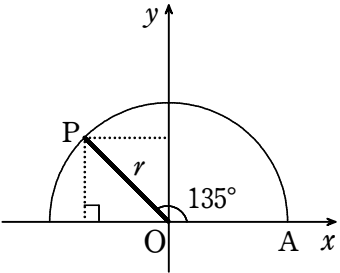


斜辺の長さが100になるから、比を用いて底辺や高さが求められる。

練習 13 次の角の正弦, 余弦, 正接の値を, 下の図などを用いて求めよ。

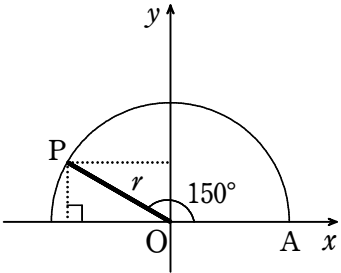
(1) 135°

$r = \square$ にとると,
点 P の座標は $\square$



(2) 150°

$r = \square$ にとると,
点 P の座標は $\square$



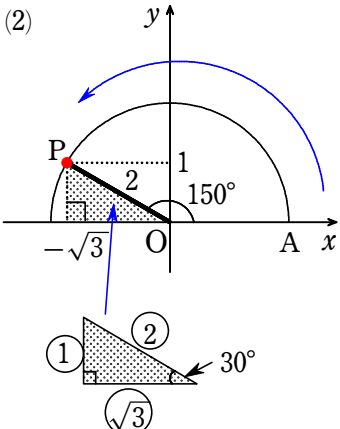
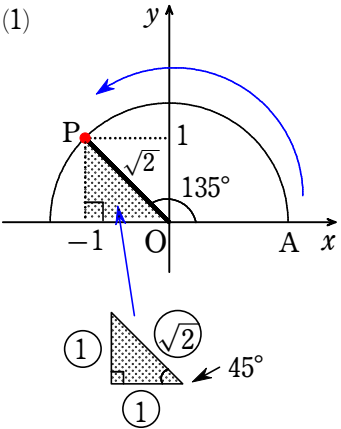
解答

(1) $r = \sqrt{2}$ にとると, 点 P の座標は $(-1, 1)$

$$\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos 135^\circ = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \tan 135^\circ = \frac{1}{-1} = -1$$

(2) $r = 2$ にとると, 点 P の座標は $(-\sqrt{3}, 1)$

$$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}, \cos 150^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan 150^\circ = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$



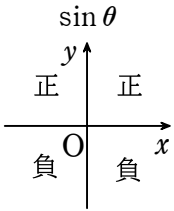
例 6 からわかるように, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のときは三角比が負になることもある。

三角比の符号についてまとめると, 次の表のようになる。

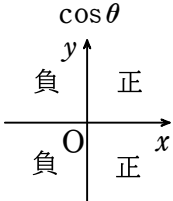
$90^\circ < \theta < 180^\circ$ の範囲にある角 θ を鈍角という。

θ	0°	鋭角	90°	鈍角	180°	...	270°	...	360°
$\sin \theta$	0	+	1	+	0	-	-1	-	0
$\cos \theta$	1	+	0	-	-1	-	0	+	1
$\tan \theta$	0	+	/	-	0	+	/	-	0

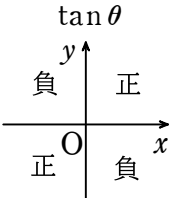
$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \cos \theta = \frac{x}{r}, \tan \theta = \frac{y}{x}$$



r は常に正の数だから,
 $\sin \theta$ の符号は
 y 座標の符号と一致する。



r は常に正の数だから,
 $\cos \theta$ の符号は
 x 座標の符号と一致する。



$\tan \theta$ の符号は
 x 座標と y 座標が同符号なら正,
異符号なら負である。

参考 $\theta = 0^\circ$ のとき, $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めよ。

$\angle AOP = 0^\circ$ となるのは, 点 P と点 A が一致するとき。

円の半径を $r = 1$ にとると,

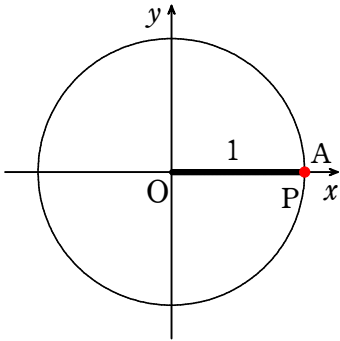
点 P の座標は $(1, 0)$ である。

そこで $x = 1$, $y = 0$ として

$$\sin 0^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos 0^\circ = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$



【参考】 $\theta = 180^\circ$ のとき、 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めよ。

$\angle AOP = 180^\circ$ とする。

円の半径を $r=1$ にとると、

点 P の座標は $(-1, 0)$ である。

そこで $x=-1$, $y=0$ として

$$\sin 180^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos 180^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\tan 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$

【参考】 $\theta = 90^\circ$ のとき、 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めよ。

$\angle AOP = 90^\circ$ とする。

円の半径を $r=1$ にとると、

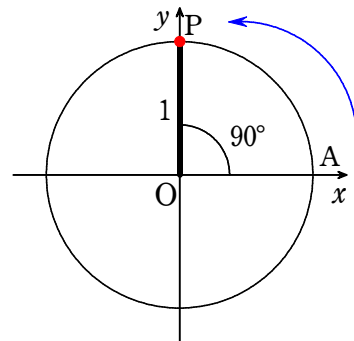
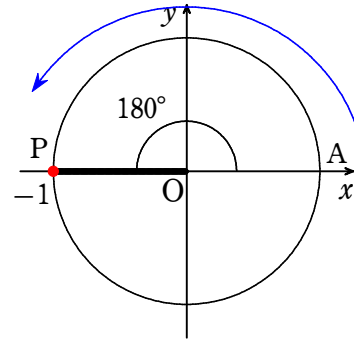
点 P の座標は $(0, 1)$ である。

そこで $x=0$, $y=1$ として

$$\sin 90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$\tan 90^\circ$ は分母が0になって
しまうので存在しない。



【参考】 0で割ってはいけない理由)

小学校で割り算を習います。「6個のあめを3人で分けると、1人につき何個ずつ分けられますか」という問題の答えは $6 \div 3 = 2$ で「2個ずつ」です。割り切れなければ余りを出したり、また分数で表したりします。しかし、0で割るという問題は扱われません。よく「0で割ってはいけない」「分母が0の分数は考えてはいけない」と言いますが、それはなぜでしょうか？

試しに電卓で「 $1 \div 0$ 」とやってみましょう。

スマホの電卓アプリで実際にやってみたら

右の画面になりました。「0で割ることは

できません」と表示されるものもあるみたいです。

さて、割り算について考えていきましょう。

インターネットにこんなプリントが転がっていました。

小学生のときにやった記憶はありますか？



わり算(1)

九九との関係

名前 _____

九九を使ったわり算のとき方を考えます。
たとえば $40 \div 5$ の答えは $\square \times 5 = 40$ の $\square$ にあてはまる数になります。
わり算の式とかけ算(九九)の式は下の矢印のかん係になります。

$$\begin{array}{c} 40 \div 5 = \square \\ \swarrow \quad \searrow \\ \square \times 5 = 40 \end{array}$$

これをふまえて下の問題の $\square$ にあてはまる数を書きましょう。

(1) $20 \div 5 = \square$
 $\square \times 5 = 20$

(6) $32 \div 8 = \square$
 $\square \times 8 = 32$

(2) $35 \div 7 = \square$
 $\square \times 7 = 35$

(7) $21 \div 3 = \square$
 $\square \times 3 = 21$

(3) $49 \div 7 = \square$
 $\square \times 7 = 49$

(8) $18 \div 2 = \square$
 $\square \times 2 = 18$

(4) $54 \div 6 = \square$
 $\square \times 6 = 54$

(9) $36 \div 9 = \square$
 $\square \times 9 = 36$

(5) $24 \div 8 = \square$
 $\square \times 8 = 24$

(10) $45 \div 5 = \square$
 $\square \times 5 = 45$

このプリントはウェブサイトで無料ダウンロードできます。© 小学生的算数教材【500問プリント】 <http://keisan.kikkaku.co.jp/keisan.html>

小学校3年生 算数 割り算
(<https://happyilac.net/keisan-warizan22.html>)

このように「割り算があれば、その前にかけ算がある」と考えることができます。「割り算にかけ算が対応している」ということです。さきほどの $6 \div 3 = 2$ も頭の中では $2 \times 3 = 6$ を思い出しているはずで

では、0で割るわり算「 $1 \div 0$ 」に対応するかけ算を考えてみます。

$$\begin{array}{c} 1 \div 0 = ? \\ \swarrow \quad \searrow \\ ? \times 0 = 1 \end{array}$$

$? \times 0 = 1$ とは、何に0をかけたら1になるかということです。ん？そんな数はないのでは…。ていませ

そうです、 $1 \div 0$ の答えの「？」は「ない」です。

しかしこれで終わりではありません。0で割るわり算のちょっと面倒なのはここからです。学です。その数学の中で、答えが1つに決まらないものを考えるのは「タブー」です。

0を0で割るわり算です。同じよう

$$\begin{array}{c} 0 \div 0 = ? \\ \swarrow \quad \searrow \\ ? \times 0 = 0 \end{array}$$

おもしろことに「？」に当てはまる数はいくつでも見つかります。 $0 \times 0 = 0, 1 \times 0 = 0, 2 \times 0 = 0, 3 \times 0 = 0, \dots$ つまり $0 \div 0$ の答えは「無数にある！」となります。

以上から、「どうして0で割っていけないの？」の問い自体が修正を迫られます。そもそも、0で割る計算を考えることはできるのです。「割ってはいけない」というのは、許されないというニュアンスです。0で割るわり算はそれ以外のわり算と同じように考える（計算する）ことができる（許される）のです！しかしその結果が他の計算（0で割る計算以外の計算）と大きく異なる、という違いがあります。それは、「他のわり算 $6 \div 3 = 2, 0 \div 5 = 0$ では答えが一つに決まりますが、0で割る割り算は答えが一つ決まらない」ことです。

定義…ある概念内容・語義や処理手続をはっきりと定めること。それを述べたもの。

「0で割るわり算」は「計算できない」ではなく、「計算（演算）が定義できない」が正しい表現です。「計算（演算）が定義できる」とは、 $3 + 5, 6 - 4, 8 \times 3, 6 \div 3$ のように「答えが一つに定まる」ことをいいます。0で割るという計算は、答えが「ない」「無数」の2通りになります。つまり、答えが一つに定まらない（存在しない）計算です。これを数学では「計算（演算）が定義されない（できない）」と表現します。これが「0で割ってはいけない」の正体だったのです。

覚えていないかもしれませんが1次関数や2次関数などの「関数」は、1つの x から1つの y が作られると定義されています。1つの x に対して1つの y が決まれば関数なので「このクラスの出席番号 x 番の人の身長が y cm」としても、 y は x の関数となります。しかし「このクラスの出席番号 x 番の人が好きな料理 y 」としたとき、ある生徒の好きな料理

が2つも3つもでてきたら y は x の関数ではなくなります。「このクラスの出席番号 x 番の人が最も好きな料理 y 」とすれば関数になります。

みなさん、図鑑ってわかりますか？花や動物や鉄道など、様々な図鑑があります。小さい頃に図鑑が好きでずっと見ていた人もいないのでしょうか。さて生き物の図鑑にはいろいろな生き物が掲載されていますが、「幽霊や妖怪などのお化け」は図鑑に掲載されていますか？見たことないですよ。ね。「お化け」は生き物としてどんなものか定義され

割り算は数学のお化け」だと思っています。誰がやっても必ず同じ答えが得られるのが数

タブー(taboo)…何をしてはならない、何をすべきであるという決まり事

だから、「0で割ってはいけない」「分母が0の分数は考えてはいけない」のです。

ちなみに、おまけの話を2つ紹介します。

例えば、60（km/時）とは $60/1$ （km/時）のことで、1時間で60km進む速さのことです。すると、 $60/0$ （km/時）とは0時間で60km進む速さを意味することになりますが、そのような速さは存在しません。どこでもドアの話になります。

2×4 はいくつですか？8ですよ。ね。

では、 2.01×3.99 はいくつでしょう。計算すればわかりますが、きっと8ぐらいになるだろうと予想はできますよね。（ $2.01 \times 3.99 = 8.0199$ ）

同じように考えて、 $1 \div 0$ も $1 \div 0.01$ や $1 \div 0.001$ に近い計算結果になのでは…

$$1 \div 0.01 = \frac{1}{0.01} = \frac{100}{1} = 100 \quad , \quad 1 \div 0.001 = \frac{1}{0.001} = \frac{1000}{1} = 1000$$

このように割る数を0に近い数にすればするほど、計算結果は大きくなっていってしまいます。よって「 $1 \div 0$ には計算結果がない」と考えることもできます。

参照 (<https://club.informatix.co.jp/?p=8895>)

■代表的な角の三角比のまとめ

いろいろな角の三角比の値を表にまとめると、次のようになる。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

θ	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°
$\sin \theta$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos \theta$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

<180° - θ の三角比> [研究]三角比の表には90°以上の角は載っていません。なぜでしょう？

注意

以下では $\sin(180^\circ - \theta)$ などを考えていきますが、三角比では分配法則は成り立ちません。

✕ $\sin(180^\circ - \theta) = \sin 180^\circ - \sin \theta$

もし分配法則が成り立ってしまうなら、
 $\sin(30^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ + \sin 30^\circ$
が成り立ちます。しかし

左辺 = $\sin(30^\circ + 30^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

右辺 = $\sin 30^\circ + \sin 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

となり、左辺と右辺が一致しません。

右の図のように、原点 O を中心とする半径 r の半円上に $\angle AOP = \theta$ となる点 P(x, y) をとる。すると

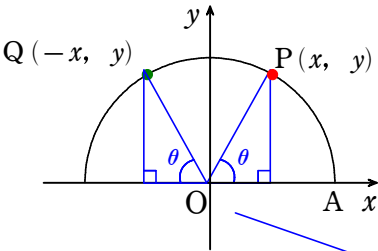
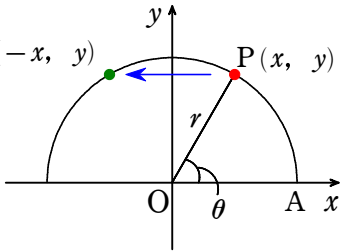
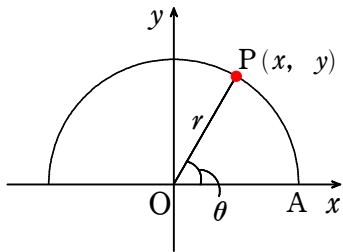
$\sin \theta = \frac{y}{r}$ ……①, $\cos \theta = \frac{x}{r}$ ……②,

$\tan \theta = \frac{y}{x}$ ……③

が成り立つ。

y 軸に関して点 P と対称な点 Q をとると、Q の座標は (-x, y) である。さらに点 Q と原点 O を結び、線分 OQ が x 軸の正の方向から回った角を調べると $\angle AOQ = 180^\circ - \theta$ である。

以下の図はθが鋭角であるとします。



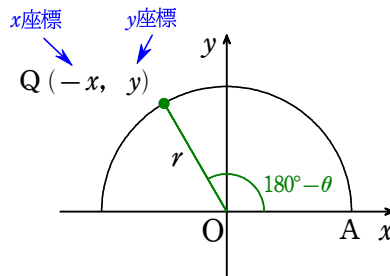
ここがθになる

よって、 $180^\circ - \theta$ の三角比は点Qの座標を用いて、次のようになる。

$$\sin(180^\circ - \theta) = \frac{\text{点Qの}y\text{座標}}{r} = \frac{y}{r} \dots\dots④$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = \frac{\text{点Qの}x\text{座標}}{r} = \frac{-x}{r} = -\frac{x}{r} \dots\dots⑤$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = \frac{\text{点Qの}y\text{座標}}{\text{点Qの}x\text{座標}} = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} \dots\dots⑥$$



すると

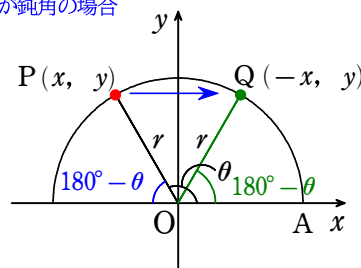
①と④より $\sin(180^\circ - \theta) = \frac{y}{r} = \sin \theta$ よって $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$

②と⑤より $\cos(180^\circ - \theta) = -\frac{x}{r} = -\cos \theta$ よって $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$

③と⑥より $\tan(180^\circ - \theta) = -\frac{y}{x} = -\tan \theta$ よって $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$

よって、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、次の関係が成り立つ。 θ が鈍角の場合

他の角度であっても、点P(x, y) に対して点Q(-x, y) になるので、 $180^\circ - \theta$ の三角比は θ がいくつであっても同じ結果になる。



$180^\circ - \theta$ の三角比

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

○が□になると、
sin は sin のまま
cos は $-\cos$ に
tan も $-\tan$
に変わると考えてもよい。

$$\sin \bigcirc = \sin \square$$

$$\cos \bigcirc = -\cos \square$$

○+□=180° のとき

$$\sin \bigcirc = \sin \square$$

$$\cos \bigcirc = -\cos \square$$

$$\tan \bigcirc = -\tan \square$$

○+□=180°より
○=180°-□
となります。よって
 $\sin \bigcirc = \sin(180^\circ - \square)$
= $\sin \square$
となります。
他も同様です。

上の関係を使うと、鈍角の三角比を鋭角の三角比で表すことができる。

教科書後ろの三角比の表が 0° から 90° までしかない理由です。

例 7 (1) $\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ$

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta \text{ で } \theta \text{ を } 60^\circ \text{ とした}$$

(2) $\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta \text{ で } \theta \text{ を } 45^\circ \text{ とした}$$

(3) $\tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ$ 終

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta \text{ で } \theta \text{ を } 30^\circ \text{ とした}$$

練習 14 次の値を、三角比の表を用いて求めよ。

(1) $\sin 140^\circ$

(2) $\cos 156^\circ$

(3) $\tan 100^\circ$

解答

(1) $\sin 140^\circ = \sin(180^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ = 0.6428$

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta \text{ で } \theta \text{ を } 40^\circ \text{ とした}$$

(2) $\cos 156^\circ = \cos(180^\circ - 24^\circ) = -\cos 24^\circ = -0.9135$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta \text{ で } \theta \text{ を } 24^\circ \text{ とした}$$

(3) $\tan 100^\circ = \tan(180^\circ - 80^\circ) = -\tan 80^\circ = -5.6713$

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta \text{ で } \theta \text{ を } 80^\circ \text{ とした}$$

問題(クリアーより)次の式の値を求めよ。

$$\cos 10^\circ \sin 80^\circ - \cos 100^\circ \sin 10^\circ$$

三角比の表を使って計算する問題ではありません
公式を用いて角度を揃える問題です。

解答

$$\sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \cos 10^\circ$$

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta \text{ で } \theta \text{ を } 10^\circ \text{ とした}$$

$$\cos 100^\circ = \cos(180^\circ - 80^\circ) = -\cos 80^\circ = -\cos(90^\circ - 10^\circ) = -\sin 10^\circ$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta \text{ で } \theta \text{ を } 80^\circ \text{ とした}$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta \text{ で } \theta \text{ を } 10^\circ \text{ とした}$$

であるから

$$\sin 80^\circ = \cos 10^\circ$$

$$\cos 100^\circ = -\sin 10^\circ$$

$$\begin{aligned} \cos 10^\circ \sin 80^\circ - \cos 100^\circ \sin 10^\circ &= \cos 10^\circ \cos 10^\circ - (-\sin 10^\circ) \sin 10^\circ \\ &= \cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ = 1 \end{aligned}$$

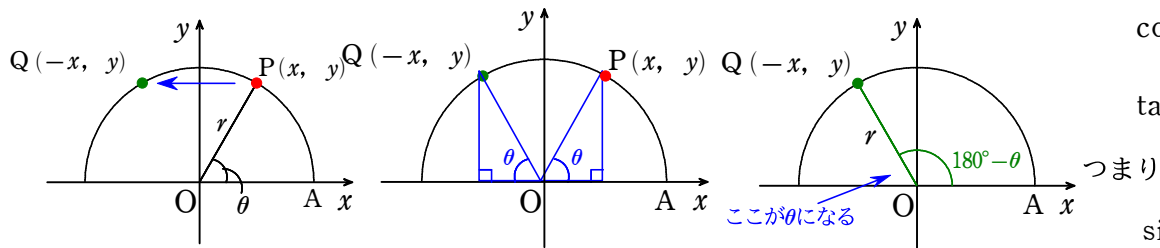
$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ で } \theta \text{ を } 10^\circ \text{ とした}$$

参考

$$\begin{aligned} \cos 10^\circ \sin 80^\circ - \cos 100^\circ \sin 10^\circ &= 0.9848 \times 0.9848 - (-0.1736) \times 0.1736 \\ &= 0.9848^2 + 0.1736^2 \\ &= 0.96983104 + 0.03013696 \\ &= 0.999968 \end{aligned}$$

【参考】 $90^\circ + \theta$, $\theta + 90^\circ$ の三角比

$180^\circ - \theta$ の三角比を求める問題では、点Pと y 軸に関して対称な点Qをとりました。



点Qの座標を用いると、 $\sin(180^\circ - \theta)$ を $\sin \theta$ で表すことができました。

では、 $\sin(90^\circ + \theta)$ などはどうなるのでしょうか。

x 軸の正の方向から $90^\circ + \theta$ だけ回った点Qは、
もともとの点Pからしてどんな点か考えよう。

右の図のように、原点 O を中心とする半径 r の半円上に $\angle AOP = \theta$ となる点 $P(x, y)$ をとる。すると

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \dots (\ast)$$

が成り立つ。

線分 OQ と x 軸の正の方向のなす角が

$90^\circ + \theta$ となる点 Q をとると、図より

Q の座標は $(-y, x)$ である。

($90^\circ + \theta$ は 3 時の方向から 90° だけ反時計周りに回ったあと、さらに θ だけ周ればいい)

(赤で塗りつぶされた直角三角形は底辺が x 、高さが y 、斜辺が r である。これを利用して点 Q の座標が求められる。)

よって、 $90^\circ + \theta$ の三角比は、点 Q を用いて次のようになる。

$$\sin(90^\circ + \theta) = \frac{Q \text{ の } y \text{ 座標}}{r}, \quad \cos(90^\circ + \theta) = \frac{Q \text{ の } x \text{ 座標}}{r}, \quad \tan(90^\circ + \theta) = \frac{Q \text{ の } y \text{ 座標}}{Q \text{ の } x \text{ 座標}}$$

ゆえに

$$\sin(90^\circ + \theta) = \frac{x}{r}, \quad \cos(90^\circ + \theta) = \frac{-y}{r}, \quad \tan(90^\circ + \theta) = \frac{x}{-y}$$

これらに $(\ast)$ を代入すると

$$\sin(90^\circ + \theta) = \frac{x}{r} = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ + \theta) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin \theta$$

$$\tan(90^\circ + \theta) = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -1 \times \frac{x}{y} = -1 \div \frac{y}{x} = -1 \div \tan \theta = -\frac{1}{\tan \theta}$$

$\tan \theta = \frac{y}{x}$ の分子と分母がひっくり返ったもの

つまり

$$\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta, \quad \cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta, \quad \tan(90^\circ + \theta) = -\frac{1}{\tan \theta}$$

が成り立つ。

$90^\circ + \theta$ と $\theta + 90^\circ$ は同じであるから、 $\theta + 90^\circ$ も同じ公式となる。

$$\sin(\theta + 90^\circ) = \cos \theta, \quad \cos(\theta + 90^\circ) = -\sin \theta, \quad \tan(\theta + 90^\circ) = -\frac{1}{\tan \theta}$$

【別解】2つの公式の合わせ技

公式 $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ の θ の場所を $90^\circ - \theta$ に変えてみましょう。

$$\sin\{180^\circ - (90^\circ - \theta)\} = \sin(90^\circ - \theta)$$

よって

$$\sin(180^\circ - 90^\circ + \theta) = \sin(90^\circ - \theta)$$

$$\sin(90^\circ + \theta) = \sin(90^\circ - \theta)$$

さらに右辺の $\sin(90^\circ - \theta)$ は公式 $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$ によって $\cos \theta$ に等しいので

$$\sin(90^\circ + \theta) = \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

つまり

$$\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$$

が成り立ちます。

分配法則に注意

<三角比の等式を満たす θ > **三角方程式**といいます

ある角 θ の三角比の値が与えられたとき、その θ を求めてみよう。

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \cos \theta = \frac{x}{r}, \tan \theta = \frac{y}{x}$$

例 8 (1) $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ のとき、等式 $\sin \theta = \frac{1}{2}$ を満たす θ

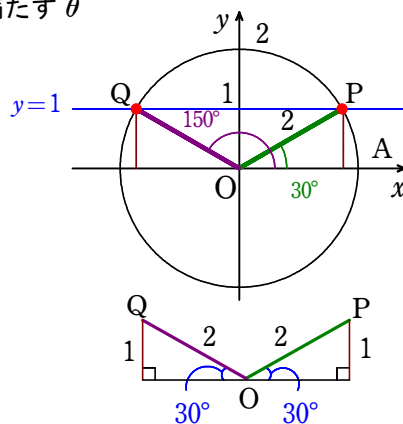
$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2} \quad y=1, r=2$$

原点 O を中心とする半径 2 の円上で、
 y 座標が 1 である点は 2 つある。

求める θ は、右図で

$\angle AOP$ と $\angle AOQ$ である。

よって $\theta = 30^\circ, 150^\circ$



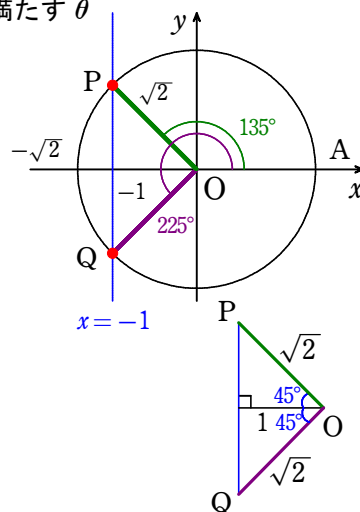
(2) $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ のとき、等式 $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad x=-1, r=\sqrt{2}$$

原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円上で、
 x 座標が -1 である点は 2 つある。

求める θ は、右図で $\angle AOP$ と $\angle AOQ$ である。

よって $\theta = 135^\circ, 225^\circ$



解答

(1)

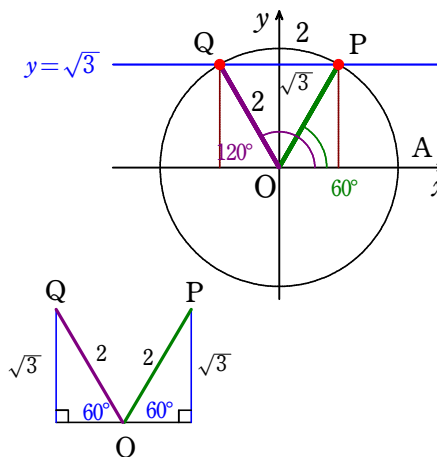
$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad y=\sqrt{3}, r=2$$

原点 O を中心とする半径 2 の円上で、
 y 座標が $\sqrt{3}$ である点は 2 つある。

求める θ は、右図で $\sqrt{3} \approx 1.7$ くらい

$\angle AOP$ と $\angle AOQ$ である。

よって $\theta = 60^\circ, 120^\circ$



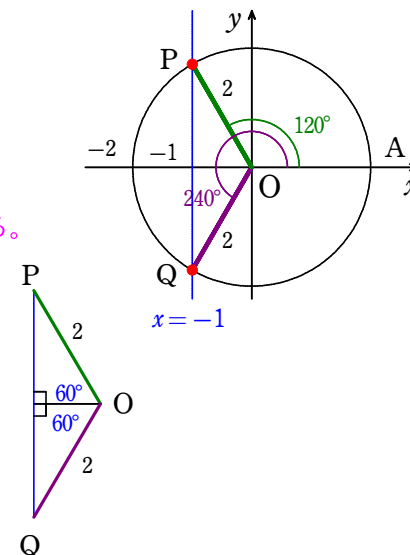
(2)

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = -\frac{1}{2} = \frac{-1}{2} \quad x=-1, r=2$$

原点 O を中心とする半径 2 の円上で、
 x 座標が -1 である点は 2 つある。

求める θ は、右図で $\angle AOP$ と $\angle AOQ$ である。

よって $\theta = 120^\circ, 240^\circ$



例 9 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ のとき、等式 $\tan \theta = -\sqrt{3}$ を満たす θ

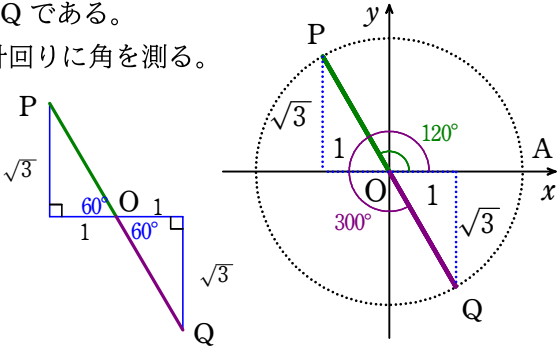
マイナスの付け方が2通りある

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = -\sqrt{3} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{-1} \quad \begin{matrix} y = -\sqrt{3} & y = \sqrt{3} \\ x = 1 & x = -1 \end{matrix}$$

x 軸の正の部分に点Aをとり、 $P(-1, \sqrt{3})$ と $Q(1, -\sqrt{3})$ とすると
求める θ は下図で $\angle AOP$ と $\angle AOQ$ である。

x 軸の正の方向を 0° として、反時計回りに角を測る。

$$\begin{aligned} \angle AOP &= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \\ \angle AOQ &= 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ \\ \text{よって} \quad \theta &= 120^\circ, 300^\circ \end{aligned}$$



参考 $\tan \theta$ を求めるとき
円を描く必要はない

練習 16 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ のとき、次の等式を満たす θ を求めよ。

- (1) $\tan \theta = 1$

(2) $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

解答

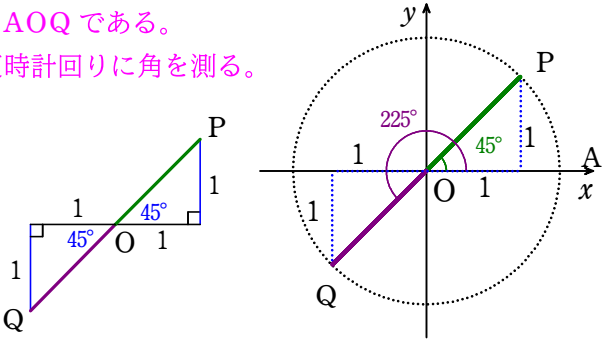
(1)

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = 1 = \frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} \quad \begin{matrix} y = 1 & y = -1 \\ x = 1 & x = -1 \end{matrix}$$

x 軸の正の部分に点Aをとり、 $P(1, 1)$ と $Q(-1, -1)$ とすると
求める θ は下図で $\angle AOP$ と $\angle AOQ$ である。

x 軸の正の方向を 0° として、反時計回りに角を測る。

$$\begin{aligned} \angle AOP &= 45^\circ \\ \angle AOQ &= 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ \\ \text{よって} \quad \theta &= 45^\circ, 225^\circ \end{aligned}$$



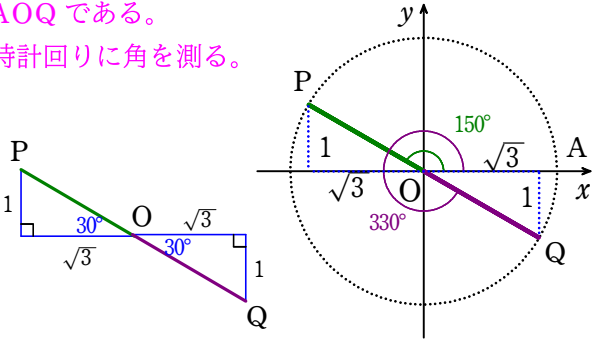
(2)

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{-\sqrt{3}} \quad \begin{matrix} y = -1 & y = 1 \\ x = \sqrt{3} & x = -\sqrt{3} \end{matrix}$$

x 軸の正の部分に点Aをとり、 $P(-\sqrt{3}, 1)$ と $Q(\sqrt{3}, -1)$ とすると
求める θ は下図で $\angle AOP$ と $\angle AOQ$ である。

x 軸の正の方向を 0° として、反時計回りに角を測る。

$$\begin{aligned} \angle AOP &= 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ \\ \angle AOQ &= 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ \\ \text{よって} \quad \theta &= 150^\circ, 330^\circ \end{aligned}$$



研究(不等式) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1) $\sin \theta > \frac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $\cos \theta \leq \frac{1}{2}$

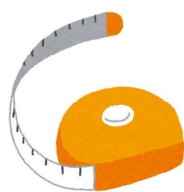
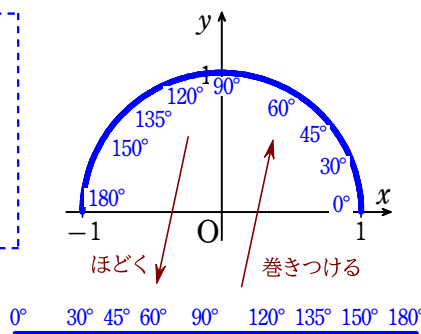
(3) $\tan \theta \geq 1$

不等式では

■ $\sin \theta = \frac{y}{r}$ で $r=1$ と決めて、 $\sin \theta = \frac{y}{1} = y$ としてしまう

■ $\cos \theta = \frac{x}{r}$ で $r=1$ と決めて、 $\cos \theta = \frac{x}{1} = x$ としてしまう

■ $\tan \theta = \frac{y}{x}$ で $x=1$ と決めて、 $\tan \theta = \frac{y}{1} = y$ としてしまう



解答

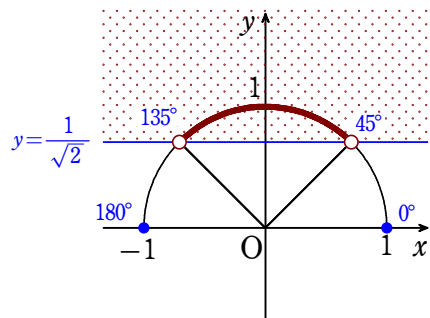
(1) $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ は $\theta = 45^\circ, 135^\circ$

原点中心半径1の半円において、 $\sin \theta = \frac{y}{1} = y$ である。

問題文より $\sin \theta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから、 $y > \frac{1}{\sqrt{2}}$ となるので

半円上で y 座標が $\frac{1}{\sqrt{2}}$ より大きい部分を考える。

図から、不等式を満たす θ の値の範囲は $45^\circ < \theta < 135^\circ$



ほどく



注意 135°の方が左側にあるからといって、 $135^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ と答えると間違いです。巻き尺は左が小さい数で右が大きい数です。

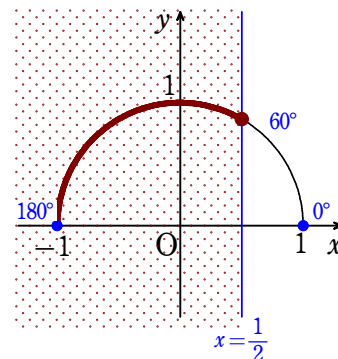
(2) $\cos \theta = \frac{1}{2}$ を満たす θ は $\theta = 60^\circ$

原点中心半径1の半円において、 $\cos \theta = \frac{x}{1} = x$ である。

問題文より $\cos \theta \leq \frac{1}{2}$ であるから、 $x \leq \frac{1}{2}$ となるので

半円上で x 座標が $\frac{1}{2}$ 以下の部分を考える。

図から、不等式を満たす θ の値の範囲は $60^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$



ほどく



注意 180°の方が左側にあるからといって、 $180^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ と答えると間違いです。巻き尺は左が小さい数で右が大きい数です。

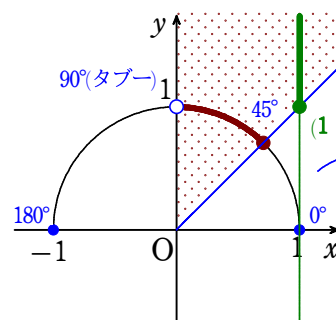
(3) $\tan \theta = 1$ を満たす θ は $\theta = 45^\circ$

原点中心半径1の半円において、点(1, 0)を通り x 軸に垂直な直線をひく。

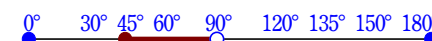
この直線上の点は x 座標が1であるから、 $\tan \theta = \frac{y}{1} = y$ である。

問題文より $\tan \theta \geq 1$ であるから、 $y \geq 1$ となるので
原点を通り x 軸の正の部分から θ だけ回った直線が
 $y \geq 1$ の部分と交わるような θ の範囲を考える。

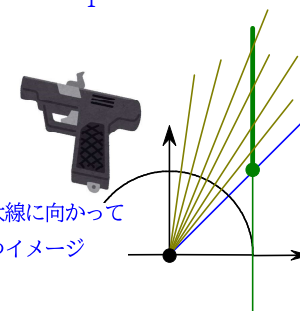
図から、不等式を満たす θ の値の範囲は $45^\circ \leq \theta < 90^\circ$



ほどく



原点から緑の太線に向かって
ピストルを撃つイメージ



<三角比の相互関係>

右の図のような半径1の半円上に、 $\angle AOP = \theta$ となる点 $P(x, y)$ をとる。143 ページの三角比の定義で、 $r=1$ とすると、
不等式を解くときと同じ考え方で

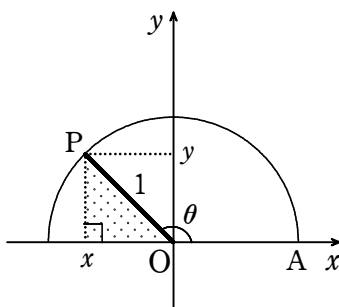
$$\sin \theta = \frac{y}{1} = y, \quad \cos \theta = \frac{x}{1} = x, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

となる。また、三平方の定理などにより、

$$x^2 + y^2 = 1$$

が常に成り立つことがわかる。

したがって、140 ページで示した三角比の相互関係は、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲にある角 θ についても、そのまま成り立つ。



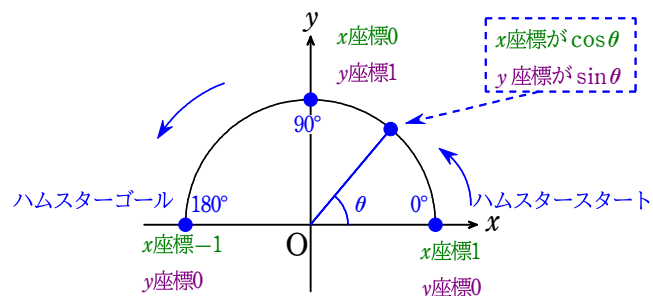
三角比の相互関係

$$1 \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad 3 \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$2 \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ や $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ など角が大きくなっても、結局小さい角の $\sin \theta$ や $\cos \theta$ の符号が逆になるだけなので、2乗してしまえば同じになる。

深める $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ のとりうる値の範囲をそれぞれ考えてみよう。



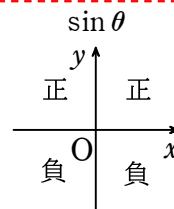
上でも説明しているように、原点中心半径1の円において、点 $(1, 0)$ をスタートして半時計周りに θ だけ周った点の x 座標が $\cos \theta$ 、 y 座標が $\sin \theta$ である。 θ が $0^\circ \rightarrow 90^\circ \rightarrow 180^\circ$ と増えていくとき、動く点の x 座標は $1 \rightarrow 0 \rightarrow -1$ 、 y 座標は $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ と変わる。ゆえに $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、 $\cos \theta$ の範囲は $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ 、 $\sin \theta$ の範囲は $0 \leq \sin \theta \leq 1$ となる。

Point 三角比の値を求める問題では、

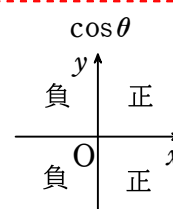
与えられた θ の値の範囲によって、三角比の符号が変わることに注意する。

141 ページ例題 2 $\rightarrow \cos \theta > 0$ 例題 4 $\rightarrow \cos \theta \leq 0$

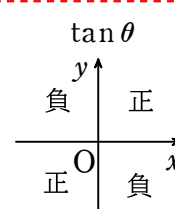
$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$



r は常に正の数だから、
 $\sin \theta$ の符号は
 y 座標の符号と一致する。



r は常に正の数だから、
 $\cos \theta$ の符号は
 x 座標の符号と一致する。



$\tan \theta$ の符号は
 x 座標と y 座標が同符号なら正、
異符号なら負である。

例題 4 $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\sin \theta = \frac{1}{4}$ のとき、 $\cos \theta$ と $\tan \theta$ の値を求めよ。

解答

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ から

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

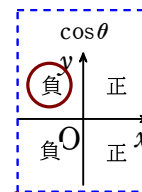
$$\cos^2 \theta = \frac{15}{16} \text{ より } \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{15}{16}} = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、 $\cos \theta \leq 0$ であるから

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{また } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{4} \div \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{4}{\sqrt{15}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{15}}$$

$$\frac{\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{\frac{1}{4} \times 4}{-\frac{\sqrt{15}}{4} \times 4} = \frac{1}{-\sqrt{15}} = -\frac{1}{\sqrt{15}} \quad \text{これもOK}$$



別解

$90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ で $\sin \theta = \frac{1}{4}$ であるので、下図を考える。

三平方の定理より 底辺² + 1² = 4²

底辺² + 1 = 16 より 底辺² = 15

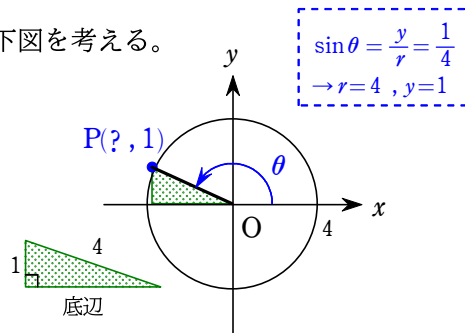
ゆえに 底辺 = $\pm\sqrt{15}$

底辺は正の数より 底辺 = $\sqrt{15}$

すると点Pの座標はP($-\sqrt{15}$, 1) より

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{15}}{4} = -\frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{-\sqrt{15}} = -\frac{1}{\sqrt{15}}$$



練習 17 $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ のうち、1つが次の値をとるとき、他の2つの値を求めよ。

(1) $\sin \theta = \frac{2}{3}$

(2) $\cos \theta = -\frac{4}{5}$

解答

(1) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ から

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{5}{9} \text{ より } \cos \theta = \pm\sqrt{\frac{5}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、 $\cos \theta \leq 0$ であるから

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{また } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2}{3} \div \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{\frac{2}{3} \times 3}{-\frac{\sqrt{5}}{3} \times 3} = \frac{2}{-\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

それでもOK

別解

$90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ で $\sin \theta = \frac{2}{3}$ であるので、下図を考える。

三平方の定理より 底辺² + 2² = 3²

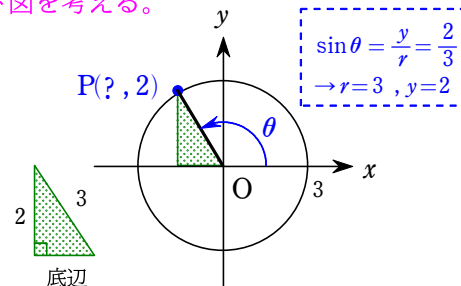
底辺² + 4 = 9 より 底辺² = 5

ゆえに 底辺 = $\pm\sqrt{5}$

底辺は正の数より 底辺 = $\sqrt{5}$

すると点Pの座標はP($-\sqrt{5}$, 2) より

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{5}}{3} = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{2}{-\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$



(2) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ から

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{9}{25} \text{ より } \sin \theta = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5}$$

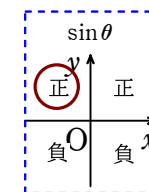
$90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、 $\sin \theta \geq 0$ であるから

$$\sin \theta = \frac{3}{5}$$

$$\text{また } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{5} \div \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5} \times \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{\frac{3}{5} \times 5}{-\frac{4}{5} \times 5} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

それでもOK



$90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ で $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ であるので、下図を考える。

三平方の定理より 4² + 高さ² = 5²

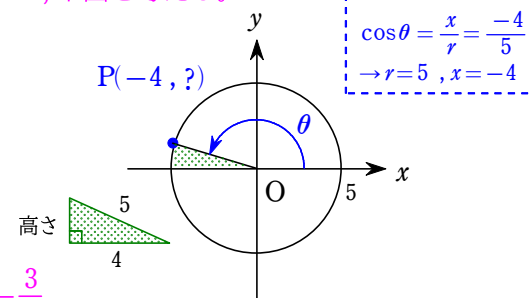
16 + 高さ² = 25 より 高さ² = 9

ゆえに 高さ = $\pm\sqrt{9} = \pm 3$

高さは正の数より 高さ = 3

すると点Pの座標はP(-4 , 3) より

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{3}{5}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$



練習 18 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\tan \theta = -2$ のとき、 $\cos \theta$ と $\sin \theta$ の値を求めよ。

【解答】 $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ から
 $(-2)^2 = +4$
 $1 + (-2)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ よって $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 5$

両辺に $\cos^2 \theta$ をかけて $1 = 5\cos^2 \theta$

さらに両辺に5で割って $\cos^2 \theta = \frac{1}{5}$

$\cos^2 \theta = \frac{1}{5}$ より $\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{5}} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\tan \theta < 0$ であるから $90^\circ < \theta < 180^\circ$ であり、
 このとき $\cos \theta < 0$ である。

$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ より両辺に $\cos \theta$ をかけて $\tan \theta \cos \theta = \sin \theta$

ゆえに $\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = (-2) \times \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

【別解】 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より y は正であることを注意する。

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\tan \theta = -2$ であるので、下図を考える。

三平方の定理より $1^2 + 2^2 = \text{斜辺}^2$

$1 + 4 = \text{斜辺}^2$ より $\text{斜辺}^2 = 5$

ゆえに $\text{斜辺} = \pm \sqrt{5}$

斜辺は正の数より $\text{斜辺} = \sqrt{5}$

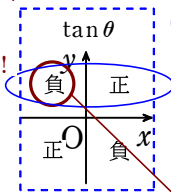
点Pの座標はP(-1, 2)より

$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

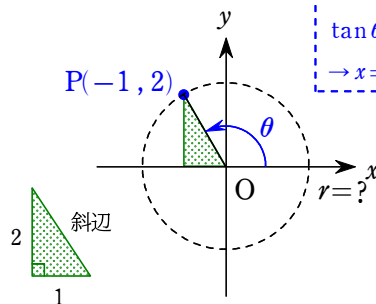
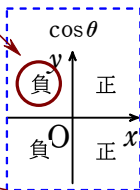
$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{5}{1}$ と考えて、両辺の分子と分母を
 ひっくり返すと $\frac{\cos^2 \theta}{1} = \frac{1}{5}$ となる。

$\tan \theta$ が負だから
 こっちだ!



$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ だけど
 どっちだろう?



$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{2}{-1}$
 $\rightarrow x = -1, y = 2$

【参考】(フローチャート)

■ $\sin \theta$ が分かっているとき

$\sin \theta \rightarrow \cos \theta \rightarrow \tan \theta$
 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
 より $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$

■ $\cos \theta$ が分かっているとき

$\cos \theta \rightarrow \sin \theta \rightarrow \tan \theta$
 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
 より $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

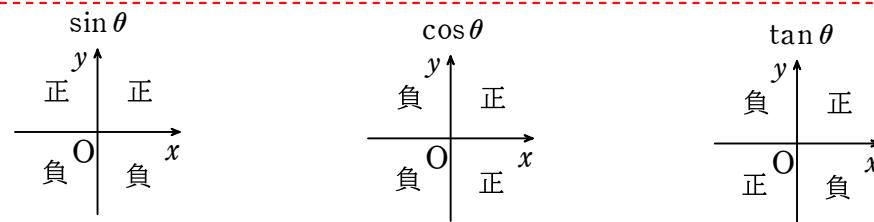
■ $\tan \theta$ が分かっているとき

$\tan \theta \rightarrow \cos \theta \rightarrow \sin \theta$
 $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
 $(\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta})$ より $\sin \theta = \tan \theta \cos \theta$

$\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ のうち、
 どれか1つが分かっているれば残りを求めることができます。

【注意】

与えられた θ の値の範囲によって、三角比の符号が変わることに注意する。



例 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ において $\cos \theta$ が負であることが分かっている

$\rightarrow \theta$ は $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の部分にあることがわかるので、 $\sin \theta$ は正、 $\tan \theta$ は負となる。

例 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ において $\sin \theta$ が正であることが分かっている

$\rightarrow \theta$ は $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ の部分か $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の部分か分からないので場合分けをする。

つまり、答えは2パターン出てくる。

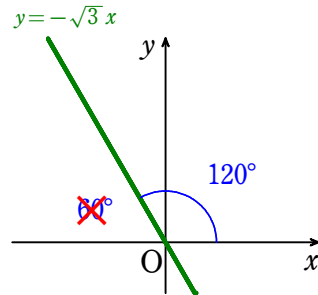
研究(なす角) 次の直線と x 軸の正の向きとのなす角 θ を求めよ。

(1) $y = -x$

(2) $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$

注意

ここでいう x 軸の正の向きとのなす角とは時計でいう3時の方向から始めて、反時計回りに測った角のことをいいます。



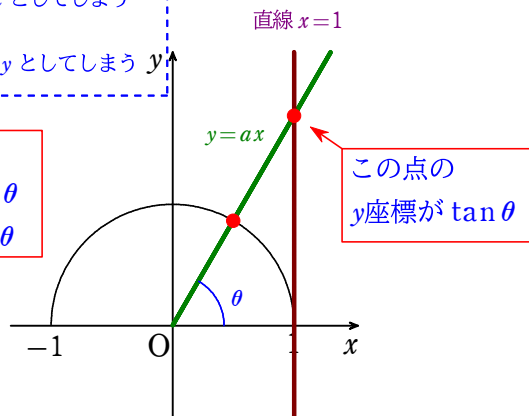
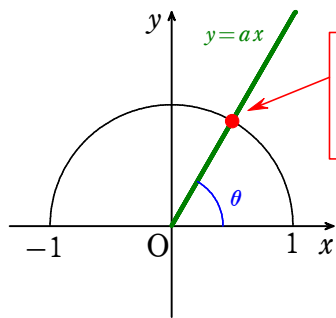
参考

不等式では

■ $\sin \theta = \frac{y}{r}$ で $r=1$ と決めて、 $\sin \theta = \frac{y}{1} = y$ としてしまう

■ $\cos \theta = \frac{x}{r}$ で $r=1$ と決めて、 $\cos \theta = \frac{x}{1} = x$ としてしまう

■ $\tan \theta = \frac{y}{x}$ で $x=1$ と決めて、 $\tan \theta = \frac{y}{1} = y$ としてしまう



原点中心半径1の円において、点 $(1, 0)$ から測って θ だけ回った点の座標は x 座標が $\cos \theta$ 、 y 座標が $\sin \theta$ である。比例 $y = ax$ のグラフがこの点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ を通るとき、 $y = ax$ に代入すると $\sin \theta = a \times \cos \theta$

両辺を $\cos \theta$ で割ると $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = a$ つまり $\tan \theta = a$ が成り立つ。

傾き = $\tan \theta$ は公式である。ゆえにこの比例の式は $y = (\tan \theta)x$ とかけるので $x=1$ を代入すると $y = \tan \theta$ となるので、比例 $y = (\tan \theta)x$ のグラフと直線 $x=1$ の交点の座標は $(1, \tan \theta)$ となる。このように、 $\tan \theta$ を直線 $x=1$ に閉じ込めることができる。直線 $x=1$ は円に接するので、これが正接の由来である。

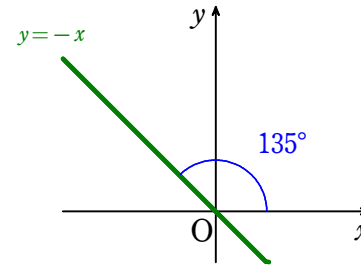
解答

(1) 直線の傾きが -1 であるから、傾き = $\tan \theta$ より $\tan \theta = -1$ によって $\theta = 135^\circ$

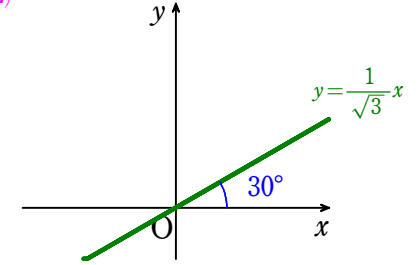
(2) 直線の傾きが $\frac{1}{\sqrt{3}}$ であるから、傾き = $\tan \theta$ $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

よって $\theta = 30^\circ$

(1)



(2)



研究(対称式) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、次の式の値を求めよ。

- (1) $\sin \theta \cos \theta$ (2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ (3) $\sin \theta - \cos \theta$

解答

(1) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ の両辺を2乗すると

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
 $\sin^2 \theta$ と書かないこと。
 $\sin^2 \theta$ か $(\sin \theta)^2$ と書くこと。

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{3}{4}$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

よって $1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{3}{4}$ 移項

したがって $2\sin \theta \cos \theta = \frac{3}{4} - 1$ より $2\sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{4}$

両辺を2で割って $\sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{8}$ $A^3 + B^3 = (A+B)^3 - 3AB(A+B)$

(2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3\sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

$$= \frac{6\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16} = \frac{9\sqrt{3}}{16}$$

$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$ 因数分解
 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

別解 $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left\{1 - \left(-\frac{1}{8}\right)\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{9\sqrt{3}}{16}$$

とりあえず2乗します
 $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

(3) $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$ $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$$= 1 - 2\sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \frac{5}{4} \quad \text{より} \quad \sin \theta - \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

±のどちらだろう？

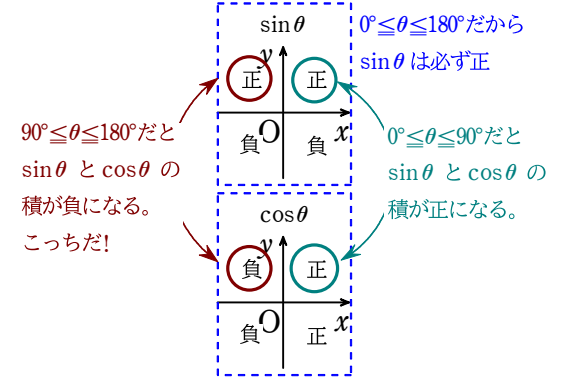
$\sin \theta \cos \theta < 0$ であるから $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$

よって、 $\sin \theta - \cos \theta$ は

$\sin \theta - \cos \theta > 0$ であるから

$$\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta - \cos \theta &= (+\bigcirc) - (-\triangle) \\ &= (+\bigcirc) + (+\triangle) \\ &= \text{正} \end{aligned}$$



■ 代表的な角の三角比のまとめ(練習用)

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \theta$									
$\cos \theta$									
$\tan \theta$									

θ	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°
$\sin \theta$							
$\cos \theta$							
$\tan \theta$							