第３章「２次関数」第３節　２次方程式と２次不等式　７　２次不等式

これまでは，2 次関数のグラフと x 軸の位置関係について調べた。
ここでは，関数のグラフを利用して，不等式を解くことを考えよう。

グラフを使わなくても解けるが，
2次不等式をとくための準備です

＜１次不等式と１次関数＞

1 次不等式の解を，1 次関数のグラフを用いて考えてみよう。

$2x<6$　両辺を 2 で割って $x<3$

例 19　1 次不等式 $2x-6<0$ の解

1 次関数 $y=2x-6$ のグラフは右の図のような直線である。この直線と x 軸の交点の x 座標は，1 次方程式

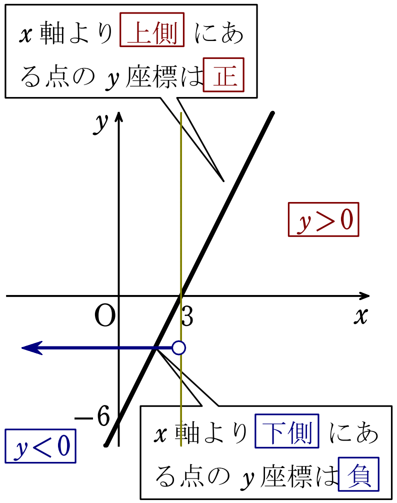
$2x=6$
両辺2で割って
$x=3$

$$2x-6=0$$

の解 $x=3$ である。

水中

右の図から，$y=2x-6$ について $y<0$ となる x の値の範囲は $x<3$ である。
よって，1 次不等式 $2x-6<0$ の解は，$x<3$ である。 終



x	$x<3$	3	$3<x$
$y=2x-6$	$-$	0	$+$
	水中		空中

1 次不等式 $2x-6>0$ の解は，
$y=2x-6$ について，$y>0$ となる x の値の範囲で，
$x>3$ である。

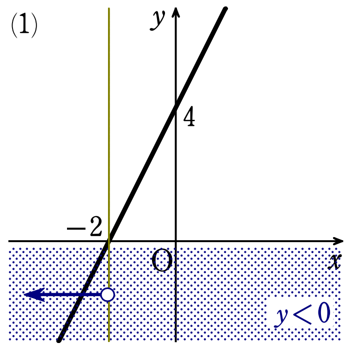
練習 33　1 次関数のグラフを利用して，次の 1 次不等式の解を求めよ。

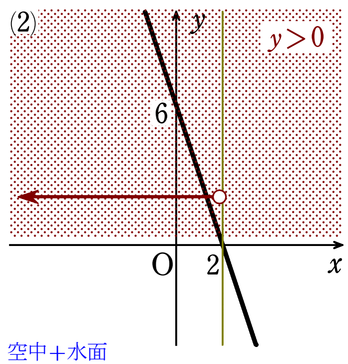
(1)　$2x+4<0$　　　(2)　$-3x+6>0$　　　(3)　$4x-3\geqq 0$

解答

(1)　$2x+4<0$ の解は，$y=2x+4$ のグラフで $y<0$ (水中) となる x の値の範囲である。
$y=2x+4$ のグラフで $y=0$ となるのは $2x+4=0$ より $2x=-4$ 両辺2で割って
$x=-2$　よって，下の図から　$x<-2$

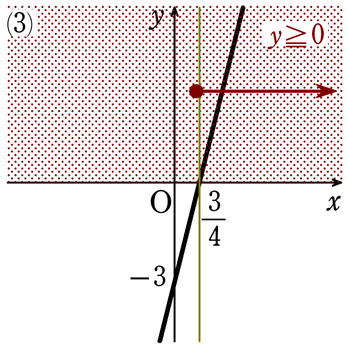
(2)　$-3x+6>0$ の解は，$y=-3x+6$ のグラフで $y>0$ (空中) となる x の値の範囲である。
$y=-3x+6$ のグラフで $y=0$ となるのは $-3x+6=0$ より $-3x=-6$
両辺 -3 で割って $x=2$　よって，下の図から　$x<2$

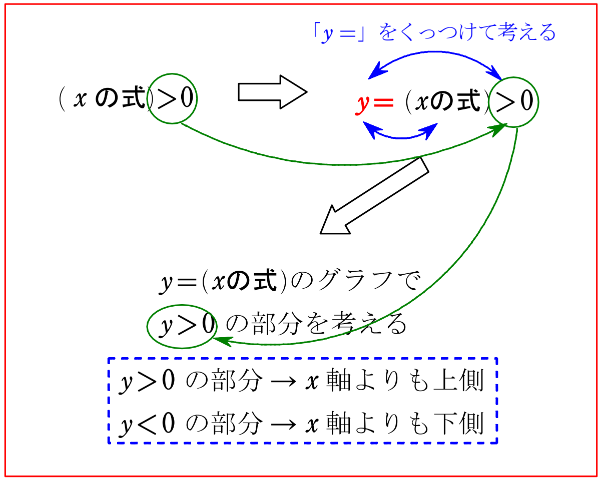




空中＋水面

(3)　$4x-3\geqq 0$ の解は，$y=4x-3$ のグラフで $y\geqq 0$ となる x の値の範囲である。
$y=4x-3$ のグラフで $y=0$ となるのは $4x-3=0$ より $4x=3$ 両辺4で割って
$x=\dfrac{3}{4}$　よって，下の図から　$x\geqq \dfrac{3}{4}$





(イメージ)
$y>0$ …… 空中
$y=0$ (x軸) …… 水面
$y<0$ …… 水中

＜２次不等式と２次関数＞

不等式のすべての項を左辺に移項して整理したとき，

$$ax^2+bx+c>0,\quad ax^2+bx+c\leqq 0$$

などのように，左辺が x の２次式になる不等式を，x の **２次不等式** という。
ただし，a，b，c は定数で，$a\neq 0$ とする。
２次関数のグラフを利用して，２次不等式を解いてみよう。

① ２次関数のグラフが x 軸と異なる２点で交わる場合

２次関数のグラフが x 軸と異なる２点で交わるとき，その２次関数の値の符号について調べよう。

例 20　２次関数 $y=x^2-6x+5$ の値の符号

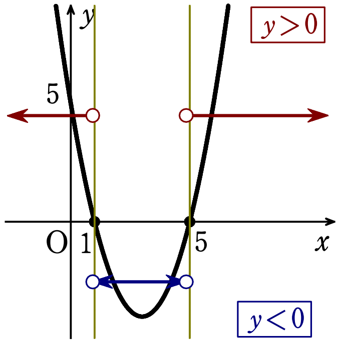
この関数のグラフは，右の図のように x 軸と異なる２点で交わる。
交点の x 座標は，２次方程式

$$x^2-6x+5=0$$

の実数解 $x=1,\ 5$ である。

$x^2-6x+5=0$
$(x-1)(x-5)=0$
$x=1,5$

右の図から，$y=x^2-6x+5$ の値の符号について，次の表が得られる。



x	$x<1$	1	$1<x<5$	5	$5<x$
$y=x^2-6x+5$	＋	0	−	0	＋

空中　水中　空中

終

例 20 の表から，次のことがいえる。

水中

２次不等式 $x^2-6x+5<0$ の解は，$y=x^2-6x+5$ について，$y<0$ となる x の値の範囲であるから，$1<x<5$ である。

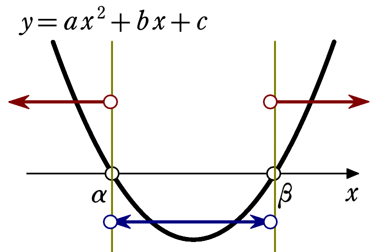
空中

２次不等式 $x^2-6x+5>0$ の解は，$y=x^2-6x+5$ について，$y>0$ となる x の値の範囲であるから，$x<1$，$5<x$ である。

$a>0$ のとき，２次関数
$y=ax^2+bx+c$ のグラフが，右の図のように x 軸と異なる２点で交わるとする。
このとき，次のことがいえる。

２次不等式 $ax^2+bx+c>0$ の解は
$x<\alpha$，$\beta<x$

２次不等式 $ax^2+bx+c<0$ の解は
$\alpha<x<\beta$



$ax^2+bx+c=0$ の
実数解が　α，β

α←アルファと読む
β←ベータと読む

注意　２次不等式 $ax^2+bx+c\geqq 0$ の解は　$x\leqq\alpha$，$\beta\leqq x$
２次不等式 $ax^2+bx+c\leqq 0$ の解は　$\alpha\leqq x\leqq\beta$

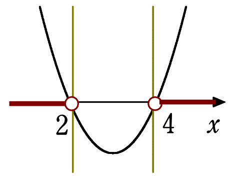
x 軸との交点を求めるために，「$=0$」をくっつけて方程式を解く。

例 21　(1)　**２次不等式 $(x-2)(x-4)>0$ を解く。**

$(x-2)(x-4)=0$ を解くと　$x=2,\ 4$
$y=(x-2)(x-4)$ のグラフで $y>0$ となる x の値の範囲を求めて

空中

$$x<2,\ 4<x$$



(2)　**２次不等式 $(x+2)(x-2)\leqq 0$ を解く。**

$(x+2)(x-2)=0$ を解くと

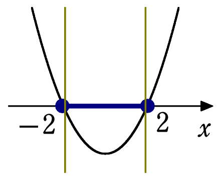
$$x=-2,\ 2$$

水中＋水面

$y=(x+2)(x-2)$ のグラフで $y\leqq 0$ となる x の値の範囲を求めて

$$-2\leqq x\leqq 2$$

終



練習 34　次の 2 次不等式を解け。

(1)　$(x-1)(x-3)>0$　　(2)　$(x+2)(x-5)<0$

(3)　$(x+1)(x-2)\geqq 0$　　(4)　$x(x+1)\leqq 0$

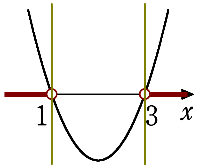
解答

(1)　$(x-1)(x-3)=0$ を解くと　$x=1,\ 3$

$y=(x-1)(x-3)$ のグラフで $y>0$ となる x の値の範囲を求めて

空中

$$x<1,\ 3<x$$

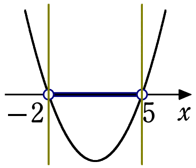


(2)　$(x+2)(x-5)=0$ を解くと　$x=-2,\ 5$

$y=(x+2)(x-5)$ のグラフで $y<0$ となる x の値の範囲を求めて

水中

$$-2<x<5$$

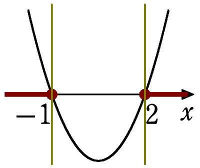


(3)　$(x+1)(x-2)=0$ を解くと　$x=-1,\ 2$

$y=(x+1)(x-2)$ のグラフで $y\geqq 0$ となる x の値の範囲を求めて

空中＋水面

$$x\leqq -1,\ 2\leqq x$$



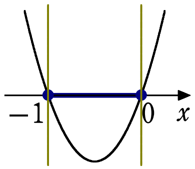
$(x-0)(x+1)=0$ と考える

(4)　$x(x+1)=0$ を解くと　$x=-1,\ 0$

$y=x(x+1)$ のグラフで $y\leqq 0$ となる x の値の範囲を求めて

水中＋水面

$$-1\leqq x\leqq 0$$



練習 35　次の 2 次不等式を解け。

(1)　$x^2-5x+6>0$　　(2)　$x^2-x-12<0$

(3)　$x^2+4x\geqq 0$　　(4)　$x^2\leqq 9$

解答

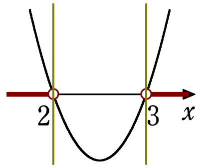
(1)　$x^2-5x+6>0$ より　$(x-2)(x-3)>0$

$(x-2)(x-3)=0$ を解くと　$x=2,\ 3$

$y=(x-2)(x-3)$ のグラフで $y>0$ となる x の値の範囲を求めて

空中

$$x<2,\ 3<x$$



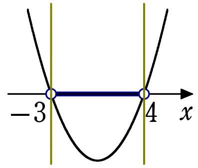
(2)　$x^2-x-12<0$ より　$(x+3)(x-4)<0$

$(x+3)(x-4)=0$ を解くと　$x=-3,\ 4$

$y=(x+3)(x-4)$ のグラフで $y<0$ となる x の値の範囲を求めて

水中

$$-3<x<4$$



(3)　$x^2+4x\geqq 0$ より　$x(x+4)\geqq 0$

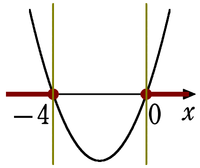
$(x-0)(x+4)=0$ と考える

$x(x+4)=0$ を解くと　$x=-4,\ 0$

$y=x(x+4)$ のグラフで $y\geqq 0$ となる x の値の範囲を求めて

空中＋水面

$$x\leqq -4,\ 0\leqq x$$



$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

$x^2-3^2=(x+3)(x-3)$

(4)　$x^2\leqq 9$ より　$x^2-9\leqq 0$

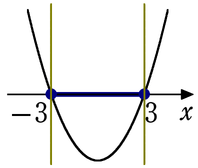
すなわち　$(x+3)(x-3)\leqq 0$

$(x+3)(x-3)=0$ を解くと　$x=\pm 3$

$y=(x+3)(x-3)$ のグラフで $y\leqq 0$ となる x の値の範囲を求めて

水中＋水面

$$-3\leqq x\leqq 3$$



注意

$x^2\leqq 9$ を $x\leqq \pm 3$ としてはいけません。有名な間違いです。

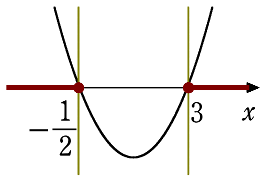
例題 11　次の 2 次不等式を解け。

(1)　$2x^2-5x-3\geqq 0$　空中＋水面　　　(2)　$x^2-2x-2<0$　水中

解答　(1)　$2x^2-5x-3=0$ を解くと

$(2x+1)(x-3)=0$ より

$$x=-\frac{1}{2},\ 3$$



よって，この 2 次不等式の解は

$$x\leqq -\frac{1}{2},\ 3\leqq x$$

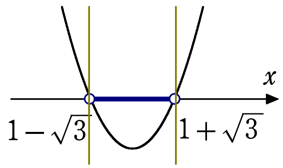
(2)　$x^2-2x-2=0$ を解くと

解の公式から

$a=1$，$2b'=-2$ より $b'=-1$，　$c=-2$

簡単バージョン $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot(-2)}}{1}$$



よって

$$x=1\pm\sqrt{3}$$

ゆえに，この 2 次不等式の解は

$$1-\sqrt{3}<x<1+\sqrt{3}$$

練習 36　次の 2 次不等式を解け。

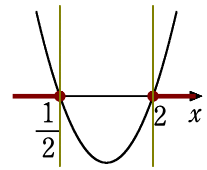
(1)　$2x^2-5x+2\geqq 0$　空中＋水面　　　(2)　$2x^2+5x+3<0$　水中

(3)　$x^2+2x-1\leqq 0$　水中＋水面　　　(4)　$x^2-5>0$　空中

解答

(1)　$2x^2-5x+2=0$ を解くと $(2x-1)(x-2)=0$

よって　$x=\dfrac{1}{2},\ 2$

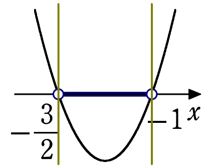


ゆえに，この 2 次不等式の解は

$$x\leqq\frac{1}{2},\ 2\leqq x$$

(2)　$2x^2+5x+3=0$ を解くと $(2x+3)(x+1)=0$

ゆえに　$x=-\dfrac{3}{2},\ -1$



よって，この 2 次不等式の解は

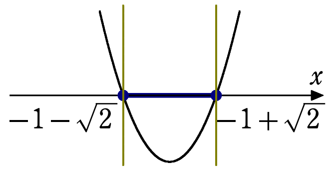
$$-\frac{3}{2}<x<-1$$

(3)　$x^2+2x-1=0$ を解くと解の公式から

$a=1$，$2b'=2$ より $b'=1$，　$c=-1$

簡単バージョン $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-1)}}{1}$$



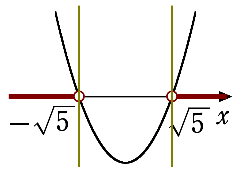
ゆえに　$x=-1\pm\sqrt{2}$

よって，この 2 次不等式の解は

$$-1-\sqrt{2}\leqq x\leqq -1+\sqrt{2}$$

(4)　$x^2-5=0$ を解くと $x^2=5$ から

$$x=\pm\sqrt{5}$$



よって，この 2 次不等式の解は

$$x<-\sqrt{5},\ \sqrt{5}<x$$

注意

$x^2-5>0$ を $x^2>5$ より $x>\pm\sqrt{5}$ としてはいけません。有名な間違いです。

$x^2-5>0$ を $(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})>0$ としてグラフで考えるのはＯＫです。

x^2 の係数が負の 2 次不等式は，両辺に -1 を掛けて x^2 の係数を正にして解けばよい。

必ずこの操作をすること。

不等号の向きが変わることに注意！

例題 12　次の 2 次不等式を解け。

$$-x^2+4x+1 \leqq 0$$

符号変わる

不等号の向きが変わる

解答　両辺に -1 を掛けると　$x^2-4x-1 \geqq 0$

$x^2-4x-1=0$ を解くと

解の公式から

$a=1$，$2b'=-4$ より $b'=-2$，$c=-1$

簡単バージョン $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

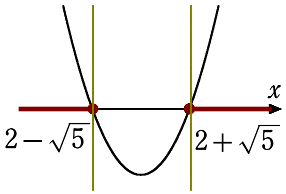
$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-1)}}{1}$$

よって　$x=2\pm\sqrt{5}$

ゆえに，この 2 次不等式の解は

$$x \leqq 2-\sqrt{5},\ 2+\sqrt{5} \leqq x$$

この不等式を考えているから，形は下に凸で空中にある部分を求める。



練習 37　次の 2 次不等式を解け。

(1)　$-2x^2+x+1<0$　　　(2)　$-3x^2+5x-1 \geqq 0$

(1)　両辺に -1 を掛けると　$2x^2-x-1>0$

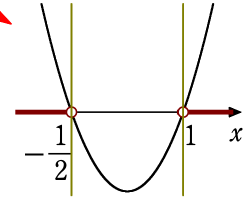
$2x^2-x-1=0$ を解くと $(2x+1)(x-1)=0$ より

$$x=-\frac{1}{2},\ 1$$

よって，この 2 次不等式の解は

$$x<-\frac{1}{2},\ 1<x$$

この不等式を考えているから，形は下に凸で空中にある部分を求める。



(2)　両辺に -1 を掛けると　$3x^2-5x+1 \leqq 0$

$3x^2-5x+1=0$ を解くと解の公式より

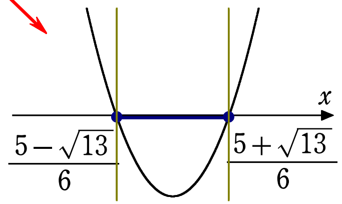
$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot3\cdot1}}{2\cdot3}$$

よって　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{6}$

ゆえに，この 2 次不等式の解は

$$\frac{5-\sqrt{13}}{6} \leqq x \leqq \frac{5+\sqrt{13}}{6}$$

この不等式を考えているから，形は下に凸で水中にある部分を求める。



2 次関数のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わらない場合について，
2 次関数の値の符号を調べよう。

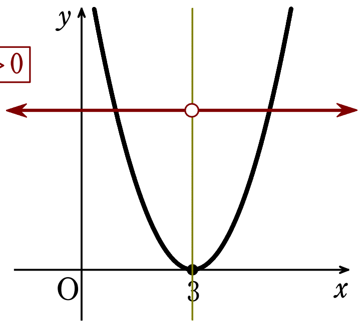
平方完成
$x^2-6x+9=(x-3)^2-3^2+9=(x-3)^2$
因数分解
$A^2-2AB+B^2=(A-B)^2$
$x^2-2\cdot3\cdot x+3^2=(x-3)^2$

② 2 次関数のグラフが x 軸と接する場合

例 22　2 次関数 $y=x^2-6x+9$ の値の符号

$x^2-6x+9=(x-3)^2$

であるから，この関数のグラフは，
右の図のように x 軸と点 $(3,\ 0)$ で接する。
$y=(x-3)^2+0$ と考えると頂点 $(3,0)$
また，$(x-3)^2=0$ より $x-3=0$ から $x=3$ と求めてもよい。
(解が1個しかないので，x 軸とその点で接していると考える)



右の図から，$y=x^2-6x+9$ の値の符号
について，次の表が得られる。

x	$x<3$	3	$3<x$
$y=x^2-6x+9$	$+$	0	$+$
	空中		空中

終

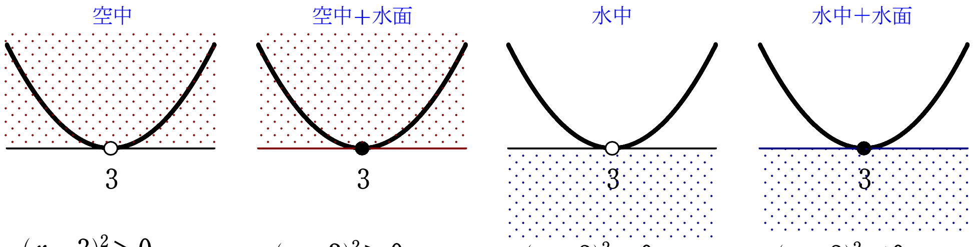
例 22 の表から，2 次不等式の解について，次のことがわかる。

左辺が( )^{2}になったらこのパターン

2 次不等式	解
$(x-3)^2>0$ 空中	3 以外のすべての実数
$(x-3)^2\geqq0$ 空中＋水面	すべての実数
$(x-3)^2<0$ 水中	解はない
$(x-3)^2\leqq0$ 水中＋水面	$x=3$

「$x<3$, $3<x$ 」や「$x\neq3$ 」と書いてもOK

参考
そもそも (正)^2＝正 , $0^2=0$, (負)^2＝正 であるから，
( )^{2}は 正か0にしかならない。
$(x-3)^2<0$ になんてならないことはすぐわかる。



$(x-3)^2>0$
→ 3以外の
すべての実数
接点以外全部

$(x-3)^2\geqq0$
→ すべての実数
接点も含めて全部

$(x-3)^2<0$
→ 解なし
場所なし

$(x-3)^2\leqq0$
→ $x=3$ のみ
接点のみ

練習 38　次の 2 次不等式を解け。

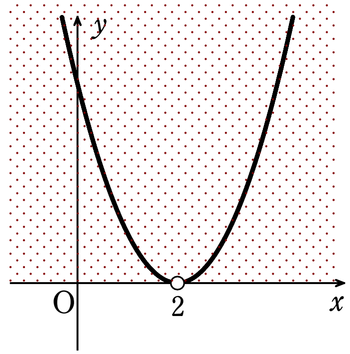
(1)　$x^2-4x+4>0$ 空中
(2)　$x^2-4x+4\geqq0$ 空中＋水面
(3)　$x^2+8x+16<0$ 水中
(4)　$x^2+8x+16\leqq0$ 水中＋水面
(5)　$4x^2-4x+1>0$ 空中
(6)　$4x^2-4x+1\geqq0$ 空中＋水面

解答

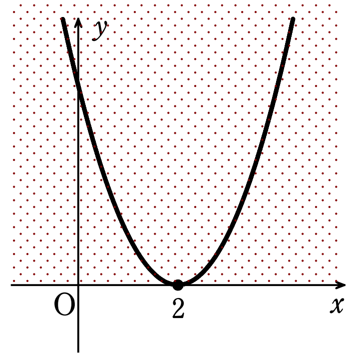
(1)　$x^2-4x+4=(x-2)^2$ より，$(x-2)^2=0$ となるのは $x=2$ (重解)
$y=x^2-4x+4$ のグラフは，図のように x 軸と点 $(2,\ 0)$ で接する。
よって，$x^2-4x+4>0$ の解は 2 以外のすべての実数　← 接点以外全部

(2)　(1) の図より，$x^2-4x+4\geqq0$ の解はすべての実数　← 接点も含めて全部

(1)



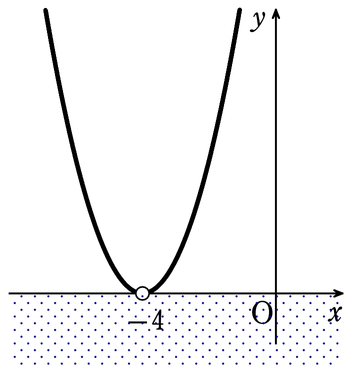
(2)



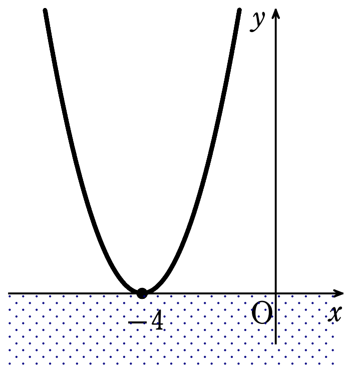
(3)　$x^2+8x+16=(x+4)^2$ より，$(x+4)^2=0$ となるのは $x=-4$ (重解)
$y=x^2+8x+16$ のグラフは，図のように x 軸と点 $(-4,\ 0)$ で接する。
よって，$x^2+8x+16<0$ の解はない。← 場所なし

(4)　(3) の図より，$x^2+8x+16\leqq0$ の解は $x=-4$　← 接点のみ

(3)



(4)



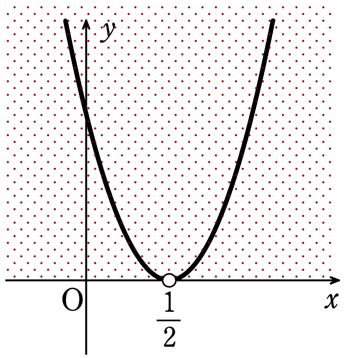
(5)　$4x^2-4x+1=(2x-1)^2$ より，$(2x-1)^2=0$ となるのは $2x-1=0$ よって $x=\dfrac{1}{2}$ (重解)

$y=4x^2-4x+1$ のグラフは，図のように x 軸と点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ で接する。

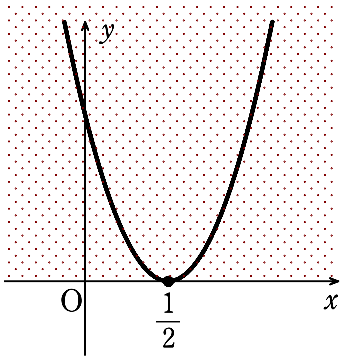
よって，$4x^2-4x+1>0$ の解は $\dfrac{1}{2}$ 以外のすべての実数　←接点以外全部

(6)　(5) の図より，$4x^2-4x+1\geqq 0$ の解はすべての実数　←接点も含めて全部

(5)



(6)



③ 2 次関数のグラフが x 軸と共有点をもたない場合

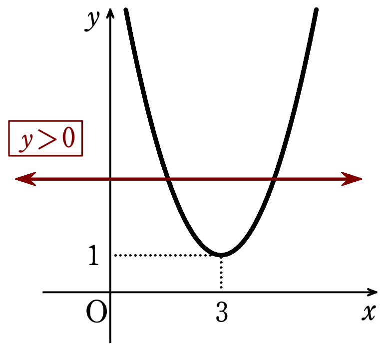
例 23　2 次関数 $y=x^2-6x+10$ の値

$$x^2-6x+10=(x-3)^2-3^2+10=(x-3)^2+1$$

頂点 (3 , 1) で下に凸のグラフ

であるから，この関数のグラフは，
右の図のように x 軸より上側にあり，
x 軸と共有点をもたない。
この関数の値は，常に正である。終

すべての場所でグラフは空中にある



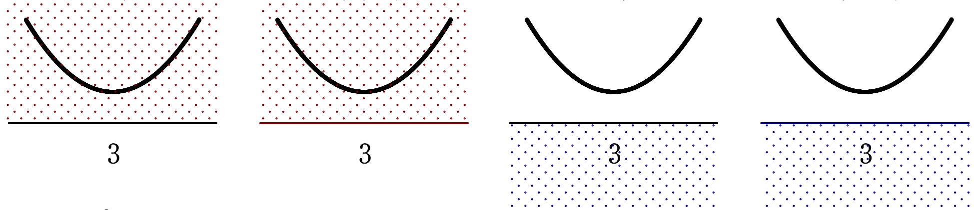
例 23 により，2 次不等式の解について，次のことがわかる。

左辺が ( )^2＋数字になったらこのパターン

2 次不等式	解
$x^2-6x+10>0$ 空中	すべての実数
$x^2-6x+10\geqq 0$ 空中＋水面	すべての実数
$x^2-6x+10<0$ 水中	解はない
$x^2-6x+10\leqq 0$ 水中＋水面	解はない

参考
そもそも (正)^2＝正，$0^2=0$，(負)^2＝正 であるから，
( )^{2}は 正か0にしかならない。
よって，( )^2＋数字 は絶対に正になる。
したがって，( )^2＋数字＞0 は当たり前で
( )^2＋数字＜0 になんてなることはない。

空中　空中＋水面　水中　水中＋水面



$(x-3)^2+1>0$ → すべての実数

$(x-3)^2+1\geqq 0$ → すべての実数

$(x-3)^2+1<0$ → 解なし

$(x-3)^2+1\leqq 0$ → 解なし

グラフが x 軸と交点を持たないので，問題文の不等号にイコールがついていても，
水面にくる場所がないので，答えに何も影響を与えない。

練習 39　次の 2 次不等式を解け。

(1)　$x^2-4x+6>0$ 空中　　(2)　$x^2-4x+6\geqq 0$ 空中＋水面

(3)　$2x^2+4x+3<0$ 水中　　(4)　$2x^2+4x+3\leqq 0$ 水中＋水面

あとで説明しますが，個人的に以下の解法はすごく不自然な気がしています

解答

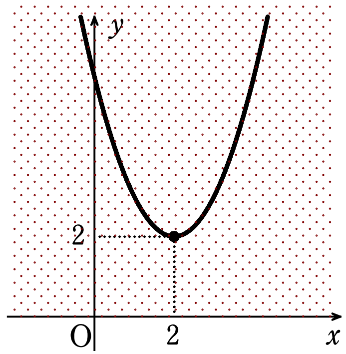
(1)　$x^2-4x+6=(x-2)^2-2^2+6=(x-2)^2+2$　　頂点 $(2,2)$ で下に凸のグラフ

$y=x^2-4x+6$ のグラフは，x 軸より上側にあり，x 軸と共有点をもたない。

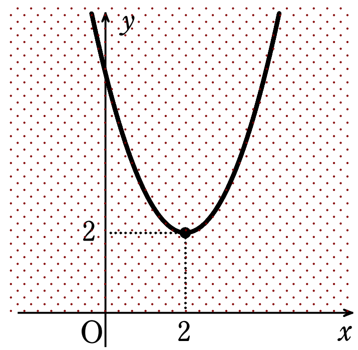
よって，$x^2-4x+6>0$ の解はすべての実数　← グラフのすべての場所が空中にある

(2)　$x^2-4x+6\geqq 0$ の解はすべての実数　← グラフのすべての場所が空中にある

(1)



(2)



(3)　$2x^2+4x+3=2(x^2+2x)+3=2\{(x+1)^2-1^2\}+3=2(x+1)^2-2\cdot 1^2+3=2(x+1)^2+1$

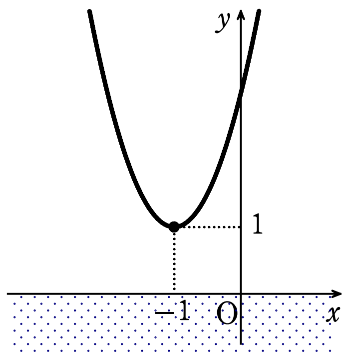
$y=2x^2+4x+3$ のグラフは，x 軸より上側にあり，　　頂点 $(-1,1)$ で下に凸のグラフ

x 軸と共有点をもたない。

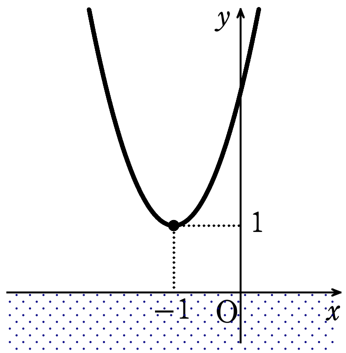
よって，$2x^2+4x+3<0$ の解はない。← グラフで水中にある場所なんてない

(4)　$2x^2+4x+3\leqq 0$ の解はない。← グラフで水中にある場所なんてない

(3)



(4)



＜２次不等式の解き方のまとめ＞

2 次不等式は，不等式のすべての項を左辺に移項して整理し，2 次関数のグラフと x 軸の位置関係を利用して解くことができる。したがって，115 ページの表と同じように，2 次不等式

平方完成しなくても，判別式を使えばグラフが浮いているかどうかすぐ分かる

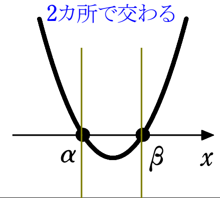
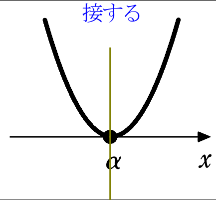
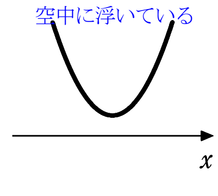
$$ax^2+bx+c>0,\qquad ax^2+bx+c\leqq 0$$

などの解についても，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 $D=b^2-4ac$ の符号によって分類することができる。

あとで説明しますが，個人的にこのの解法はすごく不自然な気がしています

なお，$a<0$ のときは，不等式の両辺に -1 を掛けて x^2 の係数を正にして解けばよいから，$a>0$ の場合だけを次ページにまとめた。

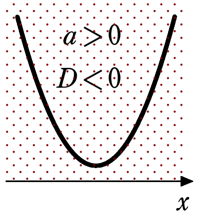
■ **2 次不等式の解についてのまとめ**（$a>0$ の場合）

$D=b^2-4ac$	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係			
$ax^2+bx+c=0$ の実数解	$x=\alpha,\ \beta$	$x=\alpha$	実数解はない
$ax^2+bx+c>0$ の解	$x<\alpha,\ \beta<x$	α 以外のすべての実数	すべての実数
$ax^2+bx+c\geqq 0$ の解	$x\leqq\alpha,\ \beta\leqq x$	すべての実数	すべての実数
$ax^2+bx+c<0$ の解	$\alpha<x<\beta$	解はない	解はない
$ax^2+bx+c\leqq 0$ の解	$\alpha\leqq x\leqq\beta$	$x=\alpha$	解はない

例題 13　次の 2 次不等式を解け。

$$2x^2-3x+4>0$$ 空中

$a=2,\ b=-3,\ c=4$　　$D=b^2-4ac$



解答　2 次方程式 $2x^2-3x+4=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot4=-23<0$$

x^2 の係数が正であるから，　D が負より，グラフは空中に浮いている

この 2 次不等式の解はすべての実数　グラフのすべての場所が空中にある

グラフが浮いている場合の問題なら，平方完成するよりも判別式を用いた方が圧倒的に速く答えが求められる。

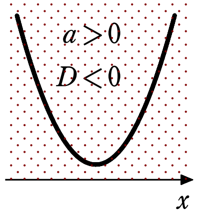
練習 40　次の 2 次不等式を解け。

(1)　$x^2-3x+5>0$ 空中　　(2)　$-x^2+x-1\geqq0$ 空中＋水面？

(3)　$2x^2+3x+3<0$ 水中　　(4)　$3x^2-2\sqrt{3}x+1\leqq0$ 水中＋水面

(5)　$x+6\leqq x^2$ 左辺に移項　　(6)　$x^2-3x+2>2x^2-x$ 左辺に移項

解答



(1)　2 次方程式 $x^2-3x+5=0$ の判別式を D とすると

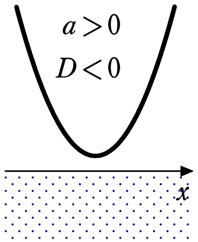
$a=1,\ b=-3,\ c=5$

$$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot5=-11<0$$

x^2 の係数が正であるから，

この 2 次不等式の解はすべての実数　グラフのすべての場所が空中にある

(2)　両辺に -1 を掛けると　$x^2-x+1\leqq0$ ……①　向きが変わることに注意　水中を調べることになった



2 次方程式 $x^2-x+1=0$ の判別式を D とすると

$a=1,\ b=-1,\ c=1$

$$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$$

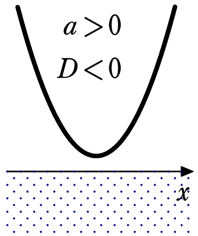
2 次不等式 ① の x^2 の係数が正であるから，

この 2 次不等式の解はない。　グラフで水中にある場所なんてない

(3)　2 次方程式 $2x^2+3x+3=0$ の判別式を D とすると

$a=2,\ b=3,\ c=3$

$$D=3^2-4\cdot2\cdot3=-15<0$$



x^2 の係数が正であるから，

この 2 次不等式の解はない。　グラフで水中にある場所なんてない

(4)　2 次方程式 $3x^2-2\sqrt{3}x+1=0$ の判別式を D とすると

$a=3,\ b=-2\sqrt{3},\ c=1$

$$D=(-2\sqrt{3})^2-4\cdot3\cdot1=0$$

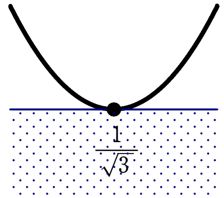
$3x^2-2\sqrt{3}x+1=0$ を解くと左辺因数分解して　　$(\sqrt{3}x)^2-2\cdot\sqrt{3}x\cdot1+1^2=(\sqrt{3}x-1)^2$

$A^2-2AB+B^2=(A-B)^2$

$(\sqrt{3}x-1)^2=0$　ゆえに

$\sqrt{3}x-1=0$ より $\sqrt{3}x=1$ から $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって，この 2 次不等式の解は　$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　接点のみ



(5)　式を整理すると　$-x^2+x+6\leqq0$

両辺に -1 を掛けると　$x^2-x-6\geqq0$　向きが変わることに注意　空中を調べることになった

2 次方程式 $x^2-x-6=0$ の判別式を D とすると

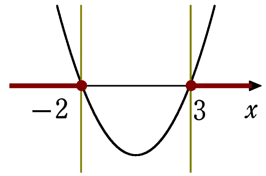
$a=1,\ b=-1,\ c=-6$

$$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-6)=25>0$$

$x^2-x-6=0$ を解く。左辺を因数分解して

$(x-3)(x+2)=0$　より　$x=-2,\ 3$

よって，この 2 次不等式の解は　$x\leqq-2,\ 3\leqq x$



(6)　式を整理すると　$x^2-2x^2-3x+x+2>0$

$-x^2-2x+2>0$　両辺に -1 を掛けると

$x^2+2x-2<0$　向きが変わることに注意　水中を調べることになった

2 次方程式 $x^2+2x-2=0$ の判別式を D とすると　　$a=1,\ 2b'=2$ より $b'=1,\ c=-2$

$a=1,\ b=2,\ c=-2$　　簡単バージョン $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

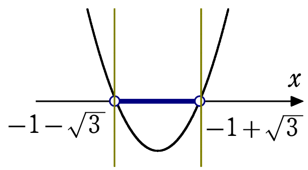
$$D=2^2-4\cdot1\cdot(-2)=12>0$$

$x^2+2x-2=0$ を解くと　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-2)}}{1}$

ゆえに　$x=-1\pm\sqrt{3}$

よって，この 2 次不等式の解は

$-1-\sqrt{3}<x<-1+\sqrt{3}$



研究

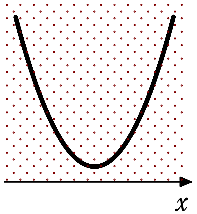
2次不等式を解くときに，判別式を毎回調べなければならないのか。
判別式が負になるときは，あっという間に解くことができるが，
判別式が正や0のときにはグラフと x 軸との交点を求めなめればならないので
結局因数分解か解の公式を使うことになる。
個人的に考えることとして，いきなり解の公式を使ってしまったらどうだろうか。
因数分解できるなら，グラフは x 軸とその場所で交わることがわかる。
因数分解できないときに，グラフが x 軸の上に浮いてるのか分からない。
しかし，解の公式を用いたときに $\sqrt{\ }$ の中が負になれば，
グラフは x 軸の上に浮いていることがわかる。

練習 40　次の 2 次不等式を解け。

(1)　$x^2-3x+5>0$ 空中　　(2)　$-x^2+x-1\geqq 0$ 空中＋水面？
(3)　$2x^2+3x+3<0$ 水中　　(4)　$3x^2-2\sqrt{3}x+1\leqq 0$ 水中＋水面
(5)　$x+6\leqq x^2$ 左辺に移項　　(6)　$x^2-3x+2>2x^2-x$ 左辺に移項

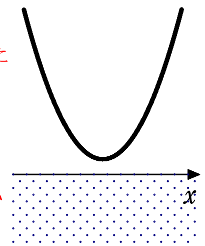
別解

(1)　2 次方程式 $x^2-3x+5=0$ を解くと
$a=1, b=-3, c=5$
$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}$$



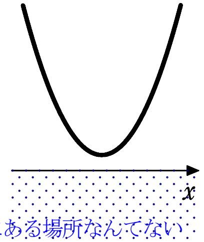
$\sqrt{\ }$ 内が負なので，$y=x^2-3x+5$ のグラフは x 軸と
共有点を持たない。 つまり，グラフは浮いている
したがって 2 次不等式の解はすべての実数　グラフのすべての場所が空中にある

(2)　両辺に -1 を掛けると　$x^2-x+1\leqq 0$ ……①
向きが変わることに注意
水中を調べることになった
2 次方程式 $x^2-x+1=0$ を解くと
$a=1, b=-1, c=1$
$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$$



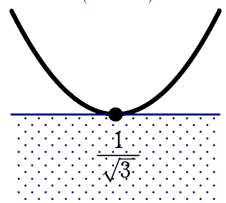
$\sqrt{\ }$ 内が負なので，$y=x^2-x+1$ のグラフは x 軸と
共有点を持たない。つまり，グラフは浮いている
したがってこの 2 次不等式の解はない。　グラフで水中にある場所なんてない

(3)　2 次方程式 $2x^2+3x+3=0$ を解くと
$a=2, b=3, c=3$
$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot3}}{2\cdot2}$$

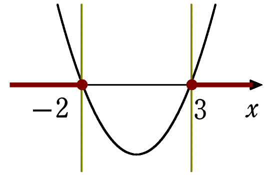


$\sqrt{\ }$ 内が負なので，$y=2x^2+3x+3$ のグラフは x 軸と
共有点を持たない。 つまり，グラフは浮いている
したがってこの 2 次不等式の解はない。　グラフで水中にある場所なんてない

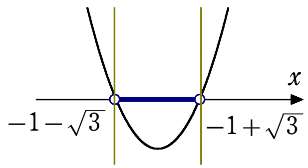
(4)　$3x^2-2\sqrt{3}x+1=0$ を解くと左辺因数分解して
$(\sqrt{3}x)^2-2\cdot\sqrt{3}x\cdot1+1^2=(\sqrt{3}x-1)^2$
$A^2-2AB+B^2=(A-B)^2$
$(\sqrt{3}x-1)^2=0$　ゆえに
$\sqrt{3}x-1=0$ より $\sqrt{3}x=1$ から $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
よって，この 2 次不等式の解は　$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　接点のみ



(5)　式を整理すると　$-x^2+x+6\leqq 0$
両辺に -1 を掛けると　$x^2-x-6\geqq 0$
向きが変わることに注意
空中を調べることになった
$x^2-x-6=0$ を解く。左辺を因数分解して
$(x-3)(x+2)=0$　より　$x=-2,\ 3$
よって，この 2 次不等式の解は　$x\leqq -2,\ 3\leqq x$



(6)　式を整理すると　$x^2-2x^2-3x+x+2>0$
$-x^2-2x+2>0$　両辺に -1 を掛けると
$x^2+2x-2<0$
向きが変わることに注意
水中を調べることになった
$a=1,\ 2b'=2$ より $b'=1,\ c=-2$
簡単バージョン $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$
$x^2+2x-2=0$ を解くと　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-2)}}{1}$
ゆえに　$x=-1\pm\sqrt{3}$
よって，この 2 次不等式の解は
$-1-\sqrt{3}<x<-1+\sqrt{3}$



＜２次不等式の応用＞

応用例題 4

2 次方程式 $2x^2+mx+1=0$ が実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

考え方　判別式を D とすると，実数解をもつのは $D>0$ または $D=0$，
すなわち $D\geqq 0$ のときである。

実数解を2個もつ $\to D>0$
実数解を1個もつ $\to D=0$
実数解をもつ　 $\to D\geqq 0$

$a=2\,,b=m\,,c=1$

$\boxed{解答}$　この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=m^2-4\cdot 2\cdot 1=m^2-8$$

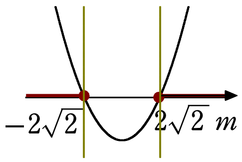
2 次方程式が実数解をもつのは $D\geqq 0$ のときであるから

$$m^2-8\geqq 0$$ 空中＋水面

$m^2-8=0$ を解くと $m^2=8$ より $m=\pm\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2}$

よって，求める m の値の範囲は

$$m\leqq -2\sqrt{2}，\ 2\sqrt{2}\leqq m$$



練習 41　2 次方程式 $x^2+2mx+3=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(2)　実数解をもたないとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

実数解を2個もつ　 $\to D>0$
実数解を1個もつ　 $\to D=0$
実数解をもつ　　 $\to D\geqq 0$
実数解をもたない $\to D<0$

$\boxed{解答}$　　$a=1\,,b=2m\,,c=3$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

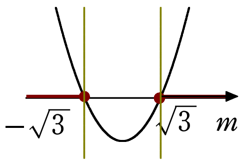
$$D=(2m)^2-4\cdot 1\cdot 3=4m^2-12$$

(1)　この 2 次方程式が実数解をもつのは $D\geqq 0$ のときであるから

$4m^2-12\geqq 0$　両辺4で割って　$m^2-3\geqq 0$　空中＋水面

$m^2-3=0$ を解くと $m^2=3$ より $m=\pm\sqrt{3}$

よって，求める m の値の範囲は　$m\leqq -\sqrt{3}，\ \sqrt{3}\leqq m$

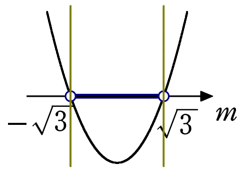


(2)　この 2 次方程式が実数解をもたないのは $D<0$ のときであるから

$4m^2-12<0$　両辺4で割って　$m^2-3<0$　水中

$m^2-3=0$ を解くと $m^2=3$ より $m=\pm\sqrt{3}$

よって，求める m の値の範囲は　$-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$



$\boxed{別解}$(簡単バージョン)

$a=1，2b'=2m$ より $b'=m\,,c=3$

$\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$

2 次方程式 $x^2+2mx+3=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=m^2-1\cdot 3=m^2-3$$

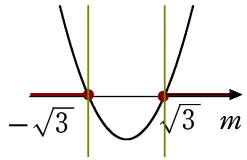
(1)　この 2 次方程式が実数解をもつのは $\dfrac{D}{4}\geqq 0$ のときであるから

空中＋水面

$$m^2-3\geqq 0$$

$m^2-3=0$ を解くと $m^2=3$ より $m=\pm\sqrt{3}$

よって，求める m の値の範囲は　$m\leqq -\sqrt{3}，\ \sqrt{3}\leqq m$

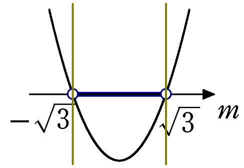


(2)　この 2 次方程式が実数解をもたないのは $\dfrac{D}{4}<0$ のときであるから

$$m^2-3<0$$ 水中

$m^2-3=0$ を解くと $m^2=3$ より $m=\pm\sqrt{3}$

よって，求める m の値の範囲は　$-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$



研究 (対戦ゲームをしましょう)

1．先攻と後攻を決めます。

2．先攻は3つの数 a , b , c を決めます。

3．後攻は先攻 の決めた a , b , c で作られる ax^2+bx+c に攻撃します。

攻撃方法「 x に数字を代入して計算結果が負になったら後攻の勝ち」

３０秒間後攻が攻撃して、守り切ったら先攻の勝ちです。

例

先攻： $a=1$, $b=-4$, $c=2$

後攻： ax^2+bx+c は x^2-4x+2 です。

$x=1$ にすると $x^2-4x+2 = 1^2-4\cdot1+2 = -1$ …… 後攻の勝ち

例

先攻：$a=2$, $b=3$, $c=4$

後攻： ax^2+bx+c は $2x^2+3x+4$ です。

$x=-1$ にすると $2x^2+3x+4 = 2\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)+4 = 3$

$x=-\dfrac{1}{2}$ にすると $2x^2+3x+4 = 2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+3\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+4 = 3$

…… タイムアップ！（先攻の勝ち）

研究 実は先攻が絶対に勝てる裏技があります。

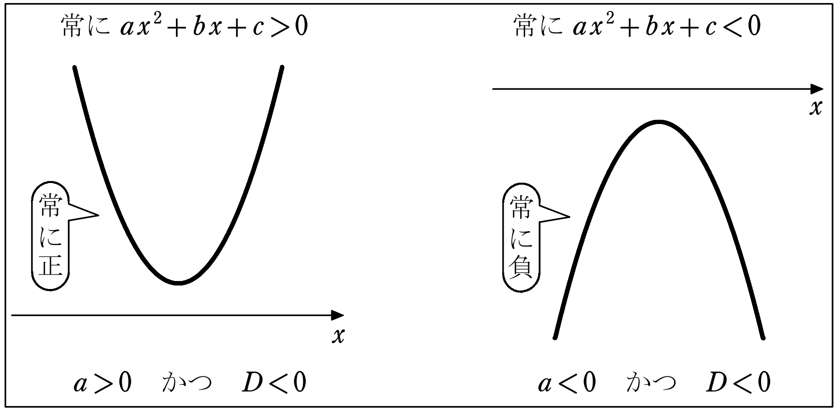
115 ページの表によると，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ の値の符号が一定になる場合がある。それは，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とするとき，a の符号と D の符号が次のような場合である。

x がいくつであっても y 座標が正である。

→下に凸のグラフが浮いている(上に凸だと , どこかで沈んでしまう)

x がいくつであっても y 座標が負である。

→上に凸のグラフが沈んでいる(下に凸だと , どこかで浮かび上がってくる)



応用例題 5

2 次不等式 $x^2+2mx+m+2>0$ の解がすべての実数であるとき，
定数 m の値の範囲を求めよ。

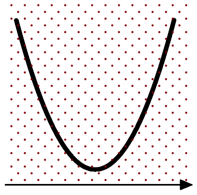
考え方 2 次不等式 $ax^2+bx+c>0$ の解がすべての実数
→ どんな x でも ax^2+bx+c の計算結果は正
→ どんな x でも $y=ax^2+bx+c$ のグラフで y は正
→ $y=ax^2+bx+c$ のグラフ全体が空中にある
→ $y=ax^2+bx+c$ のグラフは x 軸と交点をもたない
→ 判別式 D は $D<0$

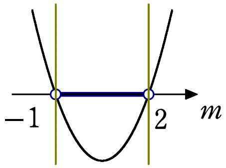
注意 $x^2+2mx+m+2>0$ が成り立つなら $D>0$ とする間違いが多い

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，
常に $ax^2+bx+c>0$ であるのは，$a>0$ かつ $D<0$ のときである。

$a=1$, $b=2m$, $c=m+2$

解答 2 次方程式 $x^2+2mx+m+2=0$ の判別式を D とすると
$$D=(2m)^2-4\cdot1\cdot(m+2)=4m^2-4m-8$$
2 次不等式の x^2 の係数が正であるから，
その解がすべての実数であるのは $D<0$ のときである。
$4m^2-4m-8<0$ 両辺4で割って $m^2-m-2<0$
$m^2-m-2=0$ となるのは $(m-2)(m+1)=0$ より
$m=2$, -1
求める m の範囲は $-1<m<2$





参考 $m^2-m-2<0$ から $(m-2)(m+1)<0$ よって $-1<m<2$
と答えてもいい。$\alpha<\beta$ とするとき，

$(x-\alpha)(x-\beta)<0$	→	$\alpha<x<\beta$
$(x-\alpha)(x-\beta)>0$	→	$x<\alpha$, $\beta<x$

を公式として使うことをお勧めします。

これ以降，教科書もこの書き方になっていきます。

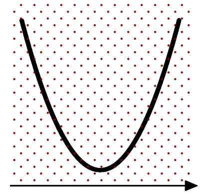
練習 42

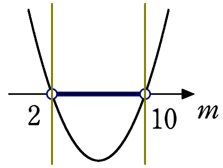
2 次不等式 $x^2+mx+3m-5>0$ の解がすべての実数であるとき，
定数 m の値の範囲を求めよ。

解答

$a=1$, $b=2m$, $c=m+2$

2 次方程式 $x^2+mx+3m-5=0$ の判別式を D とすると
$$D=m^2-4\cdot1\cdot(3m-5)=m^2-12m+20$$
2 次不等式の x^2 の係数が正であるから，
その解がすべての実数であるのは $D<0$ のときである。
$m^2-12m+20<0$ から $(m-2)(m-10)<0$
これを解いて 公式 $2<m<10$





＜連立不等式＞

例題 14　連立不等式 $\begin{cases} x^2-4>0 \\ x^2-3x-4\leqq 0 \end{cases}$ を解け。

$\boxed{\text{解答}}$　$x^2-4>0$ から　　$(x+2)(x-2)>0$

よって　　$x<-2,\ 2<x$　…… ①

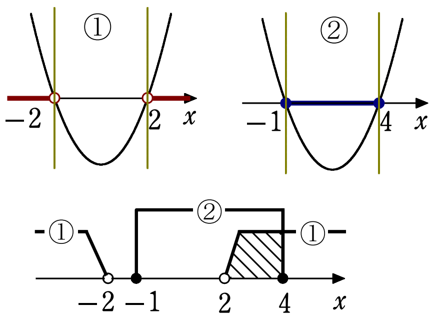
$x^2-3x-4\leqq 0$ から　　$(x+1)(x-4)\leqq 0$

よって　　$-1\leqq x\leqq 4$　…… ②

① と ② の共通範囲を求めて

$2<x\leqq 4$

①と②の範囲を一つの数直線にまとめること



イコールがついていたら黒丸&直角

イコールがついていなかったら白丸&斜めに曲がる

練習 43　次の連立不等式を解け。

(1) $\begin{cases} x^2-5x+4\leqq 0 \\ x^2-2x-3>0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+4x-12<0 \\ x^2+7x+10\geqq 0 \end{cases}$

$\boxed{\text{解答}}$

(1) $\begin{cases} x^2-5x+4\leqq 0 & \cdots\cdots ① \\ x^2-2x-3>0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

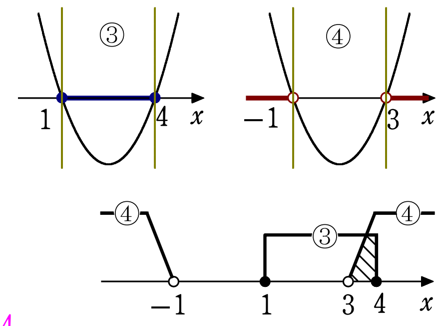
① から　　$(x-1)(x-4)\leqq 0$

よって　　$1\leqq x\leqq 4$　…… ③

② から　　$(x+1)(x-3)>0$

よって　　$x<-1,\ 3<x$　…… ④

③ と ④ の共通範囲を求めて　　$3<x\leqq 4$



(2) $\begin{cases} x^2+4x-12<0 & \cdots\cdots ① \\ x^2+7x+10\geqq 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から　　$(x+6)(x-2)<0$

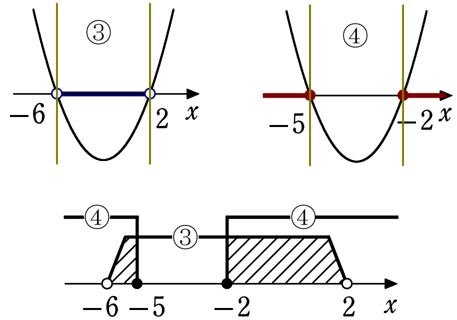
よって　　$-6<x<2$　…… ③

② から　　$(x+5)(x+2)\geqq 0$

よって　　$x\leqq -5,\ -2\leqq x$　…… ④

③ と ④ の共通範囲を求めて

$-6<x\leqq -5,\ -2\leqq x<2$



練習 44　次の不等式を解け。

(1)　$-2 \leqq x^2+3x \leqq 4$　　　　(2)　$10 < x^2+3x \leqq 2x+12$

参考

$A<B<C$ は，$A<B$ と $B<C$ が同時に成り立つことと同じである。

$\boxed{A<\boxed{B}<C} \longrightarrow \begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$

解答

(1) $-2 \leqq x^2+3x \leqq 4$ から

$$\begin{cases} -2 \leqq x^2+3x & \cdots\cdots ① \\ x^2+3x \leqq 4 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① から　$-x^2-3x-2 \leqq 0$

両辺に (-1) をかけて　$x^2+3x+2 \geqq 0$

すなわち　$(x+2)(x+1) \geqq 0$

よって　$x \leqq -2,\ -1 \leqq x$　……③

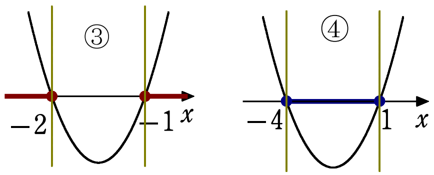
② から　$x^2+3x-4 \leqq 0$

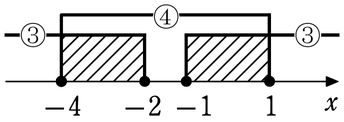
すなわち　$(x+4)(x-1) \leqq 0$

よって　$-4 \leqq x \leqq 1$　……④

③ と ④ の共通範囲を求めて

$-4 \leqq x \leqq -2,\ -1 \leqq x \leqq 1$





(2) $10 < x^2+3x \leqq 2x+12$ から

$$\begin{cases} 10 < x^2+3x & \cdots\cdots ① \\ x^2+3x \leqq 2x+12 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① から　$-x^2-3x+10<0$

両辺に (-1) をかけて　$x^2+3x-10>0$

すなわち　$(x+5)(x-2)>0$

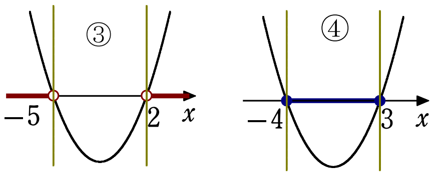
よって　$x<-5,\ 2<x$　……③

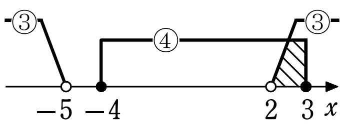
② から　$x^2+x-12 \leqq 0$

すなわち　$(x+4)(x-3) \leqq 0$

よって　$-4 \leqq x \leqq 3$　……④

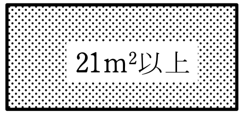
③ と ④ の共通範囲を求めて　$2<x \leqq 3$





応用例題 6

周の長さが 20 m で，縦の長さが横の長さ以下の長方形状の囲いを作る。囲いの中の面積を 21 m² 以上にするには，縦の長さをどのような範囲にとればよいか。

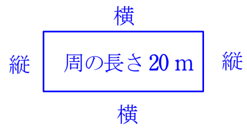


考え方　縦の長さを x m として，条件から不等式を作る。長方形の辺の長さが正の数であることにも注意する。

何を x とおくかは，問題文の最後に書いてある

動画を見てイメージしよう

縦×2＋横×2＝20
両辺2で割って
縦　＋横　＝10
横　＝10－縦



解答　縦の長さを x m とすると，

横の長さは $(10-x)$ m である。

$x>0$ かつ　$10-x>0$ かつ　$x \leqq 10-x$

つまり　辺の長さは正

問題文で「縦の長さが横の長さ以下」とあるから

$x>0$ かつ $x<10$ かつ $x \leqq 5$

$10-x>0$　よって $-x>-10$
両辺に (-1) をかけて $x<10$

$x \leqq 10-x$　よって $2x \leqq 10$
両辺2で割って $x \leqq 5$

共通範囲をとって　$0<x \leqq 5$　……①

囲いの中の面積が 21 m² 以上であるから

$x(10-x) \geqq 21$

囲いの中の面積は
縦×横 ＝ $x \times (10-x)$

式を整理すると

$10x-x^2 \geqq 21$　より　$-x^2+10x-21 \geqq 0$

両辺に (-1) をかけて

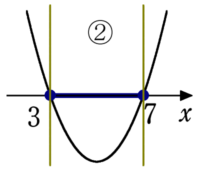
$x^2-10x+21 \leqq 0$

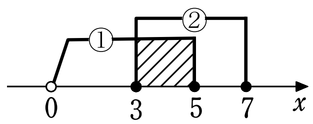
すなわち　$(x-3)(x-7) \leqq 0$

これを解くと　$3 \leqq x \leqq 7$　……②

① と ② の共通範囲を求めて

$3 \leqq x \leqq 5$　　答　3 m 以上 5 m 以下



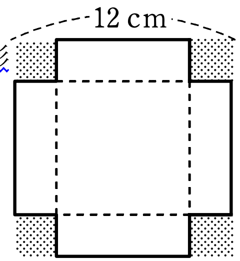


参考 (ちょっと難しい話)

①の範囲を求めるとき，「縦の長さが正」「横の長さが正」「縦の長さが横の長さ以下」の３つを使いました。しかし，この問題に限っては「横の長さが正」は使わなくてもいいです。それは「縦の長さが正」「縦の長さが横の長さ以下」の２つだけで「横の長さが正」と言い切ることができます。「縦の長さが正」を「縦>0」，「縦の長さが横の長さ以下」を「縦≦横」として，これら２つを合体すると「0<縦≦横」となります。この式の両端だけ取り出すと「0<横」となります。

でも普通は気がつかないと思うので，「縦の長さが正」「横の長さが正」「縦の長さが横の長さ以下」の３つを調べておけばいいでしょう。

練習 45　1 辺が 12 cm の正方形の厚紙がある。この厚紙の四隅から合同な正方形を切り取り，ふたのない箱を作る。底面の正方形の 1 辺が 6 cm 以上で，4 個の側面の長方形の面積の和を 40 cm² 以上にするとき，切り取る正方形の 1 辺の長さをどのような範囲にとればよいか。



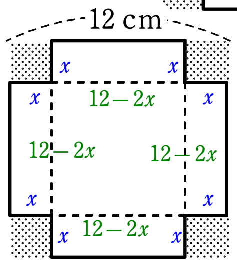
解答

切り取る正方形の 1 辺の長さを x cm とすると，
底面の正方形の 1 辺の長さは
$(12-2x)$ cm である。　← 12cm から x を2個取り除く

$x>0$ かつ $12-2x \geqq 6$ から　← 問題文で「底面の正方形の1辺が6cm 以上」とあるから

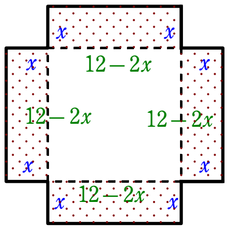
$x>0$ かつ $x \leqq 3$　← $12-2x \geqq 6$ より $-2x \geqq -6$　両辺 (-2) で割って $x \leqq 3$

共通範囲より　$0<x \leqq 3$　…… ①



4 個の側面は合同な長方形で，　← どれも縦が x cm，横が $12-x$ cmの長方形
その面積の和が 40 cm² 以上であるから

$$x(12-2x) \times 4 \geqq 40$$　← 長方形 4 個



両辺 4 で割って

$$x(12-2x) \geqq 10$$

式を整理すると

$$12x-2x^2 \geqq 10 \quad より \quad -2x^2+12x-10 \geqq 0$$

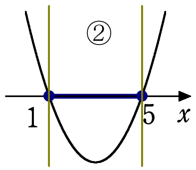
両辺を (-2) で割って　← 不等号の向きが逆になることに注意

$$x^2-6x+5 \leqq 0$$

すなわち

$$(x-1)(x-5) \leqq 0$$

これを解くと　$1 \leqq x \leqq 5$　…… ②



① と ② の共通範囲を求めて

$1 \leqq x \leqq 3$　　答　1 cm 以上 3 cm 以下