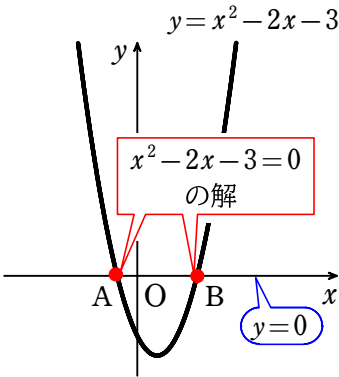


第3章「2次関数」第3節 2次方程式と2次不等式 5 2次方程式

2次関数 $y=x^2-2x-3$ のグラフは、右の図のように x 軸と2点 A, B で交わる。点 A, B の y 座標は0であるから、その x 座標は、2次方程式 $x^2-2x-3=0$ の解である。2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは、2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ と深く関係している。ここでは、まず、2次方程式とその解について学ぼう。



<因数分解を使う解き方>

まず、因数分解を使って2次方程式を解く方法について調べよう。

例 11 2次方程式 $x^2-2x-3=0$ を解く。

左辺を因数分解すると $(x+1)(x-3)=0$
よって $x+1=0$ または $x-3=0$ 移項
したがって、解は $x=-1, 3$ 終

注意 この行は理解していれば書かなくてもよい

中学では「 $x=-1, x=3$ 」と書いたが、高校では「 $x=-1, 3$ 」と書く順番は何でもいい

この解き方では、次が成り立つことを使っている。

2つの実数 A, B について

$$AB=0 \iff A=0 \text{ または } B=0$$

掛けて0になるのは、どちらかもしくは両方が0のときしかない。

練習 24 次の2次方程式を解け。

- (1) $x(x+4)=0$

(3) $2x^2+3x+1=0$
- (2) $x^2-5x+6=0$

(4) $3x^2-4x-4=0$

【解答】

- (1) $x(x+4)=0$ より $x=0$ または $x+4=0$
したがって、解は $x=0, -4$
- (2) 左辺を因数分解すると $(x-2)(x-3)=0$
よって $x-2=0$ または $x-3=0$
したがって、解は $x=2, 3$
- (3) 左辺を因数分解すると $(x+1)(2x+1)=0$
よって $x+1=0$ または $2x+1=0$
したがって、解は $x=-1, -\frac{1}{2}$
- (4) 左辺を因数分解すると $(x-2)(3x+2)=0$
よって $x-2=0$ または $3x+2=0$
したがって、解は $x=2, -\frac{2}{3}$

$$2x^2+3x+1=(x+1)(2x+1)$$

1	×	1	→	2
2		1	→	1
2		1		3

$2x+1=0$ より
 $2x=-1$

両辺2で割って $x=-\frac{1}{2}$

$$3x^2-4x-4=(x-2)(3x+2)$$

1	×	-2	→	-6
3		2	→	2
3		-4		-4

$3x+2=0$ より
 $3x=-2$

両辺3で割って $x=-\frac{2}{3}$

＜2次方程式の解の公式＞

x の2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ …… ①

の左辺は、93 ページで示したように

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

と変形される。よって、2次方程式 ① は次のように書ける。

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a} \quad \text{すなわち} \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$b^2-4ac>0 \text{ のとき} \quad x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\text{したがって} \quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$b^2-4ac=0$ のときも含めて考えると、次の **解の公式** が得られる。

2次方程式の解の公式 x^2 の係数が a , x の係数が b , 定数項が c

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は、 $b^2-4ac\geq 0$ のとき解をもち、

$$\text{その解は} \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$a=3, b=-7, c=1$$

例 12 2次方程式 $3x^2-7x+1=0$ を解く。

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 3\cdot 1}}{2\cdot 3}=\frac{7\pm\sqrt{49-12}}{6}=\frac{7\pm\sqrt{37}}{6} \quad \text{終}$$

「 $x=$ 」を書くこと

参考

$$a=1, b=2, c=3$$

例えば、 $x^2+2x+3=0$ という2次方程式を考えてみよう。解の公式を用いると

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-8}}{2}$$

となって、 $\sqrt{}$ の中が負になってしまいました。

ここで、 $\sqrt{-8}=-2\sqrt{2}$ とするのは完全に間違いです。

そもそも $\sqrt{a}$ という数は「2乗して a になる数」なので、

「 $\sqrt{-8}$ は2乗して -8 になる数」ということになりますが、

どんな数も2乗して負になりません。つまり $\sqrt{-8}$ はこの世に存在しない数です。

したがって、解の公式において $\sqrt{}$ の中が負になってしまったら

そんな解はこの世に存在しない → 解なし

ということになります。

つまり、 $b^2-4ac<0$ のとき、2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は実数の解をもたない。

練習 25 次の 2 次方程式を解け。

$$(1) \quad x^2 + 7x + 4 = 0$$

$$(2) \quad 3x^2 + 5x - 1 = 0$$

$$(3) \quad 3x^2 - 8x - 3 = 0$$

$$(4) \quad 9x^2 - 12x + 4 = 0$$

解答

$$a=1, \quad b=7, \quad c=4$$

$$(1) \quad x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 16}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$a=3, \quad b=5, \quad c=-1$$

$$(2) \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 12}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{6}$$

$$a=3, \quad b=-8, \quad c=-3$$

$$(3) \quad x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3)}}{2 \cdot 3} \quad \sqrt{100} \text{ は } 10$$

$$\frac{8 \pm 10}{6} = \frac{8 + 10}{6}, \frac{8 - 10}{6}$$

イコールの後にコンマを使って
書かない方がいい

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{8 \pm 10}{6}$$

よって $x = \frac{8+10}{6}, \frac{8-10}{6}$ つまり $x = 3, -\frac{1}{3}$

$$a=9, \quad b=-12, \quad c=4$$

$$(4) \quad x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4}}{2 \cdot 9} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

別解

(3) 左辺を因数分解すると $(x-3)(3x+1)=0$

よって $x-3=0$ または $3x+1=0$

したがって、解は $x=3, -\frac{1}{3}$

$3x^2 - 8x - 3 = (x - 3)(3x + 1)$



1 $\times$ -3 $\rightarrow$ -9
3 $\times$ 3 $\rightarrow$ 9
3 $\times$ -3 $\rightarrow$ -9
-3 $\times$ 1 $\rightarrow$ -3
3 -3 -8

$$\sim 3x+1=0 \text{ より}$$

$$3x = -1$$

両辺3で割って $x = -\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} + 4 &= (3x)^2 - 2 \cdot (3x) \cdot 2 + 2^2 \\ &= (3x - 2)^2 \end{aligned}$$

(4) 左辺を因数分解すると $(3x-2)^2=0$

よって $3x-2=0$

したがって、解は $x = \frac{2}{3}$

2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解について考えてみよう。

前ページの解の公式において, $b=2b'$ とおくと

- x の係数が偶数の場合

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2b' \pm \sqrt{(2b')^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm \sqrt{4(b'^2 - ac)}}{2a} \\ &= \frac{-2b' \pm \sqrt{4} \sqrt{b'^2 - ac}}{2a} = \frac{\cancel{-2}b' \pm \cancel{2}\sqrt{b'^2 - ac}}{\cancel{2}a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \end{aligned}$$

よって、次の公式が得られる。

b' は b の半分である

2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ は, $b'^2-ac\geq 0$ のとき解をもち,

その解は
$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

「解の公式簡単バージョン」と呼んでいます

$$a=5, \quad 2b'=2 \text{ より } b'=1, \quad c=-1$$

例 13 2 次方程式 $5x^2 + 2x - 1 = 0$ を解く。

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 5 \cdot (-1)}}{5} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+5}}{5} = \frac{-1 \pm \sqrt{6}}{5} \quad \text{終}$$

参考 (簡単バージョンを使わないと) $a=5, b=2, c=-1$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-1)}}{2 \cdot 5} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 20}}{10}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{10} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{10} = \frac{-1 \pm \sqrt{6}}{5} \quad \text{終}$$

V字約分 こっちの方が約分が必

こっちの方が約分が必ず発生するので面倒ではある。

練習 26 次の2次方程式を解け。

(1) $x^2 + 2x - 2 = 0$ (2) $3x^2 - 4x - 2 = 0$

【解答】 $a=1, 2b'=2$ より $b'=1, c=-2$

(1) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot (-2)}}{1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2}}{1} = -1 \pm \sqrt{3}$

$a=3, 2b'=-4$ より $b'=-2, c=-2$

(2) $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 3 \cdot (-2)}}{3} = \frac{2 \pm \sqrt{4+6}}{3} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$

< 2次方程式の係数と実数解 >

方程式における実数の解を、単に **実数解** という。

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数解は、解の公式における根号の中の式 $b^2 - 4ac$ の符号によって、次の [1] ~ [3] のように分類される。

[1] $b^2 - 4ac > 0$ のとき $\frac{\Delta + \sqrt{\Delta}}{2a}$ と $\frac{\Delta - \sqrt{\Delta}}{2a}$ の2個
異なる2つの実数解 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ をもつ。

[2] $b^2 - 4ac = 0$ のとき 実数解 $x = -\frac{b}{2a}$ をもつ。
2つの解が重なったものと考えて、この実数解を **重解** という。

[3] $b^2 - 4ac < 0$ のとき 実数解をもたない。
2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ について、 $b^2 - 4ac$ を **判別式** といい、ふつう D で表す。
2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数解とその個数について、前ページの [1] ~ [3] は、
判別式 $D = b^2 - 4ac$ の符号によって、次のようにまとめられる。

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数解と判別式 $D = b^2 - 4ac$			
$D = b^2 - 4ac$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
実数解	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 異なる2つの実数解	$x = -\frac{b}{2a}$ 重解 (実数解)	実数解はない
実数解の 個数	2 個	1 個	0 個

上の表から「 $D \geq 0 \iff$ 2次方程式が実数解をもつ」

【注意】 判別式は、解の公式の $\sqrt{\quad}$ の中身である。しかし、 $D = \sqrt{b^2 - 4ac}$ と D に $\sqrt{\quad}$ がついてしまうミスを毎年たくさん見かけます。

例 14 2 次方程式の実数解の個数

$$a=1, b=7, c=9$$

- (1) 2 次方程式 $x^2+7x+9=0$ の判別式を D とすると

$$D=7^2-4\cdot 1\cdot 9=49-36=13>0 \quad D \text{ は正の数になった}$$

であるから、実数解の個数は 2 個である。

$$a=4, b=-12, c=9$$

- (2) 2 次方程式 $4x^2-12x+9=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-12)^2-4\cdot 4\cdot 9=0 \quad D \text{ は0になった}$$

であるから、実数解の個数は 1 個である。 終

すなわち、重解をもつ。

参考

判別式の簡単バージョン

$$\frac{D}{4}=b'^2-ac$$

判別式にも簡単バージョンがあります。

判別式で簡単バージョンを使うときは $\frac{D}{4}$ と書きます。

D でやっても $\frac{D}{4}$ でやっても結果は同じになります。

別解 (簡単バージョン)

$$a=4, 2b'=-12 \text{ より } b'=-6, c=9$$

- (2) 2 次方程式 $4x^2-12x+9=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-6)^2-4\cdot 9=36-36=0 \quad \frac{D}{4} \text{ は0になった}$$

であるから、実数解の個数は 1 個

練習 27 次の 2 次方程式の実数解の個数を求めよ。

$$(1) x^2+3x-5=0$$

$$(2) 3x^2-5x+4=0$$

$$(3) x^2-x+\frac{1}{4}=0$$

$$(4) x^2+2\sqrt{3}x+3=0$$

解答

$$a=1, b=3, c=-5$$

- (1) 2 次方程式 $x^2+3x-5=0$ の判別式を D とすると

$$D=3^2-4\cdot 1\cdot (-5)=9+20=29>0 \quad D \text{ は正の数になった}$$

であるから、実数解の個数は 2 個

$$a=3, b=-5, c=4$$

- (2) 2 次方程式 $3x^2-5x+4=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-5)^2-4\cdot 3\cdot 4=25-48=-23<0 \quad D \text{ は負の数になった}$$

であるから、実数解の個数は 0 個

$$a=1, b=-1, c=\frac{1}{4}$$

- (3) 2 次方程式 $x^2-x+\frac{1}{4}=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot \frac{1}{4}=1-1=0 \quad D \text{ は0になった}$$

であるから、実数解の個数は 1 個

$$a=1, b=2\sqrt{3}, c=3$$

- (4) 2 次方程式 $x^2+2\sqrt{3}x+3=0$ の判別式を D とすると

$$D=(2\sqrt{3})^2-4\cdot 1\cdot 3=12-12=0 \quad D \text{ は0になった}$$

であるから、実数解の個数は 1 個

別解 (簡単バージョン)

$$a=1, 2b'=2\sqrt{3} \text{ より } b'=\sqrt{3}, c=3$$

- (4) 2 次方程式 $x^2+2\sqrt{3}x+3=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(\sqrt{3})^2-1\cdot 3=3-3=0 \quad \frac{D}{4} \text{ は0になった}$$

であるから、実数解の個数は 1 個

例題 8 2 次方程式 $x^2-2x+m=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき、
定数 m の値の範囲を求めよ。

参考

↑

解なし

↓

異なる2つの実数解

$m=3 \rightarrow x^2-2x+3=0 \rightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot3}}{2} \rightarrow$ 解なし

$m=2 \rightarrow x^2-2x+2=0 \rightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot2}}{2} \rightarrow$ 解なし

$m=1 \rightarrow x^2-2x+1=0 \rightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot1}}{2} \rightarrow$ 重解

$m=0 \rightarrow x^2-2x=0 \rightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot0}}{2} \rightarrow$ 異なる2つの解

$m=-1 \rightarrow x^2-2x-1=0 \rightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2}$
 $\rightarrow x=1\pm\sqrt{2} \rightarrow$ 異なる2つの解

$m=-2 \rightarrow x^2-2x-2=0 \rightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2}$
 $\rightarrow x=1\pm\sqrt{3} \rightarrow$ 異なる2つの解

√の中がマイナス

√の中がマイナス

√の中が0

√の中がプラス

√の中がプラス

√の中がプラス

左辺を因数分解して $(x-1)^2=0$ より $x-1=0$ ゆえに $x=1$

左辺を因数分解して $x(x-2)=0 \rightarrow x=0, 2$

【解答】 この 2 次方程式の判別式を D とすると $a=1, b=-2, c=m$

$$D=(-2)^2-4\cdot1\cdot m=4-4m$$

2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつのは $D>0$ のときで

あるから $4-4m>0$

よって $-4m>-4$ 両辺を (-4) で割って $m<1$

マイナスで割っているので、不等号の向きが変わることに注意

【別解】 この 2 次方程式の判別式を D とすると $a=1, 2b'=-2$ より $b'=-1, c=m$

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot m=1-m \qquad \frac{D}{4}=b'^2-ac$$

2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつのは $D>0$ のときで

あるから $1-m>0$

よって $-m>-1$ 両辺に (-1) をかけて $m<1$

マイナスを掛けているので、不等号の向きが変わることに注意

練習 28 2 次方程式 $x^2-4x+m=0$ が実数解をもたないとき、
定数 m の値の範囲を求めよ。

【解答】 $a=1, b=-4, c=m$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot m=16-4m$$

2 次方程式が実数解をもたないのは $D<0$ のときであるから

$$16-4m<0$$

よって $-4m>-16$ 両辺を (-4) で割って $m<4$

マイナスで割っているので、不等号の向きが変わることに注意

【別解】 この 2 次方程式の判別式を D とすると $a=1, 2b'=-4$ より $b'=-2, c=m$

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot m=4-m \qquad \frac{D}{4}=b'^2-ac$$

2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつのは $D>0$ のときで

あるから $4-m>0$

よって $-m>-4$ 両辺に (-1) をかけて $m<4$

マイナスを掛けているので、不等号の向きが変わることに注意

例題 9 2 次方程式 $x^2 + mx + m = 0$ が重解をもつとき、定数 m の値を求めよ。

また、そのときの重解を求めよ。

$$a=1, b=m, c=m$$

【解答】 この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = m^2 - 4m$$

2 次方程式が重解をもつのは $D=0$ のときであるから

$$m^2 - 4m = 0$$

$$\text{よって } m(m-4)=0 \quad \text{より } m=0, 4$$

$$m=0 \text{ のとき, 方程式は } x^2 + 0 \cdot x + 0 = 0 \quad (m-0)(m-4)=0 \text{ と考える}$$

$$\text{つまり } x^2 = 0$$

$$\text{したがって, 重解は } x=0$$

$$m=4 \text{ のとき, 方程式は } x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$\text{つまり } (x+2)^2 = 0$$

$$\text{したがって, 重解は } x=-2$$

$b^2 - 4ac$ を D としているので, 解の公式を

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

と書くこともできる。

$$a=1, b=m, c=m$$

【参考】 2 次方程式 $x^2 + mx + m = 0$ が重解をもつとき、 $D=0$ である。

$$\text{また, 解の公式から } x = \frac{-m \pm \sqrt{D}}{2 \cdot 1} = \frac{-m \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-m}{2}$$

$$\text{ゆえに 重解は } x = -\frac{m}{2} \text{ であるから,}$$

$$m=0 \text{ のときの重解は } x = -\frac{0}{2} = 0$$

$$m=4 \text{ のときの重解は } x = -\frac{4}{2} = -2$$

と求められる。

重解となるとき m をここに代入すると、自動的に重解が出てくる。

練習 29 2 次方程式 $x^2 + (m+2)x + m+5 = 0$ が重解をもつとき、定数 m の値を求めよ。

また、そのときの重解を求めよ。

$$x^2 + (m+2)x + (m+5) = 0 \text{ と考える。}$$

$$a=1, b=m+2, c=m+5$$

【解答】

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= (m+2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m+5) \quad (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \\ &= (m^2 + 4m + 4) - 4(m+5) \\ &= m^2 + 4m + 4 - 4m - 20 \\ &= m^2 - 16 \end{aligned}$$

2 次方程式が重解をもつのは $D=0$ のときであるから

$$m^2 - 16 = 0$$

$$\text{よって } m^2 = 16 \quad \text{より } m = \pm \sqrt{16} \quad \text{つまり } m = \pm 4$$

$$m=4 \text{ のとき, 方程式は } x^2 + (4+2)x + 4+5 = 0$$

$$\text{つまり } x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$\text{したがって, } (x+3)^2 = 0 \quad \text{より, 重解は } x=-3$$

$$m=-4 \text{ のとき, 方程式は } x^2 + (-4+2)x + (-4)+5 = 0$$

$$\text{つまり } x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\text{したがって, } (x-1)^2 = 0 \quad \text{より, 重解は } x=1$$

$$a=1, b=m+2, c=m+5$$

【参考】

与えられた 2 次方程式が重解をもつとき、 $D=0$ である。

$$\text{また, 解の公式から } x = \frac{-(m+2) \pm \sqrt{D}}{2 \cdot 1} = \frac{-(m+2) \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-(m+2)}{2}$$

$$\text{ゆえに 重解は } x = -\frac{m+2}{2} \text{ であるから,}$$

$$m=4 \text{ のときの重解は } x = -\frac{4+2}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$

$$m=-4 \text{ のときの重解は } x = -\frac{-4+2}{2} = -\frac{-2}{2} = 1$$

と求められる。

$$\begin{aligned} m^2 - 4^2 &= 0 \text{ と考えて} \\ (m+4)(m-4) &= 0 \\ \text{よって } m &= -4, 4 \\ \text{としてもよい。} \end{aligned}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$