

第4章「図形と計量」第1節 三角比 1 三角比

現在はアスワン・ハイ・ダム建設によって氾濫することがなくなったエジプト「ナイル川」。

しかしダムが建設される以前は、モンスーンの影響で毎年夏になると必ず河川氾濫を起こしていました。

紀元前3000年ごろのエジプトでは、氾濫のたびに区画がめちゃくちゃになってしまうので、

河川反乱の度に測量を行い、

区画を作り直していたそうです。



問題

好きな数を2つ浮かべてください。ただし異なる数にしましょう。

次に、思い浮かべた片方を底辺、もう片方を高さとする直角三角形を考えます。

さて、直角でない角は何度ですか？

また紀元前2500年ごろには水準測定器・垂直確定器・定規といった、測量に必要な機器がすでに使われており、ピラミッド建設の測量技術にも使われました。そのおかげでピラミッドは完全な水平が保たれ、東西南北の誤差は1cm以内に納まっています。古代エジプトで発達した測量技術はローマ、ギリシャ、アラビアに受け継がれ広まっていきました。

(<https://www.thg.co.jp/douyo/shikaku/sokuryoshiho/surveying-technique-history/>)

垂直がなければ家が建ちません。

家がなければ生活ができません。

昔の人にとって、図形は生活と密接に関係していました。コンピュータも電卓も何もないときにどうやって正確な図形を描いていたのでしょうか。

また、暦もない時代にどうやって川の氾濫に備えるのでしょうか。

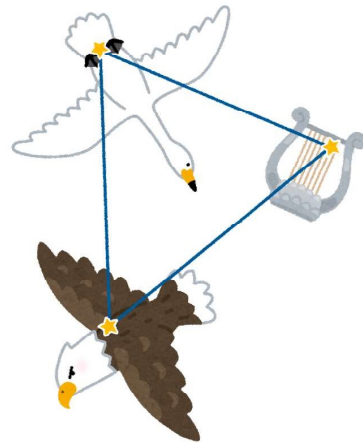
エジプトの文明は、太陽崇拝を中心としたものでした。

祭祀の必要性から古代エジプト人は、太陽の天球上

における年周運動の存在を学び、惑星を発見し、

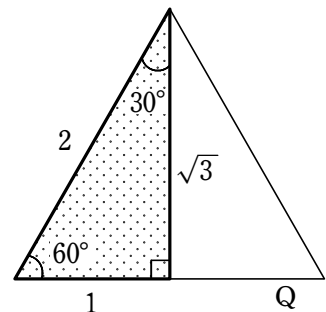
黄道概念を生みだしました。ナイル川が氾濫する

時期とシリウスが日出直前に薄明の中に昇ってくる時期が一致するという経験から、1年を365日とする太陽暦が編み出されました。古代エジプトでは、この365日を2つに分けて、360日と5日とし、その後、4年に一度、うるう日をおいた暦を完成させました。これが1年の起源です。



(<http://www.bao.city.ibara.okayama.jp/stardb/his/data/his0075.html>)

1 辺の長さが 2 の正三角形を半分に折ってできる直角三角形を考えると、3 辺の長さや角は、右の図のようになっている。以下では、直角三角形の 2 辺の長さと角の関係に着目してみよう。



<正弦・余弦・正接>

右の図の 2 つの直角三角形は、2 組の角がそれぞれ等しいので相似である。

直角三角形 ABC における

$\frac{BC}{AB}, \frac{AC}{AB}, \frac{BC}{AC} \dots\dots ①$

高さと斜辺の比、底辺と斜辺の比、高さと底辺の比

の値について考える。

$\triangle PQR \sim \triangle ABC$ より $PQ : AB = QR : BC$

が成り立つ。ゆえに、

$PQ \times BC = AB \times QR$ が成り立つ。

この式の両辺を $AB \times PQ$ で割ると

$\frac{PQ \times BC}{AB \times PQ} = \frac{AB \times QR}{AB \times PQ}$ より $\frac{BC}{AB} = \frac{QR}{PQ}$ が成り立つ。

$PQ=2$ のとき $QR=1$ となるから $\frac{BC}{AB} = \frac{QR}{PQ} = \frac{1}{2}$ が成り立つ。

同様に、それぞれ次のようになる。

$\frac{BC}{AB} = \frac{QR}{PQ} = \frac{1}{2}$

$\frac{AC}{AB} = \frac{PR}{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{BC}{AC} = \frac{QR}{PR} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

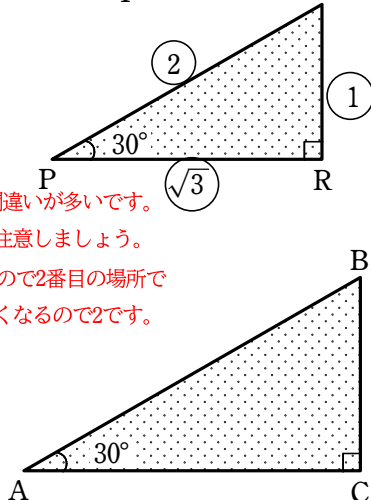
三角比は有理化しなくてよい

これらから、次のことがわかる。

① の各値は、直角三角形 ABC の大きさに関係なく、いずれも一定になる。

相似な図形では、対応する線分の長さの比はすべて等しい。

注意 1:2:3 という間違いが多いです。それぞれの場所に注意しましょう。
 $\sqrt{3}$ は 1.7 くらいなので 2 番目の場所です。斜辺は一番長くなるので 2 です。



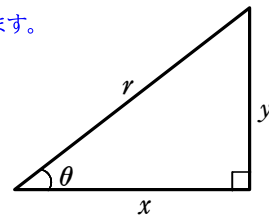
$0^\circ < \theta < 90^\circ$ の範囲にある角 θ を **鋭角** という。
 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ の範囲にある角 θ を **鈍角** という。

角度を表す文字でよく θ を使います。シータと読みます。

直角三角形の鋭角の 1 つを θ とし、斜辺の長さを r 、他の辺の長さを右の図のように、 x, y とするとき、

$\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, \frac{y}{x}$

高さと斜辺の比、底辺と斜辺の比、高さと底辺の比



の各値は、三角形の大きさに関係なく、いずれも角 θ の大きさだけで決まる。

これらを、それぞれ θ の

正弦 (sine), 余弦 (cosine), 正接 (tangent)

sin 角度 で一つの記号です。

といい、 $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ と書く。

sin=0.1 などとは書きません。

正弦を **サイン**、余弦を **コサイン**、正接を **タンジェント** ともいう。

正弦、余弦、正接をまとめて **三角比** という。

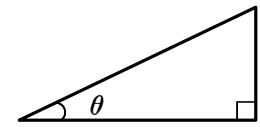
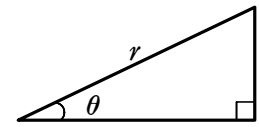
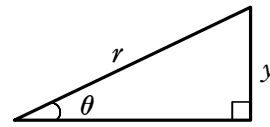
三角比の定義

注意 三角形は直角が右下、 θ が左下で考える。

$\sin \theta = \frac{y}{r}$ 高さと斜辺の比

$\cos \theta = \frac{x}{r}$ 底辺と斜辺の比

$\tan \theta = \frac{y}{x}$ 高さと底辺の比



参考 (三角比の覚え方)

筆記体って知っていますか？

今は中学校で教えなくなり

ました(僕が中学生の頃は

やっていましたね)。

英語を速く書く書き方です。

sin の s の小文字

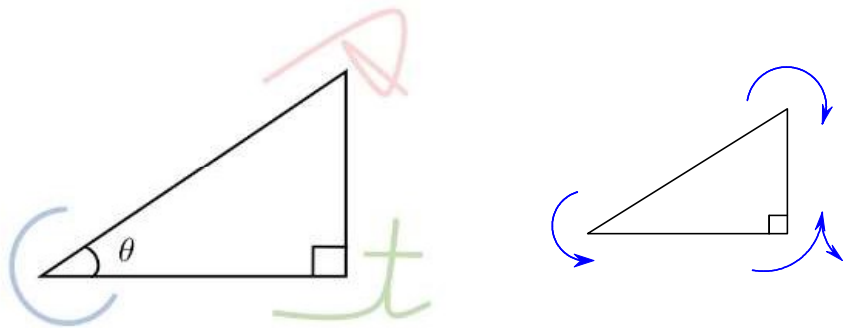
cos の c の小文字

tan の t の小文字

に注目しましょう。



(覚え方)



https://lets-math.com/trigonometric_ratio_table/

例1 θ の正弦, 余弦, 正接

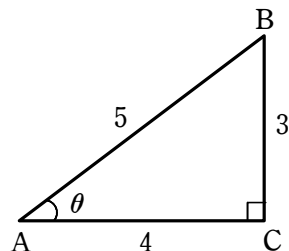
右の図の直角三角形 ABC において

$$\sin \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}$$

終



例2 θ の正弦, 余弦, 正接

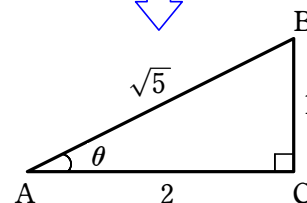
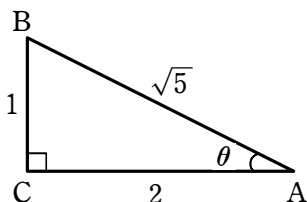
右の図の直角三角形 ABC において

$$\sin \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\tan \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$$

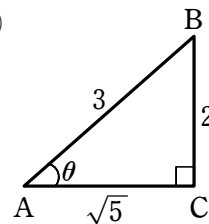
終



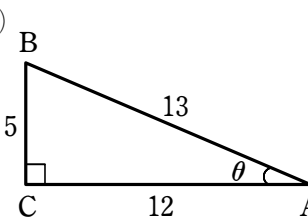
注意 三角形は直角が右下, θ が左下で考える。

練習1 下の図において, $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を, それぞれ求めよ。

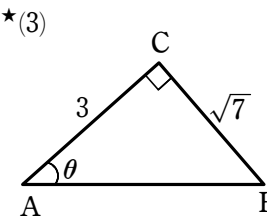
(1)



(2)



★(3)



解答

(1) $\sin \theta = \frac{2}{3}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

(2) $\sin \theta = \frac{5}{13}$, $\cos \theta = \frac{12}{13}$, $\tan \theta = \frac{5}{12}$

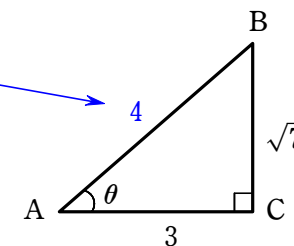
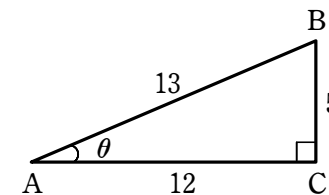
(3) 三平方の定理より

$AB^2 = AC^2 + BC^2$ が成り立つ。

よって $AB^2 = 3^2 + (\sqrt{7})^2 = 9 + 7 = 16$

$AB = \pm \sqrt{16} = \pm 4$ ここで $AB > 0$ より $AB = 4$

よって $\sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos \theta = \frac{3}{4}$, $\tan \theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$

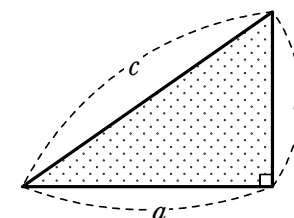


三平方の定理

定理 直角三角形の直角をはさむ2辺の長さを a , b , 斜辺の長さを c とすると, 次の等式が成り立つ。

$$a^2 + b^2 = c^2$$

(底辺)² + (高さ)² = (斜辺)²



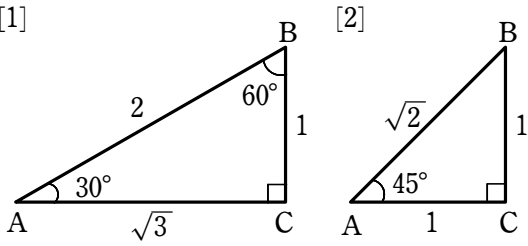
<30°, 45°, 60° の三角比>

30°, 45°, 60° の三角比は、下の図 [1], [2] から求められる。

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ [1]

$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

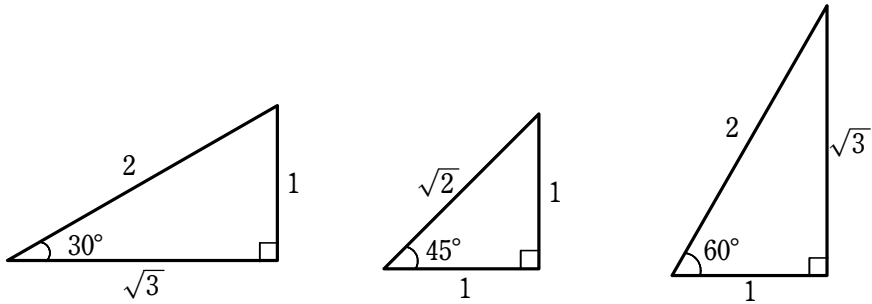


練習 2 右の表の空らんに適する数値を入れて、表を完成させよ。

θ	30°	45°	60°
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$		
$\cos \theta$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$\tan \theta$			$\sqrt{3}$

解答

θ	30°	45°	60°
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$



$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$

$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

参考(この表の覚え方)

θ	30°	45°	60°
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

$\sqrt{1}$ が1であることと、 $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ となることを利用します。

すると $\sin \theta$ は分子が $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ となり、 $\cos \theta$ は分子が $\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{1}$ となります。

また、 $\tan \theta$ は $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ なので(後で習う公式です)、表の $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の欄で分数を作ると $\tan \theta$ となります。

＜三角比の表＞

三角比 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値は, θ に対して決まっている。巻末の見返しには, 1° ごとの角 θ について, それらの値を表にして載せた。

この表の値は, 小数第 5 位を四捨五入して小数第 4 位まで示したものである。

たとえば

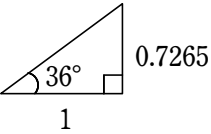
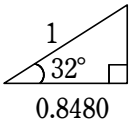
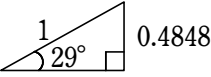
$\sin 29^\circ = 0.4848,$

$\cos 32^\circ = 0.8480,$

$\tan 36^\circ = 0.7265$

として使う。

四捨五入した値なので, 正確にはここはイコールではない。



θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0.5$ ぴったりであるが, 他と合わせて 0.500 と書いてある。

練習 3 次の値を三角比の表から求めよ。

(1) $\sin 12^\circ$

(2) $\cos 48^\circ$

(3) $\tan 75^\circ$

【解答】

(1) $\sin 12^\circ = 0.2079$

(2) $\cos 48^\circ = 0.6691$

(3) $\tan 75^\circ = 3.7321$

【参考】

好きな数を 2 つ浮かべてください。ただし異なる数にしましょう。
次に, 思い浮かべた片方を底辺, もう片方を高さとする直角三角形を考えます。
さて, 直角でない角は何度ですか?

→ 長さや角度は非常に相性が悪いですが, 三角比の表を使うとだいたいの大きさはわかります。

例 3 右の図における θ のおよその大きさ

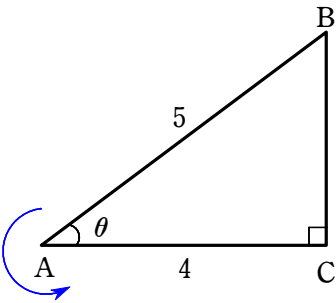
図より $\cos \theta = \frac{4}{5} = 0.8$

三角比の表から, $\cos \theta$ の値が 0.8 に

近い θ を求めると $\theta \approx 37^\circ$ (終)

$\cos 36^\circ$ より $\cos 37^\circ$ の方が 0.8 に近い

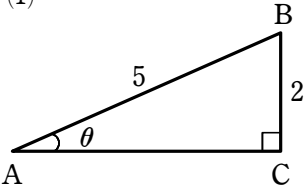
θ	$\cos \theta$
35°	0.8192
36°	0.8090
37°	0.7986



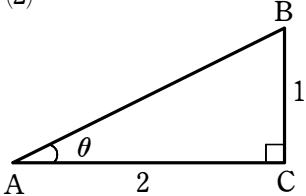
【注意】 $a \approx b$ は, 「 a と b がほぼ等しい」ということを意味する。

練習 4 下の図における θ のおよその大きさを, 三角比の表を用いて求めよ。

(1)



(2)

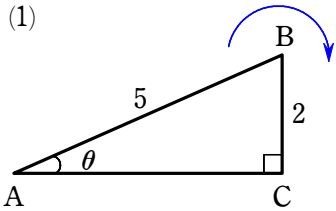


【解答】

(1) $\sin \theta = \frac{2}{5} = 0.4$

三角比の表から $\theta \approx 24^\circ$

(1)

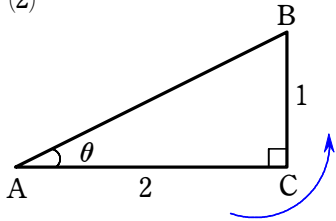


θ	$\sin \theta$
23°	0.3907
24°	0.4067
25°	0.4226

(2) $\tan \theta = \frac{1}{2} = 0.5$

三角比の表から $\theta \approx 27^\circ$

(2)



θ	$\tan \theta$
26°	0.4877
27°	0.5095
28°	0.5317

＜三角比の応用＞

右の図の直角三角形において、

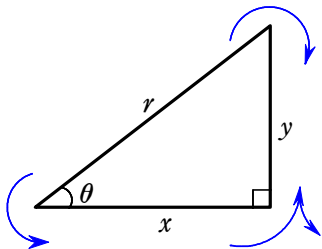
$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

であるから、両辺に r をかけると
次が成り立つ。

$$y = r \times \sin \theta$$

また、 $\cos \theta = \frac{x}{r}$ 、 $\tan \theta = \frac{y}{x}$ であるから、同じように考えると次が成り立つ。

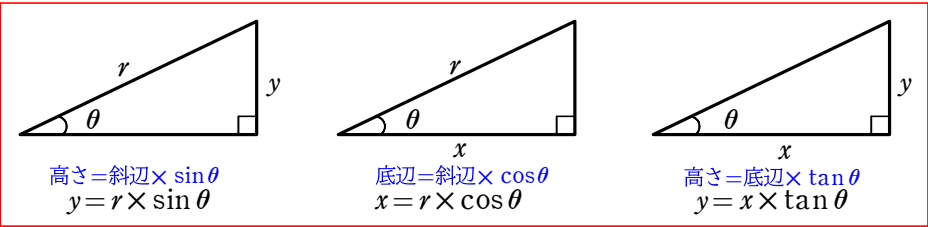
$$x = r \times \cos \theta, \quad y = x \times \tan \theta$$



$$\sin \theta = \frac{\text{高さ}}{\text{斜辺}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{高さ}}{\text{底辺}}$$



このように、直角三角形の1つの鋭角の大きさと1辺の長さがわかっている場合、三角比を用いて、他の辺の長さを求めることができる。

注意 公式として覚えるというよりは、自分で作ればよい。たとえば「斜辺と角度が分かっている」問題で「底辺」を求めたいとする。「斜辺と底辺を使う三角比→cosだ」ということで「 $\cos \theta = \frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}}$ 」から両辺に「斜辺」をかけて「底辺 = 斜辺 × cos θ」とすればよい。

例 4 辺 BC の長さを求める式

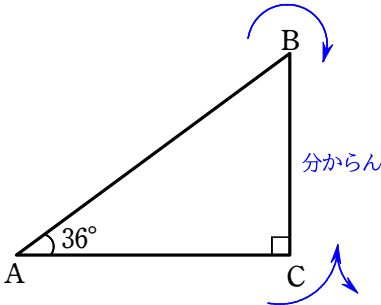
右の図の直角三角形 ABC において、辺 BC の長さは次のようにして求められる。

① AB の長さがわかっている場合

$$BC = AB \times \sin 36^\circ$$

② AC の長さがわかっている場合

$$BC = AC \times \tan 36^\circ$$



終

練習 5 例 4 の直角三角形 ABC において、辺 AC の長さを表す式は次のようになる。

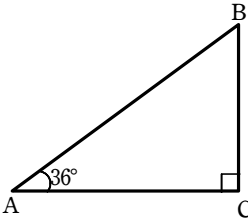
に sin, cos, tan のうち適するものを入れよ。

$$AC = AB \times \text{} 36^\circ$$

$$\cos \theta = \frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}}$$

$$AC = BC \times \text{} 54^\circ$$

$$\tan \theta = \frac{\text{高さ}}{\text{底辺}}$$

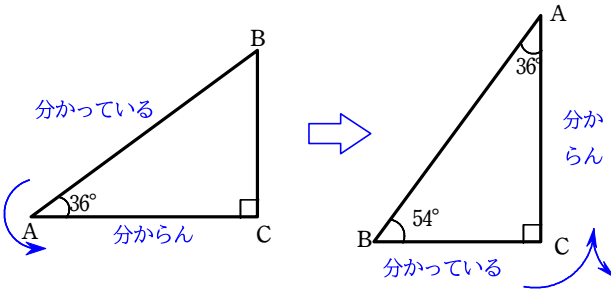


解答

$$AC = AB \times \cos 36^\circ,$$

$$AC = BC \times \tan 54^\circ$$

よって、上から順に cos, tan



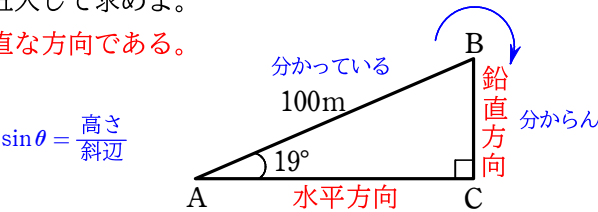
例題 1 傾斜角 19° の坂をまっすぐに 100 m 登るとき、鉛直方向には何 m 上がることになるか。1 m 未満を四捨五入して求めよ。

補足 鉛直方向とは、水平方向と垂直な方向である。

解答 右の図において

$$\begin{aligned} BC &= AB \times \sin 19^\circ \\ &= 100 \times 0.3256 \\ &= 32.56 \approx 33 \end{aligned}$$

答 33 m



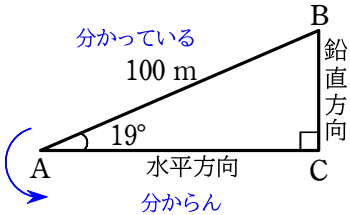
練習 6 例題 1 において、水平方向には何 m 進むことになるか。1 m 未満を四捨五入して求めよ。

【解答】

右の図において

$$\begin{aligned} AC &= AB \times \cos 19^\circ \\ &= 100 \times 0.9455 \\ &= 94.55 \approx 95 \end{aligned}$$

よって、水平方向に 95 m 進むことになる。



【参考】こんな標識見たことありませんか？

これは坂道の勾配を示す標識です。

9%とは直角三角形において高さが底辺の9%ということなので、底辺が100mならば高さが $100 \times 0.09 = 9\text{m}$ ということです。つまり、 $\tan \theta = 0.09$ ということです。

三角比の表で調べてみると $\theta \approx 5^\circ$ となります。

イメージしやすくするために半田のエディオンの坂道を考えましょう。

「坂道 勾配 地図」で検索すると「傾斜角度を調べる地図」というサイトが出てくるので、そこで調べるといろいろな坂道の傾斜角度を調べることができます。

調べると半田のエディオンの坂道は2.6%です。

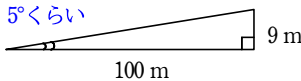
$\tan \theta = 0.026$ となる θ を三角比の表で調べてみると θ は 1° と 2° の間となります。

角度はたいしたことなくても、結構急な坂道ですね。

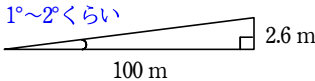
僕が小さい頃、伊豆にあるサイクルスポーツセンターの5kmサーキットを周った記憶があります。

途中に崖のような坂道がありましたが、ホームページを調べてみたら12%(約7°)でした。

人間の感覚と実際の角度って違うんだなと感じました。



傾斜角度を調べる地図



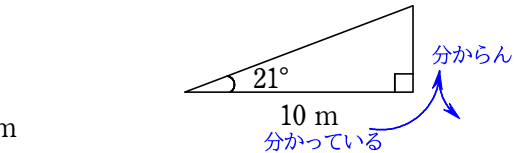
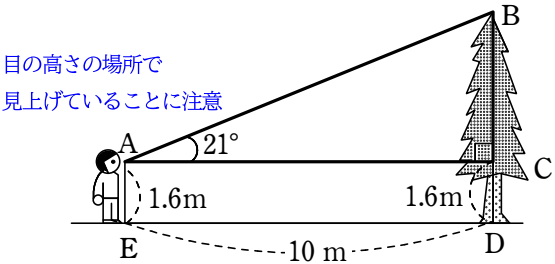
応用例題 1 木の根もとから水平に 10 m 離れた地点に立って木の先端を見上げると、水平面とのなす角が 21° であった。目の高さを 1.6 m として、木の高さを求めよ。ただし、小数第 2 位を四捨五入せよ。

【考え方】 まず、目の高さより上にある部分の木の高さを求める。

【解答】 右の図において

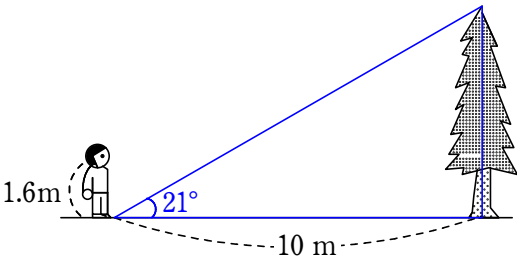
$$\begin{aligned} BC &= AC \times \tan 21^\circ \\ &= 10 \times 0.3839 \\ &= 3.839 \\ \text{よって、木の高さ } BD & \\ BD &= BC + CD \\ &= 3.839 + 1.6 \\ &= 5.439 \approx 5.4 \end{aligned}$$

答 5.4 m



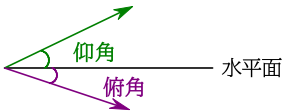
【注意】

この問題で右図のように考える人がいます。地面から測った角が 21° ではありません。目の高さから測った角が 21° なので、解答のように長方形の上に直角三角形がのっている台形を考えましょう。



【参考】

もう使われなくなった言葉ですが、水平面に対して見上げた角を仰角(ぎょうかく)といい、見下ろした角を俯角(ふかく)といいます。



練習 7 鉄塔の先端の真下から水平に 20 m 離れた地点に立って鉄塔の先端を見上げると、水平面とのなす角が 40° であった。目の高さを 1.6 m として、鉄塔の高さを求めよ。ただし、小数第 2 位を四捨五入せよ。

【解答】

右の図において

$$\begin{aligned} BC &= AC \times \tan 40^\circ \\ &= 20 \times 0.8391 \\ &= 16.782 \end{aligned}$$

よって、鉄塔の高さ BD は

$$\begin{aligned} BD &= BC + CD = 16.782 + 1.6 \\ &= 18.382 \approx 18.4 \end{aligned}$$

答 18.4 m

【研究】教室の高さや建物の高さを計算で求めてみよう。

