

第4章「図形と計量」第1節 三角比 2 三角比の相互関係

直角三角形では3辺の長さの関係として、三平方の定理が成り立つ。
ここでは、三平方の定理などを利用して、三角比 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の間に
どのような関係が成り立つかを調べてみよう。

＜三角比の相互関係＞

右の図の直角三角形において
 $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$
底辺 = 斜辺 $\times \cos \theta$ 高さ = 斜辺 $\times \sin \theta$
である。よって

$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ (約分)
 $\tan \theta = \frac{\text{高さ}}{\text{底辺}}$
となるので $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ が成り立つ。また、三平方の定理により
(底辺)² + (高さ)² = (斜辺)²

$x^2 + y^2 = r^2$ すなわち $(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = r^2$

よって $r^2(\cos \theta)^2 + r^2(\sin \theta)^2 = r^2$ が成り立つ。

両辺を r^2 で割ると
 $(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$

となる。また、この等式の両辺を $(\cos \theta)^2$ で割ると

$\frac{(\cos \theta)^2}{(\cos \theta)^2} + \frac{(\sin \theta)^2}{(\cos \theta)^2} = \frac{1}{(\cos \theta)^2}$ よって $1 + \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^2 = \frac{1}{(\cos \theta)^2}$

となる。先ほど、 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$ となることが分かったので

この式に代入すると $1 + (\tan \theta)^2 = \frac{1}{(\cos \theta)^2}$ が成り立つ。

以上から、三角比の間に次の関係が成り立つ。

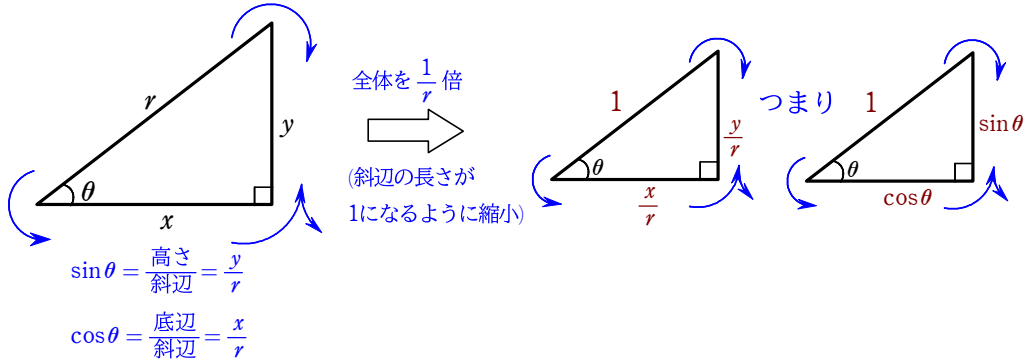
三角比の相互関係

1 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 3 $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

2 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

注意 $(\sin \theta)^2$ 、 $(\cos \theta)^2$ 、 $(\tan \theta)^2$ を、それぞれ $\sin^2 \theta$ 、 $\cos^2 \theta$ 、 $\tan^2 \theta$ と書く。

参考



三角比はどの大きさの三角形で考えても同じ値になるので、斜辺の長さが1になるように
全体を縮小します。縮小した直角三角形(一番右側)でタンジェントと考えると

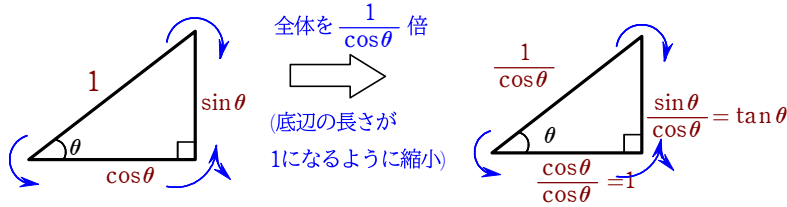
$\tan \theta = \frac{\text{高さ}}{\text{底辺}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ つまり $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ が成り立ちます。

また、縮小した直角三角形(一番右側)で三平方の定理を考えると

(底辺)² + (高さ)² = (斜辺)² より $(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1^2$

つまり $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ が成り立ちます。

次に、斜辺の長さが1になるように全体を縮小します。



この縮小した直角三角形で三平方の定理を考えると

(底辺)² + (高さ)² = (斜辺)² より $1^2 + (\tan \theta)^2 = \left(\frac{1}{\cos \theta}\right)^2$

つまり $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ が成り立ちます。

$\sin \theta^2$ と書かないこと。

練習 8 $\theta = 30^\circ$ のとき, 上の三角比の相互関係 1, 2, 3 が成り立つことを確かめよ。

【解答】

1 について

$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ← 同じになったから
1 が成り立つことが分かった

$\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
← ひっくり返して掛け算

よって, $\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$ が成り立つ。

2 について

$\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$
← 2 が成り立つことが分かった

よって, $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1$ が成り立つ。

3 について

$1 + \tan^2 30^\circ = 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$
← 同じになったから
3 が成り立つことが分かった

$\frac{1}{\cos^2 30^\circ} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = 1 \div \frac{3}{4} = 1 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$

よって, $1 + \tan^2 30^\circ = \frac{1}{\cos^2 30^\circ}$ が成り立つ。

分数
分数
が苦手な人は, このように割り算に直すとよいが,
 $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ の分子分母に2を掛けて $\frac{\frac{1}{2} \times 2}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
とした方が圧倒的に速い

【参考】

θ	30°	45°	60°
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

例題 2 θ は鋭角とする。 $\sin \theta = \frac{2}{3}$ のとき, $\cos \theta$ と $\tan \theta$ の値を求めよ。

【解答】

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ から ← 移項
 $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ ← 代入

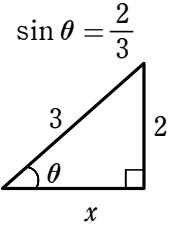
$\cos^2 \theta = \frac{5}{9}$ より $\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{5}{9}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$ ← 直角三角形の辺の長さを使って
三角比を作っているので $\cos \theta$ は正になる。
 θ が鋭角なので $\cos \theta > 0$ であるから

$\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ← $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sin \theta \div \cos \theta$
また $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2}{3} \div \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ← $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{\frac{2}{3} \times 3}{\frac{\sqrt{5}}{3} \times 3} = \frac{2}{\sqrt{5}}$
これもOK

【別解】

θ が鋭角で $\sin \theta = \frac{2}{3}$ であるので, 右図の直角三角形を考える。

三平方の定理より $x^2 + 2^2 = 3^2$
 $x^2 + 4 = 9$ より $x^2 = 5$ ゆえに $x = \pm \sqrt{5}$
 $x > 0$ より $x = \sqrt{5}$
よって $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$



練習9 θ は鋭角とする。 $\cos \theta = \frac{1}{3}$ のとき、 $\sin \theta$ と $\tan \theta$ の値を求めよ。

解答 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ から

移項

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

代入

$$\sin^2 \theta = \frac{8}{9} \text{ より } \sin \theta = \pm \sqrt{\frac{8}{9}} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

直角三角形の辺の長さを使って
三角比を作っているので $\sin \theta$ は正になる。

θ が鋭角なので $\sin \theta > 0$ であるから

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sin \theta \div \cos \theta$

$$\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3} \times 3}{\frac{1}{3} \times 3} = \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}$$

これもOK

また $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \div \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{3}{1} = 2\sqrt{2}$

別解

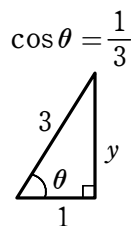
θ が鋭角で $\cos \theta = \frac{1}{3}$ であるので、右図の直角三角形を考える。

三平方の定理より $1^2 + y^2 = 3^2$

$1 + y^2 = 9$ より $y^2 = 8$ ゆえに $y = \pm \sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$

$y > 0$ より $y = 2\sqrt{2}$

よって $\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan \theta = \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}$



例題3 θ は鋭角とする。 $\tan \theta = 2$ のとき、 $\cos \theta$ と $\sin \theta$ の値を求めよ。

解答 $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ から $1 + 2^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ よって $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 5$

代入

両辺に $\cos^2 \theta$ をかけて $1 = 5 \cos^2 \theta$

$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{5}{1}$ と考えて、両辺の分子と分母を
ひっくり返すと $\frac{\cos^2 \theta}{1} = \frac{1}{5}$ となる。

さらに両辺に5で割って $\cos^2 \theta = \frac{1}{5}$

$\cos^2 \theta = \frac{1}{5}$ より $\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{5}} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$

直角三角形の辺の長さを使って
三角比を作っているので $\cos \theta$ は正になる。

θ が鋭角なので $\cos \theta > 0$ であるから

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ より両辺に $\cos \theta$ をかけて $\tan \theta \cos \theta = \sin \theta$

ゆえに $\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

別解

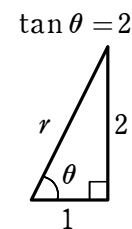
θ が鋭角で $\tan \theta = 2 = \frac{2}{1}$ であるので、右図の直角三角形を考える。

三平方の定理より $1^2 + 2^2 = r^2$

$1 + 4 = r^2$ より $r^2 = 5$ ゆえに $r = \pm \sqrt{5}$

$r > 0$ より $r = \sqrt{5}$

よって $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$



練習 10 θ は鋭角とする。 $\tan \theta = \sqrt{2}$ のとき、 $\cos \theta$ と $\sin \theta$ の値を求めよ。

[解答] $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ から $1 + (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ よって $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 3$

両辺に $\cos^2 \theta$ をかけて $1 = 3 \cos^2 \theta$ $\frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{3}{1}$ と考えて、両辺の分子と分母を

さらに両辺に3で割って $\cos^2 \theta = \frac{1}{3}$ ひっくり返すと $\frac{\cos^2 \theta}{1} = \frac{1}{3}$ となる。

$\cos^2 \theta = \frac{1}{3}$ より $\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

θ が鋭角なので $\cos \theta > 0$ であるから 直角三角形の辺の長さを使って
三角比を作っているのだから $\cos \theta$ は正になる。

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ より両辺に $\cos \theta$ をかけて $\tan \theta \cos \theta = \sin \theta$

ゆえに $\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

[別解]

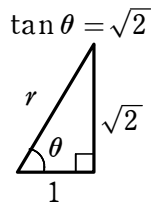
θ が鋭角で $\tan \theta = \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{1}$ であるので、右図の直角三角形を考える。

三平方の定理より $1^2 + (\sqrt{2})^2 = r^2$

$1 + 2 = r^2$ より $r^2 = 3$ ゆえに $r = \pm \sqrt{3}$

$r > 0$ より $r = \sqrt{3}$

よって $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$



[参考] (フローチャート)

■ $\sin \theta$ が分かっているとき

$$\begin{array}{ccccc} \sin \theta & \xrightarrow{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1} & \cos \theta & \xrightarrow{\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} & \tan \theta \\ & & \text{より } \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta & & \end{array}$$

■ $\cos \theta$ が分かっているとき

$$\begin{array}{ccccc} \cos \theta & \xrightarrow{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1} & \sin \theta & \xrightarrow{\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} & \tan \theta \\ & & \text{より } \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta & & \end{array}$$

■ $\tan \theta$ が分かっているとき

$$\begin{array}{ccccc} \tan \theta & \xrightarrow{1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}} & \cos \theta & \xrightarrow{\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} & \sin \theta \\ & & (\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}) & \text{より } \sin \theta = \tan \theta \cos \theta & \end{array}$$

$\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ のうち、
どれか1つが分かっていれば残りを求めることができます。

<90° - θ の三角比>

注意

以下では $\sin(90^\circ - \theta)$ などを考えていきますが、三角比では分配法則は成り立ちません。

$$\times \sin(90^\circ - \theta) = \sin 90^\circ - \sin \theta$$

もし分配法則が成り立ってしまうなら、

$$\sin(30^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ + \sin 30^\circ$$

が成り立ちます。しかし

$$\text{左辺} = \sin(30^\circ + 30^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{右辺} = \sin 30^\circ + \sin 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

となり、左辺と右辺が一致しません。

研究

三角比の表を見ていて気がつくことはありますか？

例

$\sin \theta$ も $\cos \theta$ も0より大きくて1より小さい。

$\sin \theta$ は小さい順に並んでいる。

$\cos \theta$ は大きい順に並んでいる。

$\tan \theta$ は小さい順に並んでいる。など

← 1より小さいのはなぜでしょう？

← $\sin 1^\circ$ と $\cos 89^\circ$ が同じですね。なぜでしょう？

実は $\tan \theta$ の表にも秘密があります。

直角三角形において、1つの鋭角を θ とする。

この直角三角形について右図のように辺の長さを決めると

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \dots\dots ①, \cos \theta = \frac{x}{r} \dots\dots ②,$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \dots\dots ③$$

が成り立つ。

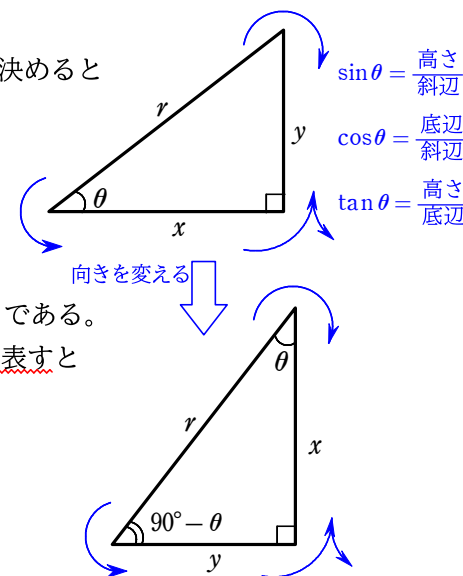
この直角三角形について θ の他の鋭角は $90^\circ - \theta$ である。

したがって、 $90^\circ - \theta$ の三角比を右図の辺の長さで表すと

$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{\text{高さ}}{\text{斜辺}} = \frac{x}{r} \dots\dots ④$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}} = \frac{y}{r} \dots\dots ⑤$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{\text{高さ}}{\text{底辺}} = \frac{x}{y} \dots\dots ⑥$$



となる。すると

$$\text{④と②より } \sin(90^\circ - \theta) = \frac{x}{r} = \cos \theta \quad \text{よって} \quad \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\text{⑤と①より } \cos(90^\circ - \theta) = \frac{y}{r} = \sin \theta \quad \text{よって} \quad \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\text{また⑥と③より } \tan(90^\circ - \theta) \times \tan \theta = \frac{x}{y} \times \frac{y}{x} = 1$$

よって $\tan(90^\circ - \theta) \times \tan \theta = 1$ より両辺を $\tan \theta$ で割って

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$$

したがって、鋭角 θ について、次の関係が成り立つ。

90° - θ の三角比

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$$

○ + △ = 90° のとき

$$\sin \bigcirc = \cos \triangle$$

$$\cos \bigcirc = \sin \triangle$$

$$\tan \bigcirc = \frac{1}{\tan \triangle}$$

○ + △ = 90° より

$$\bigcirc = 90^\circ - \triangle$$

となります。よって

$$\sin \bigcirc = \sin(90^\circ - \triangle) = \cos \triangle$$

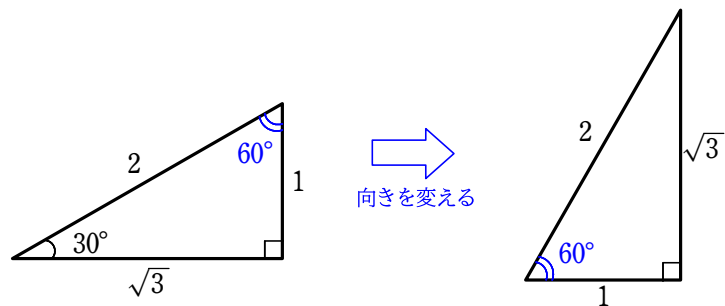
となります。

他も同様です。

○が△になると、

sin が cos に変わると考えてもよい。

$$\sin \bigcirc = \cos \triangle$$



$$\begin{array}{ccc}
 \sin 30^\circ = \frac{1}{2} & \xleftrightarrow{\text{同じ}} & \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} & \xleftrightarrow{\text{同じ}} & \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\
 \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} & \xleftrightarrow{\text{逆数の関係}} & \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \\
 & \text{(分子と分母をひっくり返すと同じになる)} &
 \end{array}$$

例 5 (1) $\sin 53^\circ = \sin(90^\circ - 37^\circ) = \cos 37^\circ$ 三角比の表で確認してみよう
 $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$ で θ を 37° とした

(2) $\cos 80^\circ = \cos(90^\circ) = \sin 10^\circ$
 $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$ で θ を 10° とした

(3) $\tan 75^\circ = \tan(90^\circ - 15^\circ) = \frac{1}{\tan 15^\circ}$ 三角比の表から計算してみよう
 $\frac{1}{\tan 15^\circ} = \frac{1}{0.2679}$ 終
 $\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$ で θ を 15° とした
 $= 1 \div 0.2679$
 $= 3.732 \dots$

練習 11 次の に, $\sin$, $\cos$, $\tan$ のうち適するものを入れよ。

(1) $\sin 62^\circ = \frac{\quad}{\quad} 28^\circ$

(2) $\cos 78^\circ = \frac{\quad}{\quad} 12^\circ$

(3) $\tan 67^\circ = \frac{1}{\frac{\quad}{\quad} 23^\circ}$

解答

(1) $\sin 62^\circ = \sin(90^\circ - 28^\circ) = \cos 28^\circ$ よって $\cos$
 $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$ で θ を 28° とした

(2) $\cos 78^\circ = \cos(90^\circ - 12^\circ) = \sin 12^\circ$ よって $\sin$
 $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$ で θ を 12° とした

(3) $\tan 67^\circ = \tan(90^\circ - 23^\circ) = \frac{1}{\tan 23^\circ}$ よって $\tan$
 $\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$ で θ を 23° とした

練習 12 次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ。

(1) $\sin 64^\circ$

(2) $\cos 58^\circ$

(3) $\tan 83^\circ$

解答

(1) $\sin 64^\circ = \sin(90^\circ - 26^\circ) = \cos 26^\circ$
 $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$ で θ を 26° とした

(2) $\cos 58^\circ = \cos(90^\circ - 32^\circ) = \sin 32^\circ$
 $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$ で θ を 32° とした

(3) $\tan 83^\circ = \tan(90^\circ - 7^\circ) = \frac{1}{\tan 7^\circ}$
 $\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$ で θ を 7° とした