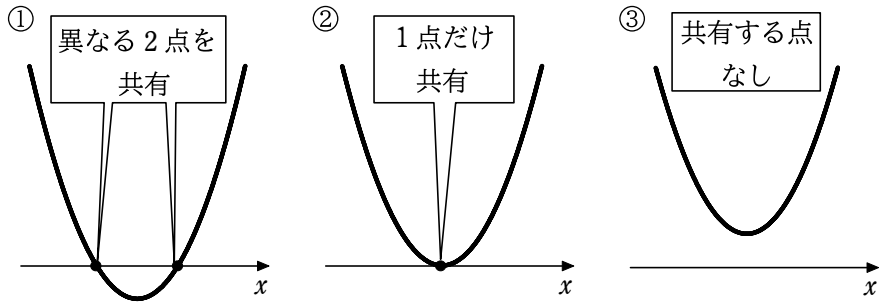


第3章「2次関数」第3節 2次方程式と2次不等式 6 2次関数のグラフとx軸の位置関係

2次関数のグラフとx軸の位置関係は、グラフが下に凸のとき、次の①、②、③の3つの場合に分類できる。また、グラフが上に凸のときも、同じように3つの場合がある。ここでは、これらの場合について調べることにしよう。



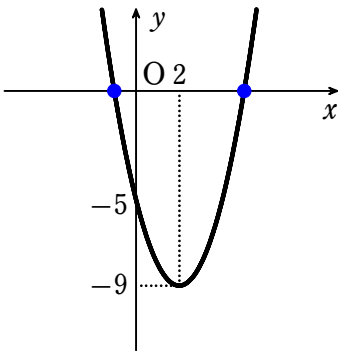
放物線に対して直線を1本書き加えると、交点は2個・1個・0個の3パターンしかありません。

問題 次のグラフを書いて、上の①～③のどのパターンか答えましょう。

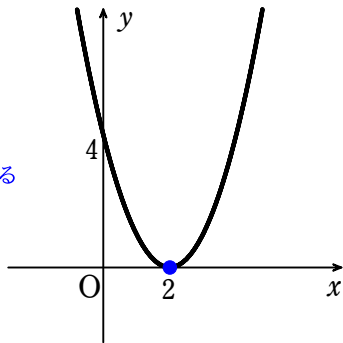
- (1) $y = x^2 - 4x - 5$ (2) $y = x^2 - 4x + 4$ (3) $y = x^2 - 4x + 5$

解答 -4 の半分は -2

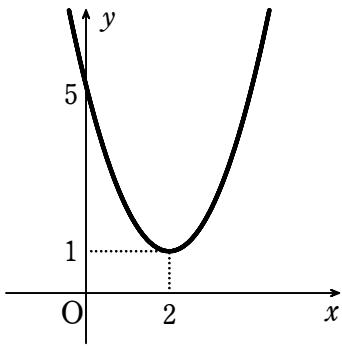
(1) $y = x^2 - 4x - 5 = (x - 2)^2 - 2^2 - 5 = (x - 2)^2 - 9$
よって $y = (x - 2)^2 - 9$
したがって、この関数のグラフは右の図のような放物線である。
その頂点は点(2, -9)、軸は直線 $x = 2$ である。
図より、グラフはx軸と異なる2点で交わっている。
ゆえに①である。



(2) $y = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 - 2^2 + 4 = (x - 2)^2$
よって $y = (x - 2)^2$
したがって、この関数のグラフは右の図のような放物線である。
その頂点は点(2, 0)、軸は直線 $x = 2$ である。
図より、グラフはx軸と接している。
ゆえに②である。



-4 の半分は -2
(3) $y = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 - 2^2 + 5 = (x - 2)^2 + 1$
よって $y = (x - 2)^2 + 1$
したがって、この関数のグラフは右の図のような放物線である。
その頂点は点(2, 1)、軸は直線 $x = 2$ である。
図より、グラフはx軸と交わらない。
ゆえに③である。



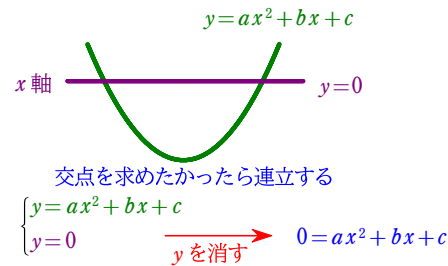
研究 平方完成して頂点を求めないと、①～③のどのパターンか分からない？

< 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の座標 >

2 次関数のグラフが x 軸と共有点をもつとき、その共有点の座標を求めてみよう。

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが
 x 軸と共有点をもつとき、共有点の x 座標は、
 $y=0$ となる x の値、すなわち

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数解である。



① 2 次関数のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わる場合

例 15 2 次関数 $y = x^2 - 4x - 5$ のグラフと x 軸の共有点の座標

このグラフと x 軸の共有点の x 座標は、

2 次方程式 $x^2 - 4x - 5 = 0$

和 積

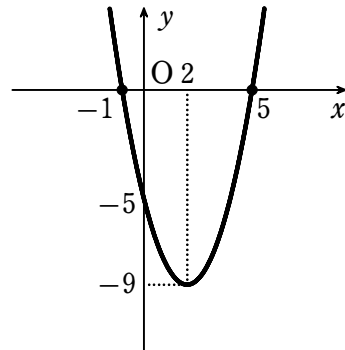
の実数解である。

左辺を因数分解して $(x+1)(x-5) = 0$

これを解くと $x = -1, 5$ ($-1, 5$) ではない。

よって、共有点の座標は y は 0 である。

$(-1, 0), (5, 0)$ 終



参考 y に 0 を代入して出てきた 2 次方程式が、実数解を 2 個もつので
グラフは x 軸と異なる 2 点で交わっている。

② 2 次関数のグラフが x 軸と 1 点だけを共有する場合

例 16 2 次関数 $y = x^2 - 4x + 4$ のグラフと x 軸の共有点の座標

このグラフと x 軸の共有点の

x 座標は、2 次方程式

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

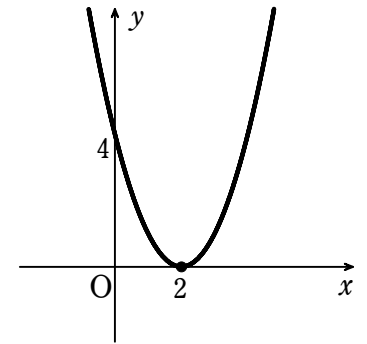
の実数解である。 $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$

左辺を因数分解して $(x-2)^2 = 0$

これを解くと $x = 2$

よって、共有点の座標は

$(2, 0)$ 終



参考 y に 0 を代入して出てきた 2 次方程式が、実数解を 1 個もつ(つまり重解をもつ)ので
グラフは x 軸と接している。

例 16 の場合のように、2 次関数のグラフと x 軸の共有点がただ 1 つのとき、
グラフは x 軸に 接する といい、その共有点を x 軸との 接点 という。

その接点は、放物線の頂点である。

練習 30 次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

また、グラフが x 軸に接するものはどれか。

- (1) $y = x^2 - x - 6$
- (2) $y = -x^2 + 3x - 1$
- (3) $y = 2x^2 + 4x + 2$
- (4) $y = 2x^2 - 5x - 3$

解答

(1) 2次方程式 $x^2 - x - 6 = 0$

和 積
左辺を因数分解して $(x+2)(x-3) = 0$

解くと $x = -2, 3$

よって、共有点の座標は $(-2, 0), (3, 0)$

(2) 2次方程式 $-x^2 + 3x - 1 = 0$ を解く。

両辺に (-1) を掛けると $x^2 - 3x + 1 = 0$ より
解の公式から $a=1, b=-3, c=1$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

よって、共有点の座標は $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 0\right), \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$

(3) 2次方程式 $2x^2 + 4x + 2 = 0$ を解く。

両辺2で割ると $x^2 + 2x + 1 = 0$ より

左辺を因数分解して $(x+1)^2 = 0$

よって $x = -1$

ゆえに、共有点の座標は $(-1, 0)$

(4) 2次方程式 $2x^2 - 5x - 3 = 0$ を解く。

左辺を因数分解して $(x-3)(2x+1) = 0$

よって $x-3=0$ または $2x+1=0$

ゆえに $x = 3, -\frac{1}{2}$

$2x = -1$
両辺2で割って $x = -\frac{1}{2}$

したがって、共有点の座標は $(3, 0), \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

以上より

グラフが x 軸に接するものは (3)

先頭がマイナスのときは、全部にマイナス
をかけて符号を変えた方が絶対に良い

$$\begin{array}{cccc} -x^2 & +3x & -1 & =0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ x^2 & -3x & +1 & =0 \end{array}$$

方程式や不等式なら、両辺を同じ数で
割ってもよい

$$\begin{array}{cccc} 2x^2 & +4x & +2 & =0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ x^2 & +2x & +1 & =0 \end{array}$$

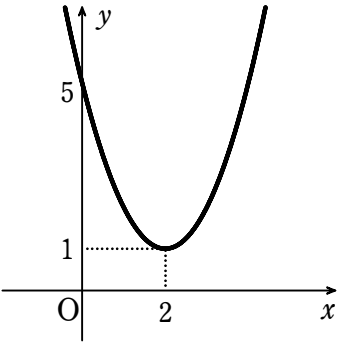
$$2x^2 - 5x - 3 = (x-3)(2x+1)$$

1	$\times$	-3	$\rightarrow$	-6
2		1	$\rightarrow$	1
2		-3		-5

③ 2次関数のグラフが x 軸と共有点をもたない場合

例 17 2次関数 $y = x^2 - 4x + 5$ のグラフと 2次方程式 $x^2 - 4x + 5 = 0$

この関数のグラフは右の図のように
 x 軸より上側にあり、 x 軸と共有点
をもたない。



参考

(ないことは分かっているが、)
このグラフと x 軸の共有点の x 座標は、

2次方程式 $a=1, b=-4, c=5$
 $x^2 - 4x + 5 = 0$

の実数解である。

解の公式を用いて x を求めると

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

となって $\sqrt{\quad}$ の中が負になってしまいます。

解の公式において $\sqrt{\quad}$ の中が負になってしまったら

そんな解はこの世に存在しない $\rightarrow$ 解なし
ということになります。

x 軸と共有点あるかな？
 $\rightarrow$ 方程式を作ろう
 $\rightarrow x$ の値を求めよう
 $\rightarrow \sqrt{\quad}$ の中が負になった
 $\rightarrow x$ 軸と共有点となる場所が存在しない
 $\rightarrow x$ 軸と共有点を持たない

また、2次方程式 $x^2 - 4x + 5 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0$$

したがって、判別式からも2次方程式 $x^2 - 4x + 5 = 0$ は
実数解をもたないことが分かる。終

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ と、2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ について、次のことがいえる。

1. 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸の共有点の個数は、
2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数解の個数と一致する。

2. 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数解の個数は、111 ページの
表のように判別式 $D = b^2 - 4ac$ の符号によって分類される。

簡単バージョンの $\frac{D}{4} = b'^2 - ac$ を調べてもよい

以上のことから、2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸の位置関係は、
2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式 $D = b^2 - 4ac$ の符号によって
次のようにまとめられる。 y に 0 を代入した方程式がグラフと x 軸との共有点の個数を教えてくれる

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸の位置関係			
$D = b^2 - 4ac$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$ のとき (下に凸)			
$a < 0$ のとき (上に凸)			
x 軸との 位置関係	異なる 2 点で 交わる	共有点をもつ 接する	共有点をもたない
x 軸との 共有点の個数	2 個	1 個	0 個
$ax^2 + bx + c = 0$ の実数解	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x = -\frac{b}{2a}$	実数解はない

参考

y に 0 を代入した方程式がグラフと x 軸との共有点の個数を教えてくれます。
実際に、共有点の目盛りを知りたいければ因数分解なり解の公式を使って
 x の値を求めなければいけませんが、個数だけ知りたければ判別式が
一番手っ取り早いです。

例 18 (1) 2 次関数 $y = x^2 + 5x + 3$ のグラフと x 軸の共有点の個数

2 次方程式 $x^2 + 5x + 3 = 0$ の判別式を D とすると $a = 1, b = 5, c = 3$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 25 - 12 = 13 > 0 \quad D \text{ は正の数になった}$$

よって、グラフと x 軸の共有点の個数は 2 個である。

(2) 2 次関数 $y = -2x^2 + x - 1$ のグラフと x 軸の共有点の個数

2 次方程式 $-2x^2 + x - 1 = 0$ の判別式を D とすると $a = -2, b = 1, c = -1$

$$D = 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-1) = 1 - (+8) = -7 < 0 \quad D \text{ は負の数になった}$$

よって、グラフと x 軸の共有点の個数は 0 個である。

終

判別式を調べるだけなら、
 a は負でもよい

練習 31 次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ。

(1) $y = x^2 + 3x + 3$ (2) $y = -2x^2 + 5x + 1$

(3) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

解答

$a = 1, b = 3, c = 3$

(1) 2 次方程式 $x^2 + 3x + 3 = 0$ の判別式を D とすると

$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 9 - 12 = -3 < 0$ D は負の数になった

よって、グラフと x 軸の共有点の個数は 0 個

(2) 2 次方程式 $-2x^2 + 5x + 1 = 0$ の判別式を D とすると $a = -2, b = 5, c = 1$

$D = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 25 + 8 = 33 > 0$ D は正の数になった

よって、グラフと x 軸の共有点の個数は 2 個

(3) 2 次方程式 $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$ の判別式を D とすると $a = \frac{1}{2}, b = -2, c = 2$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 4 - 4 = 0$ D は 0 になった

よって、グラフと x 軸の共有点の個数は 1 個

別解(簡単バージョン)

$a = \frac{1}{2}, 2b' = -2$ より $b' = -1, c = 2$

(3) 2 次方程式 $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$ の判別式を D とすると

$\frac{D}{4} = (-1)^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 - 1 = 0$ D は 0 になった

よって、グラフと x 軸の共有点の個数は 1 個

例題 10 2 次関数 $y = x^2 - 3x + m$ のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わる時、
定数 m の値の範囲を求めよ。

$a = 1, b = -3, c = m$

解答 2 次方程式 $x^2 - 3x + m = 0$ の判別式を D とすると

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 9 - 4m$

このグラフが x 軸と異なる 2 点で交わるのは $D > 0$ のときで
あるから $9 - 4m > 0$

よって $-4m > -9$ 両辺を (-4) で割って $m < \frac{9}{4}$
マイナスで割っているので、不等号の向きが変わることに注意

練習 32 2 次関数 $y = x^2 + 5x + m + 2$ のグラフについて、次の問いに答えよ。

- (1) x 軸と異なる 2 点で交わる時、定数 m の値の範囲を求めよ。
- (2) x 軸と共有点をもたないとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

解答

2 次方程式 $x^2 + 5x + \overset{c}{(m+2)} = 0$ の判別式を D とすると $a=1, b=5, c=m+2$
 $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m+2) = 25 - 4m - 8 = 17 - 4m$

- (1) このグラフが x 軸と異なる 2 点で交わるのは $D > 0$ のときであるから

$$17 - 4m > 0$$

よって $-4m > -17$ 両辺を (-4) で割って $m < \frac{17}{4}$
マイナスで割っているので、不等号の向きが変わることに注意

- (2) このグラフが x 軸と共有点をもたないのは $D < 0$ のときであるから

$$17 - 4m < 0$$

よって $-4m < -17$ 両辺を (-4) で割って $m > \frac{17}{4}$
マイナスで割っているので、不等号の向きが変わることに注意

Point 112 ページ例題 8 は 2 次方程式の解の個数、例題 10 は 2 次関数のグラフと x 軸の交点の個数に関する問題であるが、両方とも 2 次方程式の判別式 D の符号に着目した解答になっている。