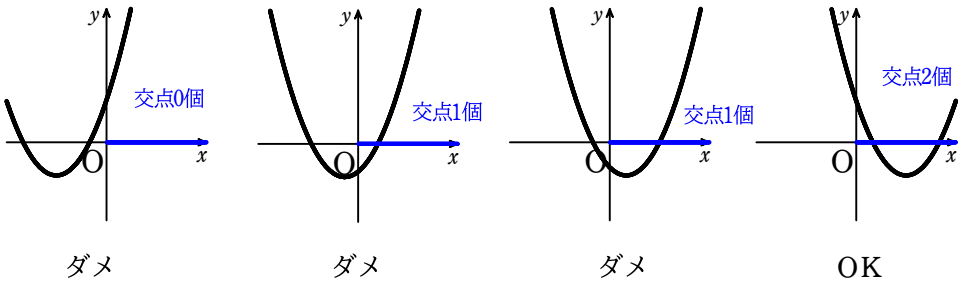


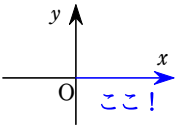
第3章「2次関数」第2節 2次関数の値の変化 研究 2次関数のグラフと x 軸の正の部分が交わる条件

2 次関数 $y = x^2 - 2mx - m + 6$ のグラフと x 軸の正の部分が、異なる 2 点で交わるときの、定数 m の値の範囲を求めてみよう。
判別式 $D > 0$ だけでは間違いです

参考



	グラフの軸が y 軸の左側	グラフの軸が y 軸の右側
グラフと y 軸の交点の y 座標が正		
グラフと y 軸の交点の y 座標が負		



解答

関数の式を変形すると

$y = x^2 - 2mx - m + 6$ ← $a=1, b=-2m, c=-m+6$
 $= (x-m)^2 - m^2 - m + 6$

よって

$y = (x-m)^2 - m^2 - m + 6$

グラフは下に凸の放物線で、その軸

は直線 $x = m$ 、頂点は $(m, -m^2 - m + 6)$ である。

グラフと x 軸の正の部分が、

異なる 2 点で交わるのは、次の [1], [2], [3] が同時に成り立つときである。

[1] グラフと x 軸が異なる 2 点で交わる。 ← $D > 0$

[2] グラフの軸が y 軸の右側にある。 ← 軸 > 0

[3] グラフと y 軸の交点の y 座標が正である。 ← $x=0$ のとき $y > 0$

[1] より、2 次方程式 $x^2 - 2mx - m + 6 = 0$ の判別式を D とすると、 $D > 0$ である。

$D = (-2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m + 6) = 4m^2 + 4m - 24$

よって $D > 0$ より $4m^2 + 4m - 24 > 0$

両辺4で割って $m^2 + m - 6 > 0$ すなわち $(m+3)(m-2) > 0$

これを解くと $m < -3, 2 < m$ ①

[2] から軸は $x = m$ より $m > 0$ ②

[3] から $y = x^2 - 2mx - m + 6$ に $x = 0$ を代入して

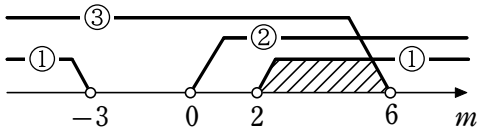
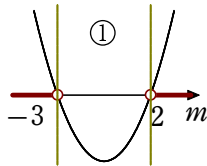
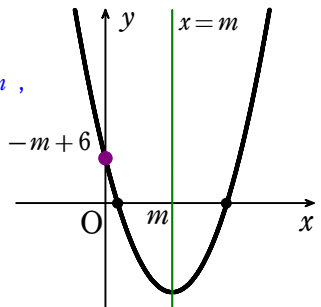
$y = 0^2 - 2m \cdot 0 - m + 6 = -m + 6$

よって $x = 0$ のとき、 $y > 0$ であるから $-m + 6 > 0$

ゆえに $-m > -6$ 両辺に (-1) をかけて $m < 6$ ③

①, ②, ③ の共通範囲を求めて

$2 < m < 6$



練習 1 2 次関数 $y=x^2-4mx-5m+6$ のグラフと x 軸の正の部分が、異なる 2 点で交わるとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

関数の式を変形すると

$$y=x^2-4mx-5m+6$$

$$=(x-2m)^2-(2m)^2-5m+6$$

$$=(x-2m)^2-4m^2-5m+6$$

よって

$$y=(x-2m)^2-4m^2-5m+6$$

グラフは下に凸の放物線で、その軸は直線 $x=2m$

頂点は $(2m, -4m^2-5m+6)$ である。

グラフと x 軸の正の部分が、異なる 2 点で交わるのは、次の [1], [2], [3] が同時に成り立つときである。

[1] グラフと x 軸が異なる 2 点で交わる。 $\leftarrow D>0$

[2] グラフの軸が y 軸の右側にある。 $\leftarrow$ 軸 >0

[3] グラフと y 軸の交点の y 座標が正である。 $\leftarrow x=0$ のとき $y>0$

[1] より、2 次方程式 $x^2-4mx-5m+6=0$ の判別式を D とすると、 $D>0$ である。

$$D=(-4m)^2-4\cdot 1\cdot (-5m+6)=16m^2+20m-24$$

よって $D>0$ より $16m^2+20m-24>0$

両辺4で割って $4m^2+5m-6>0$

すなわち $(m+2)(4m-3)>0$

これを解くと

$$m<-2, \frac{3}{4}<m \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

[2] から軸は $x=2m$ より $2m>0$

両辺2で割って $m>0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

[3] から $y=x^2-4mx-5m+6$ に $x=0$ を代入して

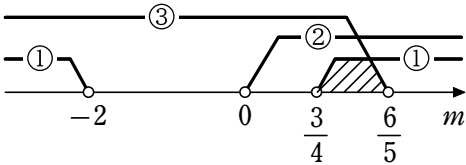
$$y=0^2-4m\cdot 0-5m+6=-5m+6$$

よって $x=0$ のとき、 $y>0$ であるから $-5m+6>0$

ゆえに $-5m>-6$ 両辺 (-5) で割って $m<\frac{6}{5} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$

①, ②, ③ の共通範囲を求めて

$$\frac{3}{4}<m<\frac{6}{5}$$



$$4m^2+5m-6=(m+2)(4m-3)$$

①

$(m+2)(4m-3)=0$ となるのは $m+2=0, 4m-3=0$ よって、 $m=-2$ と $m=\frac{3}{4}$