

第3章「2次関数」第2節 2次関数の値の変化 研究 定義域が変化するときの関数の最大値・最小値

関数の定義域が変化するとき、その関数の最小値を調べてみよう。

例1 a を正の定数とすると、次の関数の最小値を求める。

$y = x^2 - 4x + 1 \quad (0 \leq x \leq a)$

この関数の式を変形すると -4 の半分は -2
 $y = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 2^2 + 1 = (x - 2)^2 - 3$
すなわち $y = (x - 2)^2 - 3 \quad (0 \leq x \leq a)$

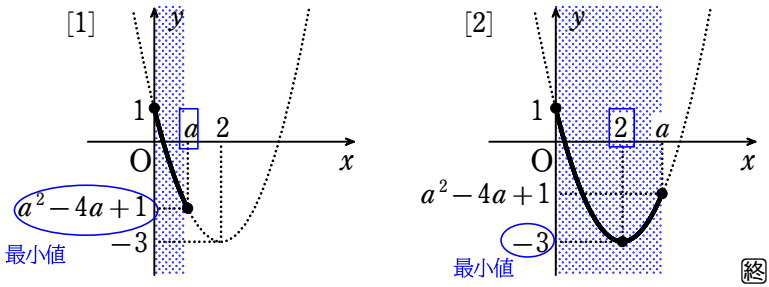
関数 $y = x^2 - 4x + 1$ のグラフは下に凸の放物線で、
軸は直線 $x = 2$ である。

定義域 $0 \leq x \leq a$ が軸 $x = 2$ を含まない場合と、
軸 $x = 2$ を含む場合とで分けて考える。

[1] $0 < a < 2$ のとき $\leftarrow$ 定義域の右端 $x = a$ が軸 $x = 2$ よりも左なので $a < 2$ となるが、問題文で a は正とあるので $0 < a < 2$ となる。
この関数のグラフは図[1]の実線部分である。
よって、 y は $x = a$ で最小となる。
最小値は $y = x^2 - 4x + 1$ に $x = a$ を代入して $y = a^2 - 4a + 1$
ゆえに $0 < a < 2$ では $x = a$ で最小値 $a^2 - 4a + 1$ をとる。

[2] $2 \leq a$ のとき 定義域の右端 $x = a$ が軸 $x = 2$ よりも右、つまり定義域内に軸が入るとき
この関数のグラフは図[2]の実線部分である。
よって、 y は $x = 2$ で最小となる。
最小値は頂点の y 座標より、最小値 -3 をとる。
ゆえに $2 \leq a$ では $x = 2$ で最小値 -3 をとる。

[1], [2] から $0 < a < 2$ のとき $x = a$ で最小値 $a^2 - 4a + 1$
 $2 \leq a$ のとき $x = 2$ で最小値 -3



練習1 a は正の定数とする。次の関数の最大値を求めよ。

$y = -x^2 + 2x + 1 \quad (0 \leq x \leq a)$

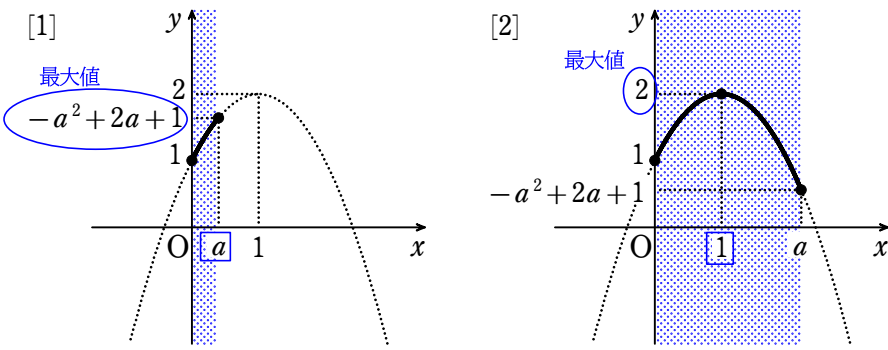
【解答】
この関数の式を変形すると $-x^2 + 2x = \frac{-1 \times x^2 + (-1) \times (-2x)}{-1 \times \{x^2 + (-2x)\}}$
 $y = -x^2 + 2x + 1 = -(x^2 - 2x) + 1 = -\{(x - 1)^2 - 1^2\} + 1$
 -2 の半分は -1 $= -(x - 1)^2 + 1^2 + 1 = -(x - 1)^2 + 2$

すなわち $y = -(x - 1)^2 + 2 \quad (0 \leq x \leq a)$
[1] $0 < a < 1$ のとき 軸が定義域に入らないとき 動画を見てイメージしよう

この関数のグラフは図[1]の実線部分である。
よって、 y は $x = a$ で最大となる。
最大値は $y = -x^2 + 2x + 1$ に $x = a$ を代入して $y = -a^2 + 2a + 1$
ゆえに $0 < a < 1$ では $x = a$ で最大値 $-a^2 + 2a + 1$ をとる。

[2] $1 \leq a$ のとき 軸が定義域に入るとき
この関数のグラフは図[2]の実線部分である。
よって、 y は $x = 1$ で最大となる。
最大値は頂点の y 座標より、 $x = 1$ で最大値 2 をとる。

[1], [2] から $0 < a < 1$ のとき $x = a$ で最大値 $-a^2 + 2a + 1$
 $1 \leq a$ のとき $x = 1$ で最大値 2



a の範囲は「棒の置き方」と考えます。
 $2 < a$ とは「 $x = a$ の棒を $x = 2$ の棒より右側に置く」と読み取ります。

問題(クリアー問題198)

$0 \leq x \leq a$ は右側の扉が開いていくイメージ

a は正の定数とする。関数 $y = x^2 - 2x - 1$ ($0 \leq x \leq a$) について、次の問いに答えよ。

(1) 最小値を求めよ。

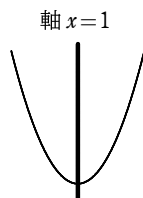
(2) 最大値を求めよ。

解答 この関数の式を変形すると -2 の半分は -1

$$y = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 1^2 - 1 = (x-1)^2 - 2$$

すなわち $y = (x-1)^2 - 2$ ($0 \leq x \leq a$)

関数 $y = x^2 - 2x - 1$ のグラフは下に凸の放物線で、
軸は直線 $x=1$ である。



(1) 定義域 $0 \leq x \leq a$ が軸 $x=1$ を含まない場合と、
軸 $x=1$ を含む場合とで分けて考える。

[1] $0 < a < 1$ のとき

関数のグラフは図[1]の実線部分である。

よって、 y は $x=a$ で最小となる。

最小値は $y = x^2 - 2x - 1$ に $x=a$ を代入して $y = a^2 - 2a - 1$

ゆえに $0 < a < 1$ では $x=a$ で最小値 $a^2 - 2a - 1$ をとる。

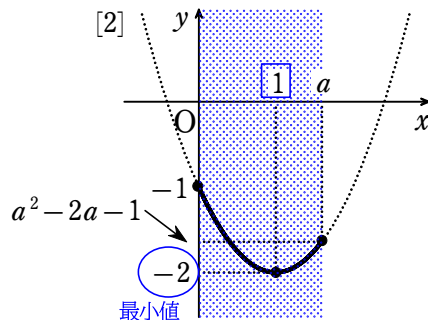
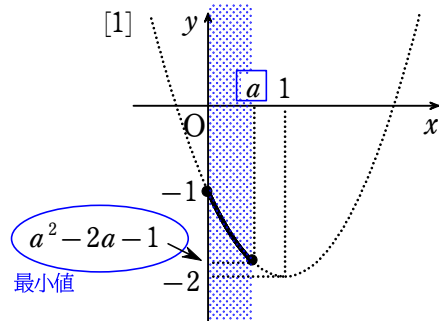
[2] $1 \leq a$ のとき

関数のグラフは図[2]の実線部分である。

よって、 y は $x=1$ で最小となる。

最小値は頂点の y 座標より、最小値 -2 をとる。

ゆえに $1 \leq a$ では $x=1$ で最小値 -2 をとる。



$0 < a \leq 1$ と $1 < a$ で場合分け
をしてもよい。どちらかにイ
コールが入っていればいい。

[1], [2] から

$0 < a < 1$ のとき $x=a$ で最小値 $a^2 - 2a - 1$

$1 \leq a$ のとき $x=1$ で最小値 -2

(2) 放物線は軸に関して対称であるから、

$x=0$ のときと同じ y 座標になるのは $x=2$ のときである。

[1] $0 < a < 2$ のとき

定義域の右端が左端と同じ高さになるまで

この関数のグラフは図[1]の実線部分である。

よって、 y は $x=0$ で最大となる。

最大値は $y = x^2 - 2x - 1$ に $x=0$ を代入して $y = 0^2 - 2 \cdot 0 - 1 = -1$

ゆえに $0 < a < 2$ では $x=0$ で最大値 -1 をとる。

[2] $a=2$ のとき

この関数のグラフは図[2]の実線部分である。

よって、 y は $x=0, 2$ で最大となる。

最大値は $y = x^2 - 2x - 1$ に $x=0$ を代入して $y = 0^2 - 2 \cdot 0 - 1 = -1$

ゆえに $a=2$ では $x=0, 2$ で最大値 -1 をとる。

[3] $2 < a$ のとき

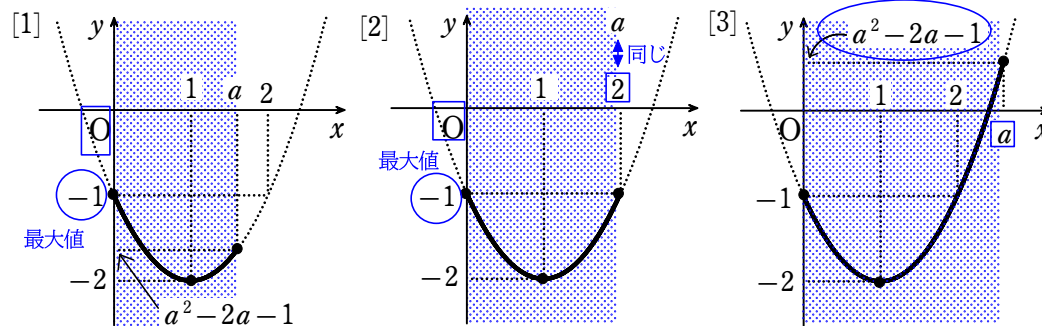
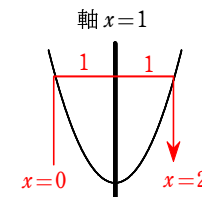
定義域の右端が左端を追い抜くとき

この関数のグラフは図[3]の実線部分である。

よって、 y は $x=a$ で最大となる。

最大値は $y = x^2 - 2x - 1$ に $x=a$ を代入して $y = a^2 - 2a - 1$

ゆえに $2 < a$ では $x=a$ で最大値 $a^2 - 2a - 1$ をとる。



[1] ~ [3] から

$0 < a < 2$ のとき $x=0$ で最大値 -1

$a=2$ のとき $x=0, 2$ で最大値 -1

$2 < a$ のとき $x=a$ で最大値 $a^2 - 2a - 1$

【問題】(クリアー例題51)

$a \leq x \leq a+1$ は定義域の幅が変わらず横に動いていきます

a は定数とする。関数 $y = x^2 - 2x + 1$ ($a \leq x \leq a+1$) の最小値を求めよ。

【解答】 この関数の式を変形すると -2 の半分は -1

$$y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 - 1^2 + 1 = (x-1)^2$$

すなわち $y = (x-1)^2$

よって、この放物線の軸は直線 $x=1$ 、頂点は点 $(1, 0)$ である。

定義域が軸 $x=1$ よりも左側、つまり右端 $x=a+1$ が軸 $x=1$ より左

[1] $a+1 < 1$ すなわち $a < 0$ のとき

この関数のグラフは図[1]の実線部分である。

よって、 y は $x=a+1$ で最小となる。

最小値は $y = x^2 - 2x + 1$ に $x=a+1$ を代入して

$$y = (a+1)^2 - 2(a+1) + 1 = (a^2 + 2a + 1) - 2a - 2 + 1 = a^2$$

ゆえに $a < 0$ では $x=a+1$ で最小値 a^2 をとる。

$a \leq 1$ かつ $1 \leq a+1 \rightarrow a \leq 1$ かつ $0 \leq a \rightarrow 0 \leq a \leq 1$
定義域の内部に軸が入る、つまり軸 $x=1$ が左端 $x=a$ と右端 $x=a+1$ の間

[2] $a \leq 1 \leq a+1$ すなわち $0 \leq a \leq 1$ のとき

この関数のグラフは図[2]の実線部分である。

よって、 y は $x=1$ で最小となる。

最小値は頂点の y 座標より、最小値 0 をとる。

ゆえに $0 \leq a \leq 1$ では $x=1$ で最小値 0 をとる。

定義域が軸 $x=1$ よりも右側、つまり左端 $x=a$ が軸 $x=1$ より右

[3] $1 < a$ のとき

この関数のグラフは図[3]の実線部分である。

よって、 y は $x=a$ で最小となる。

最小値は $y = x^2 - 2x + 1$ に $x=a$ を代入して $y = a^2 - 2a + 1$

ゆえに $1 < a$ では $x=a$ で最小値 $a^2 - 2a + 1$ をとる。

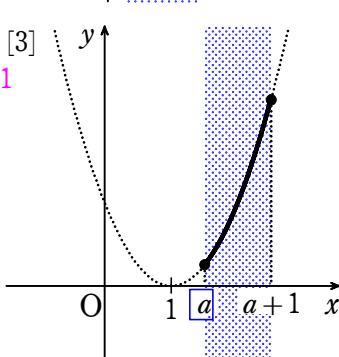
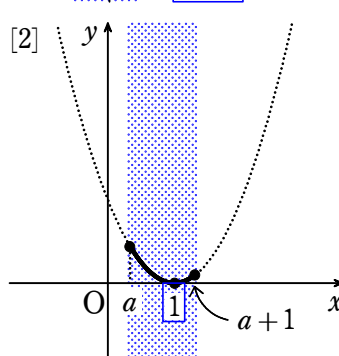
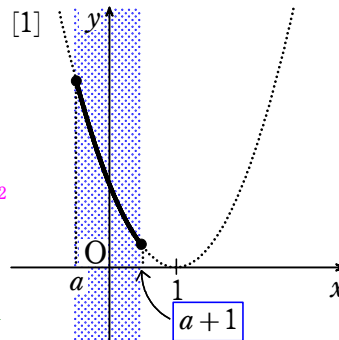
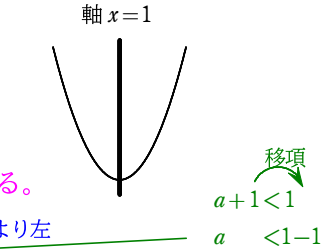
[1] ~ [3] から

$a < 0$ のとき $x = a+1$ で最小値 a^2

$0 \leq a \leq 1$ のとき $x = 1$ で最小値 0

$1 < a$ のとき $x = a$ で最小値 $a^2 - 2a + 1$

【参考】この問題に限った話、 $y = (x-1)^2$ に $x=a+1$ を代入すると $y = \{(a+1)-1\}^2 = a^2$ となって簡単です。



【問題】(クリアー問題199)

a は定数とする。関数 $y = x^2 + 6x + 5$ ($a \leq x \leq a+2$) の最小値を求めよ。

【解答】 この関数の式を変形すると $+6$ の半分は $+3$

$$y = x^2 + 6x + 5 = (x+3)^2 - 3^2 + 5 = (x+3)^2 - 4$$

すなわち $y = (x+3)^2 - 4$

よって、この放物線の軸は直線 $x=-3$ 、頂点は点 $(-3, -4)$ である。

定義域が軸 $x=-3$ よりも左側、つまり右端 $x=a+2$ が軸 $x=-3$ より左

[1] $a+2 < -3$ すなわち $a < -5$ のとき

この関数のグラフは図[1]の実線部分である。

よって、 y は $x=a+2$ で最小となる。

最小値は $y = x^2 + 6x + 5$ に $x=a+2$ を代入して

$$y = (a+2)^2 + 6(a+2) + 5 = (a^2 + 4a + 4) + 6a + 12 + 5 = a^2 + 10a + 21$$

ゆえに $a < -5$ では $x=a+2$ で最小値 $a^2 + 10a + 21$ をとる。

$a \leq -3$ かつ $-3 \leq a+2 \rightarrow a \leq -3$ かつ $-5 \leq a \rightarrow -5 \leq a \leq -3$

定義域の内部に軸が入る、つまり軸 $x=-3$ が左端 $x=a$ と右端 $x=a+2$ の間

[2] $a \leq -3 \leq a+2$ すなわち $-5 \leq a \leq -3$ のとき

この関数のグラフは図[2]の実線部分である。

よって、 y は $x=-3$ で最小となる。

最小値は頂点の y 座標より、最小値 -4 をとる。

ゆえに $-5 \leq a \leq -3$ では $x=-3$ で最小値 -4 をとる。

定義域が軸 $x=-3$ よりも右側、つまり左端 $x=a$ が軸 $x=-3$ より右

[3] $-3 < a$ のとき

この関数のグラフは図[3]の実線部分である。

よって、 y は $x=a$ で最小となる。

最小値は $y = x^2 + 6x + 5$ に $x=a$ を代入して $y = a^2 + 6a + 5$

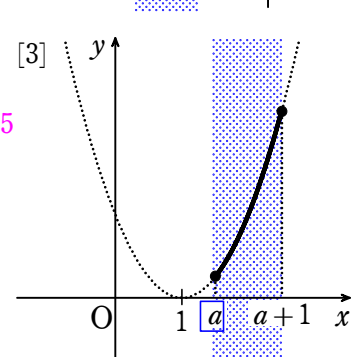
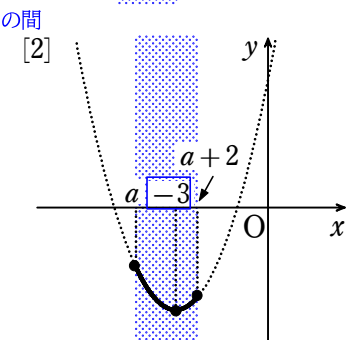
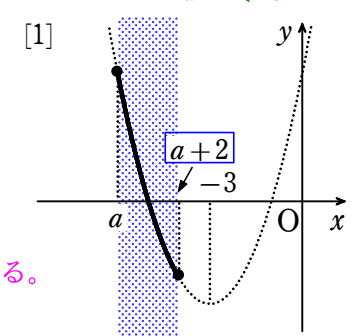
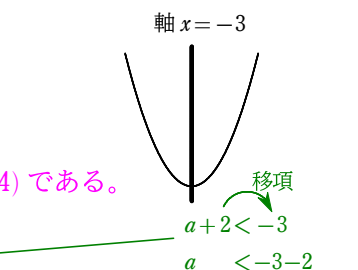
ゆえに $-3 < a$ では $x=a$ で最小値 $a^2 + 6a + 5$ をとる。

[1] ~ [3] から

$a < -5$ のとき $x = a+2$ で最小値 $a^2 + 10a + 21$

$-5 \leq a \leq -3$ のとき $x = -3$ で最小値 -4

$-3 < a$ のとき $x = a$ で最小値 $a^2 + 6a + 5$



問題(クリアー問題200)

a は定数とする。関数 $y = x^2 - 4x + 3$ ($a \leq x \leq a+1$) の最大値を求めよ。

解答 この関数の式を変形すると -4 の半分は -2

$$y = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 2^2 + 3 = (x-2)^2 - 1$$

すなわち $y = (x-2)^2 - 1$

よって、この放物線の軸は直線 $x=2$ 、頂点は点 $(2, -1)$ である。

定義域の幅が1より、定義域 $a \leq x \leq a+1$ の中央の値は $x = a + \frac{1}{2}$

中央と軸の位置によって場合分けをする。

[1] $a + \frac{1}{2} < 2$ すなわち $a < \frac{3}{2}$ のとき

この関数のグラフは図[1]の実線部分である。

よって、 y は $x=a$ で最大となる。

最大値は $y = x^2 - 4x + 3$ に $x=a$ を代入して $y = a^2 - 4a + 3$

ゆえに $a < \frac{3}{2}$ では $x=a$ で最大値 $a^2 - 4a + 3$ をとる。

[2] $a + \frac{1}{2} = 2$ すなわち $a = \frac{3}{2}$ のとき

軸は定義域の中央にあり、 $x=a$ と $x=a+1$ における y の値が一致する。

この関数のグラフは図[2]の実線部分である。

$a = \frac{3}{2}$ より、右端は $x = a+1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ であるから y は $x = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ で最大となる。

最大値は $y = x^2 - 4x + 3$ に $x = \frac{3}{2}$ を代入して $y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{4} - 6 + 3 = -\frac{3}{4}$

ゆえに $a = \frac{3}{2}$ では $x = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ で最大値 $-\frac{3}{4}$ をとる。

[3] $2 < a + \frac{1}{2}$ すなわち $\frac{3}{2} < a$ のとき

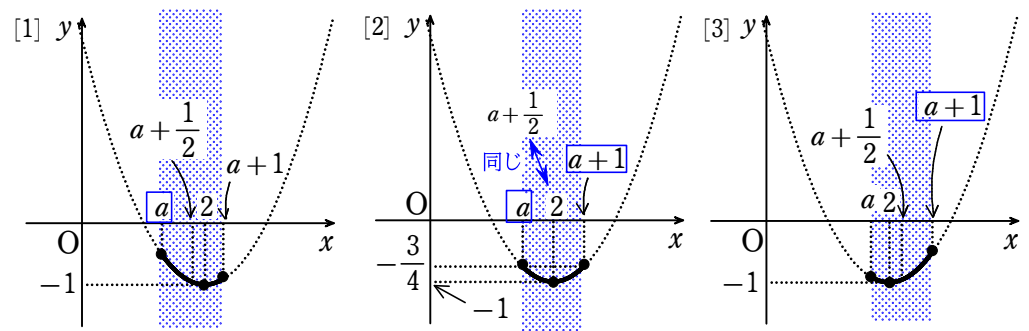
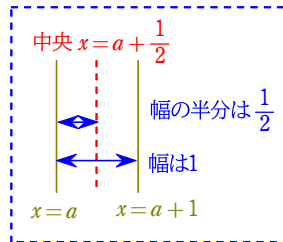
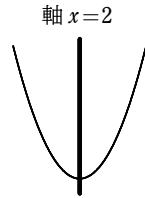
この関数のグラフは図[3]の実線部分である。

よって、 y は $x=a+1$ で最大となる。

最大値は $y = x^2 - 4x + 3$ に $x=a+1$ を代入して

$$y = (a+1)^2 - 4(a+1) + 3 = (a^2 + 2a + 1) - 4a - 4 + 3 = a^2 - 2a$$

ゆえに $\frac{3}{2} < a$ では $x=a+1$ で最大値 $a^2 - 2a$ をとる。



[1] ~ [3] から

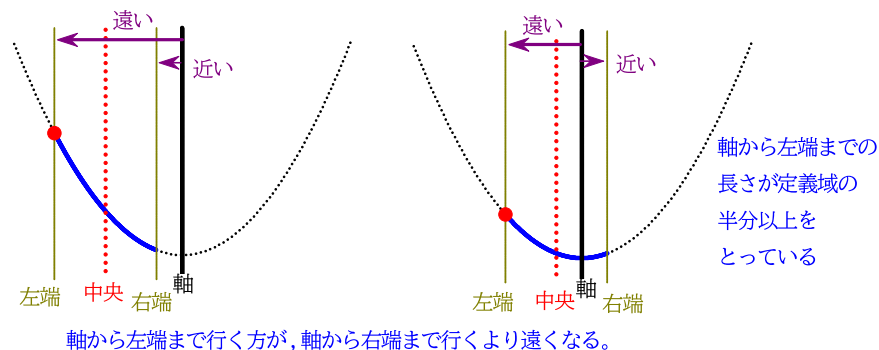
$a < \frac{3}{2}$ のとき $x=a$ で最大値 $a^2 - 4a + 3$

$a = \frac{3}{2}$ のとき $x = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ で最大値 $-\frac{3}{4}$

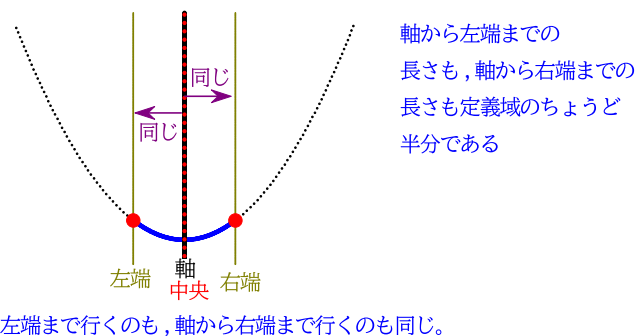
$\frac{3}{2} < a$ のとき $x=a+1$ で最大値 $a^2 - 2a$

参考 (定義域の中央と軸)

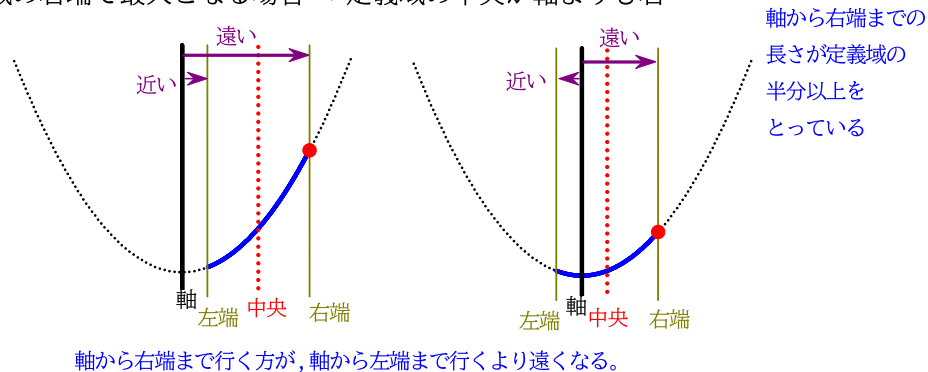
[1] 定義域の左端で最大となる場合 → 定義域の中央が軸よりも左



[2] 定義域の両端で最大となる場合 → 定義域の中央と軸が一致



[3] 定義域の右端で最大となる場合 → 定義域の中央が軸よりも右



問題 (クリアー問題196)

a は定数とする。関数 $y = -x^2 + 2ax - 4a + 1$ ($-1 \leq x \leq 2$) の最大値を求めよ。

解答

$$y = -x^2 + 2ax - 4a + 1 \text{ を変形すると } y = -(x^2 - 2ax) - 4a + 1 = -\{(x-a)^2 - a^2\} - 4a + 1 = -(x-a)^2 + a^2 - 4a + 1$$

すなわち $y = -(x-a)^2 + a^2 - 4a + 1$

この放物線の軸は直線 $x = a$ 、頂点は点 $(a, a^2 - 4a + 1)$ である。

軸 $x = a$ が定義域に入るか入らないかで場合分けをする。

[1] $a < -1$ のとき 軸 $x = a$ が定義域よりも左側

$-1 \leq x \leq 2$ でのグラフは図 [1] の実線部分のようになる。

よって、 y は $x = -1$ で最大となる。

最大値は $y = -x^2 + 2ax - 4a + 1$ に $x = -1$ を代入して

$$y = -(-1)^2 + 2a \cdot (-1) - 4a + 1 = -1 - 2a - 4a + 1 = -6a$$

ゆえに $a < -1$ では $x = -1$ で最大値 $-6a$ をとる。

[2] $-1 \leq a \leq 2$ のとき 軸 $x = a$ が定義域の内部

$-1 \leq x \leq 2$ でのグラフは図 [2] の実線部分のようになる。

よって、 y は $x = a$ で最大となる。

最大値は頂点の y 座標より、最大値 $a^2 - 4a + 1$ をとる。

ゆえに $-1 \leq a \leq 2$ では $x = a$ で最大値 $a^2 - 4a + 1$ をとる。

[3] $2 < a$ のとき 軸 $x = a$ が定義域よりも右側

$-1 \leq x \leq 2$ でのグラフは図 [3] の実線部分のようになる。

よって、 y は $x = 2$ で最大となる。

最大値は $y = -x^2 + 2ax - 4a + 1$ に $x = 2$ を代入して

$$y = -2^2 + 2a \cdot 2 - 4a + 1 = -4 + 4a - 4a + 1 = -3$$

ゆえに $2 < a$ では $x = 2$ で最大値 -3 をとる。

以上から

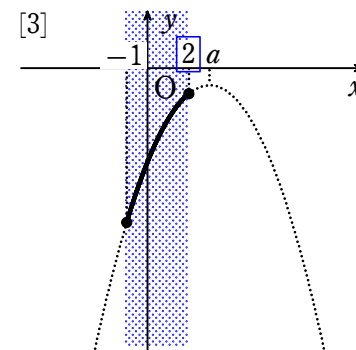
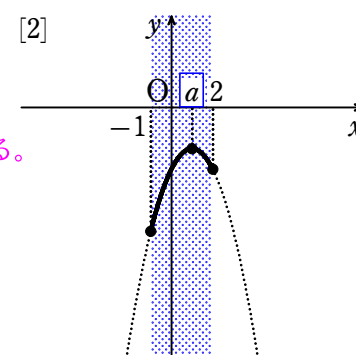
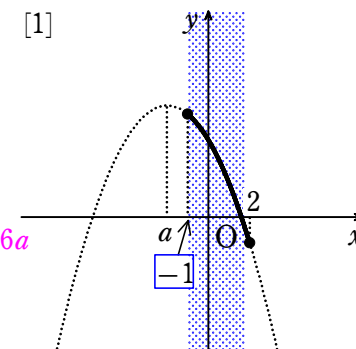
$a < -1$ のとき $x = -1$ で最大値 $-6a$

$-1 \leq a \leq 2$ のとき $x = a$ で最大値 $a^2 - 4a + 1$

$2 < a$ のとき $x = 2$ で最大値 -3

$$\begin{aligned} -x^2 + 2ax &= \frac{-1}{2} \times x^2 + \frac{(-1)}{2} \times (-2ax) \\ &= \frac{-1}{2} \times \{x^2 + (-2ax)\} \end{aligned}$$

軸 $x = a$



問題(クリアー問題197)

a は定数とする。関数 $y = x^2 - 2ax + 2a^2$ ($0 \leq x \leq 2$) について、次の問いに答えよ。

(1) 最小値を求めよ。

(2) 最大値を求めよ。

解答 関数の式を変形すると $-2a$ の半分は $-a$

$$y = x^2 - 2ax + 2a^2 = (x - a)^2 - a^2 + 2a^2 = (x - a)^2 + a^2$$

$$\text{すなわち } y = (x - a)^2 + a^2 \quad (0 \leq x \leq 2)$$

この関数のグラフの軸は直線 $x = a$ 、頂点は (a, a^2)

(1) 軸 $x = a$ が定義域に入るか入らないかで場合分けをする。

[1] $a < 0$ のとき 軸 $x = a$ が定義域よりも左側

関数のグラフは図 [1] の実線部分である。

よって、 y は $x = 0$ で最小となる。

最小値は $y = x^2 - 2ax + 2a^2$ に $x = 0$ を代入して

$$y = 0^2 - 2a \cdot 0 + 2a^2 = 2a^2$$

ゆえに $a < 0$ では $x = 0$ で最小値 $2a^2$ をとる。

[2] $0 \leq a \leq 2$ のとき 軸 $x = a$ が定義域の内部

関数のグラフは図 [2] の実線部分である。

よって、 y は $x = a$ で最小となる。

最小値は頂点の y 座標より、最小値 a^2 をとる。

ゆえに $0 \leq a \leq 2$ では $x = a$ で最小値 a^2 をとる。

[3] $2 < a$ のとき 軸 $x = a$ が定義域よりも右側

関数のグラフは図 [3] の実線部分である。

よって、 y は $x = 2$ で最小となる。

最小値は $y = x^2 - 2ax + 2a^2$ に $x = 2$ を代入して

$$y = 2^2 - 2a \cdot 2 + 2a^2 = 2a^2 - 4a + 4$$

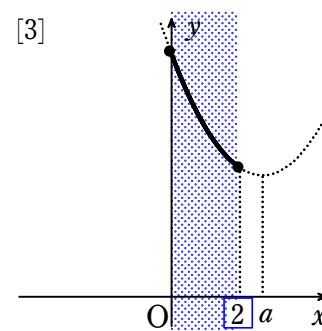
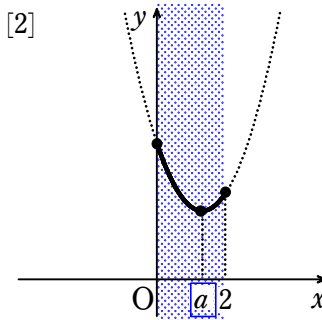
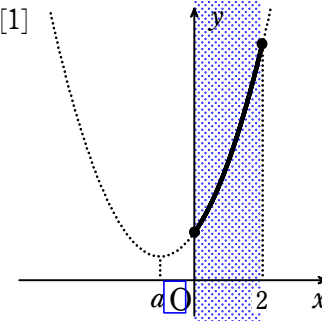
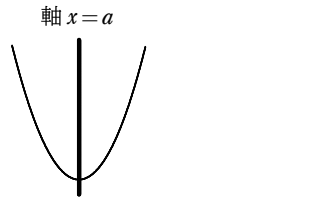
ゆえに $2 < a$ では $x = 2$ で最小値 $2a^2 - 4a + 4$ をとる。

[1] ~ [3] から

$a < 0$ のとき $x = 0$ で最小値 $2a^2$

$0 \leq a \leq 2$ のとき $x = a$ で最小値 a^2

$2 < a$ のとき $x = 2$ で最小値 $2a^2 - 4a + 4$



(2) 定義域 $0 \leq x \leq 2$ の中央の値は $x = 1$

中央と軸の位置によって場合分けをする。

[1] $a < 1$ のとき 中央が軸より左

関数のグラフは図 [1] の実線部分である。

よって、 y は $x = 2$ で最大となる。

最大値は $y = x^2 - 2ax + 2a^2$ に $x = 2$ を代入して

$$y = 2^2 - 2a \cdot 2 + 2a^2 = 2a^2 - 4a + 4$$

ゆえに $a < 1$ では $x = 2$ で最大値 $2a^2 - 4a + 4$ をとる。

[2] $a = 1$ のとき 中央が軸と一致

軸は定義域の中央にあり、 $x = 0$ と $x = 2$ における y の値が一致する。

この関数のグラフは図 [2] の実線部分である。

y は $x = 0, 2$ で最大となる。

$$a = 1 \text{ より } y = x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 2 \cdot 1^2 = x^2 - 2x + 2$$

最大値は $y = x^2 - 2x + 2$ に $x = 0$ を代入して $y = 0^2 - 2 \cdot 0 + 2 = 2$

ゆえに $a = 1$ では $x = 0, 2$ で最大値 2 をとる。

[3] $1 < a$ のとき 中央が軸より右

関数のグラフは図 [3] の実線部分である。

よって、 y は $x = 0$ で最大となる。

最大値は $y = x^2 - 2ax + 2a^2$ に $x = 0$ を代入して

$$y = 0^2 - 2a \cdot 0 + 2a^2 = 2a^2$$

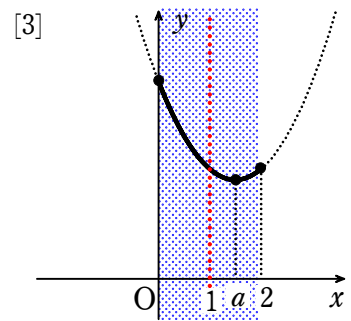
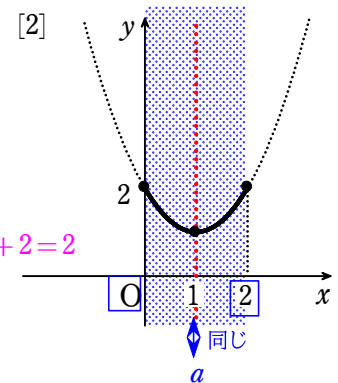
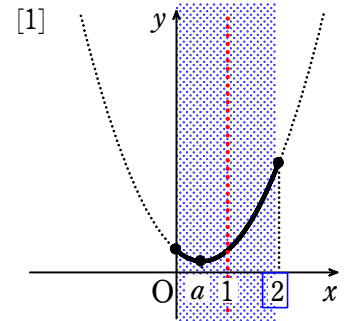
ゆえに $1 < a$ では $x = 0$ で最大値 $2a^2$ をとる。

[1] ~ [3] から

$a < 1$ のとき $x = 2$ で最大値 $2a^2 - 4a + 4$

$a = 1$ のとき $x = 0, 2$ で最大値 2

$1 < a$ のとき $x = 0$ で最大値 $2a^2$



問題(クリアー問題195)

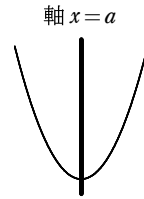
a は定数とする。関数 $y=3x^2-6ax+2$ ($0\leq x\leq 2$) の最大値および最小値を、次の

(1)～(5) の場合について求めよ。

- (1) $a<0$ (2) $0\leq a<1$ (3) $a=1$ (4) $1<a\leq 2$ (5) $a>2$

【解答】 $y=3x^2-6ax+2$ を変形すると $-2a$ の半分は $-a$
 $y=3(x^2-2ax)+2=3\{(x-a)^2-a^2\}+2=3(x-a)^2-3a^2+2$
 すなわち $y=3(x-a)^2-3a^2+2$

この関数のグラフの軸は直線 $x=a$ 、頂点は $(a, -3a^2+2)$
 また、定義域 $0\leq x\leq 2$ の中央の値は $x=1$ である。



- (1) $a<0$ のとき 軸 $x=a$ が定義域よりも左側

関数のグラフは図の実線部分である。

よって、 y は $x=2$ で最大、 $x=0$ で最小となる。

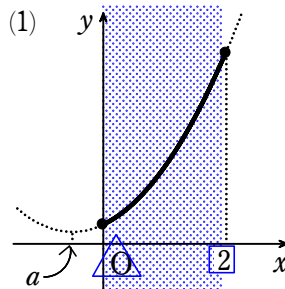
最大値は $y=3x^2-6ax+2$ に $x=2$ を代入して

$$y=3\cdot 2^2-6a\cdot 2+2=12-12a+2=-12a+14$$

最小値は $y=3x^2-6ax+2$ に $x=0$ を代入して

$$y=3\cdot 0^2-6a\cdot 0+2=2$$

ゆえに $a<0$ では $x=2$ で最大値 $-12a+14$ 、 $x=0$ で最小値 2 をとる。



- (2) $0\leq a<1$ のとき 軸 $x=a$ が定義域の内部の左半分

関数のグラフは図の実線部分である。

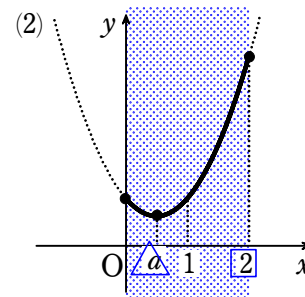
よって、 y は $x=2$ で最大、 $x=a$ で最小となる。

最大値は $y=3x^2-6ax+2$ に $x=2$ を代入して

$$y=3\cdot 2^2-6a\cdot 2+2=12-12a+2=14-12a$$

最小値は頂点の y 座標より、最小値 $-3a^2+2$ をとる。

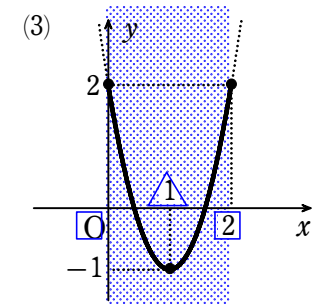
ゆえに $0\leq a<1$ では $x=2$ で最大値 $14-12a$ 、 $x=a$ で最小値 $-3a^2+2$ をとる。



- (3) $a=1$ のとき 中央が軸と一致

軸は定義域の中央にあり、 $x=0$ と $x=2$ における
 y の値が一致する。

この関数のグラフは図の実線部分である。



y は $x=0, 2$ で最大、 $x=1$ で最小となる。

$a=1$ より $y=3x^2-6\cdot 1\cdot x+2=3x^2-6x+2$

最大値は $y=3x^2-6x+2$ に $x=0$ を代入して

$$y=3\cdot 0^2-6\cdot 0+2=2$$

最小値は頂点の y 座標より、

最小値 $-3a^2+2=-3\cdot 1^2+2=-1$ をとる。

ゆえに $a=1$ では $x=0, 2$ で最大値 2 、

$x=1$ で最小値 -1 をとる。

- (4) $1<a\leq 2$ のとき 軸 $x=a$ が定義域の内部の右半分

関数のグラフは図の実線部分である。

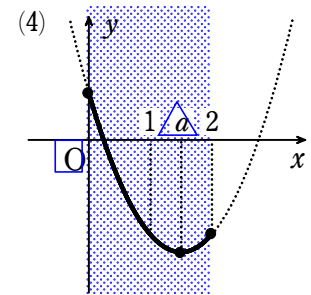
よって、 y は $x=0$ で最大、 $x=a$ で最小となる。

最大値は $y=3x^2-6ax+2$ に $x=0$ を代入して

$$y=3\cdot 0^2-6a\cdot 0+2=2$$

最小値は頂点の y 座標より、最小値 $-3a^2+2$ をとる。

ゆえに $1<a\leq 2$ では $x=0$ で最大値 2 、 $x=a$ で最小値 $-3a^2+2$ をとる。



- (5) $a>2$ のとき 軸 $x=a$ が定義域よりも右側

関数のグラフは図の実線部分である。

よって、 y は $x=0$ で最大、 $x=2$ で最小となる。

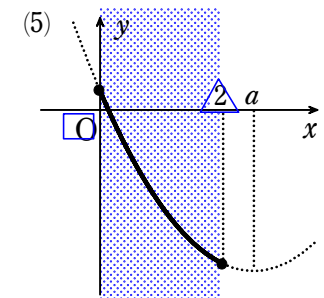
最大値は $y=3x^2-6ax+2$ に $x=0$ を代入して

$$y=3\cdot 0^2-6a\cdot 0+2=2$$

最小値は $y=3x^2-6ax+2$ に $x=2$ を代入して

$$y=3\cdot 2^2-6a\cdot 2+2=12-12a+2=-12a+14$$

ゆえに $2<a$ では $x=0$ で最大値 2 、 $x=2$ で最小値 $-12a+14$ をとる。



以上より

(1) $a<0$ のとき、 $x=2$ で最大値 $-12a+14$ 、 $x=0$ で最小値 2

(2) $0\leq a<1$ のとき、 $x=2$ で最大値 $-12a+14$ 、 $x=a$ で最小値 $-3a^2+2$

(3) $a=1$ のとき、 $x=0, 2$ で最大値 2 、 $x=1$ で最小値 -1

(4) $1<a\leq 2$ のとき、 $x=0$ で最大値 2 、 $x=a$ で最小値 $-3a^2+2$

(5) $2<a$ のとき、 $x=0$ で最大値 2 、 $x=2$ で最小値 $-12a+14$

問題(クリア例題50)

a は定数とする。関数 $y = -x^2 + 4ax - a$ ($0 \leq x \leq 2$) の最大値を求めよ。

$$\begin{aligned} -x^2 + 4ax &= \underline{-1} \times x^2 + \underline{(-1)} \times (-4ax) \\ &= \underline{-1} \times \{x^2 + (-4ax)\} \end{aligned}$$

解答 $y = -x^2 + 4ax - a$ を変形すると $-4a$ の半分は $-2a$

$$y = -(x^2 - 4ax) - a = -\{(x-2a)^2 - (2a)^2\} - a = -(x-2a)^2 + 4a^2 - a$$

$$\text{すなわち } y = -(x-2a)^2 + 4a^2 - a$$

この関数のグラフの軸は直線 $x = 2a$, 頂点 $(2a, 4a^2 - a)$

軸 $x = 2a$ が定義域に入るか入らないかで場合分けをする。

[1] $2a < 0$ すなわち $a < 0$ のとき

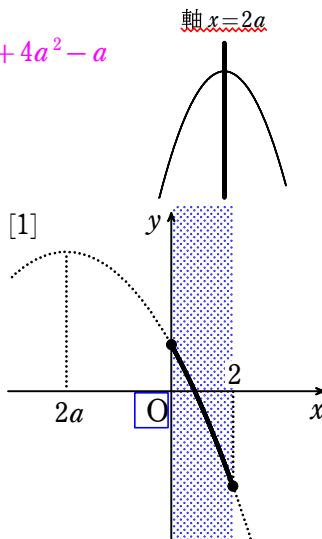
関数のグラフは図 [1] の実線部分である。

よって, y は $x = 0$ で最大となる。

最大値は $y = -x^2 + 4ax - a$ に $x = 0$ を代入して

$$y = -0^2 + 4a \cdot 0 - a = -a$$

ゆえに $a < 0$ では $x = 0$ で最大値 $-a$ をとる。



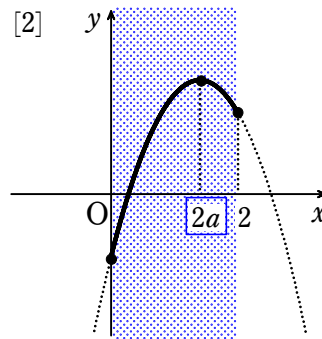
[2] $0 \leq 2a \leq 2$ すなわち $0 \leq a \leq 1$ のとき

関数のグラフは図 [2] の実線部分である。

よって, y は $x = 2a$ で最大となる。

最大値は頂点の y 座標より, 最大値 $4a^2 - a$ をとる。

ゆえに $0 \leq a \leq 1$ では $x = 2a$ で最大値 $4a^2 - a$ をとる。



[3] $2 < 2a$ すなわち $1 < a$ のとき

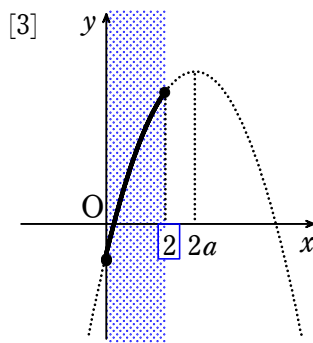
関数のグラフは図 [3] の実線部分である。

よって, y は $x = 2$ で最大となる。

最大値は $y = -x^2 + 4ax - a$ に $x = 2$ を代入して

$$y = -2^2 + 4a \cdot 2 - a = -4 + 8a - a = 7a - 4$$

ゆえに $1 < a$ では $x = 2$ で最大値 $7a - 4$ をとる。



以上より

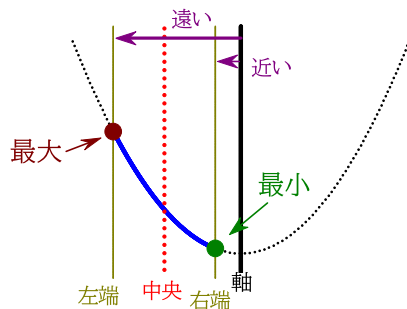
$a < 0$ のとき $x = 0$ で最大値 $-a$,

$0 \leq a \leq 1$ のとき $x = 2a$ で最大値 $4a^2 - a$,

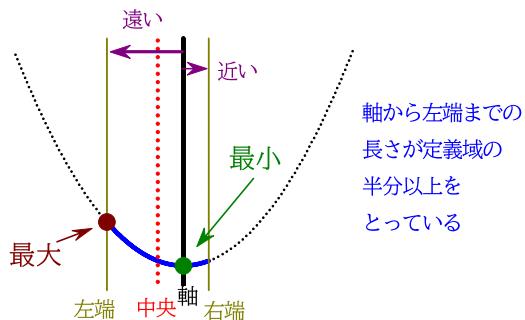
$1 < a$ のとき $x = 2$ で最大値 $7a - 4$

参考 (最大・最小のまとめ)

[1] 定義域全体が軸よりも左 → 右端が軸よりも左

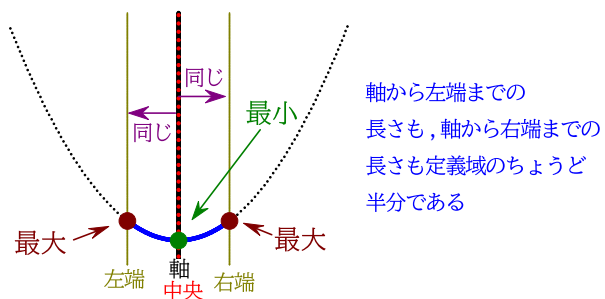


[2] 軸が定義域内部の右半分 → 軸が中央と右端の間



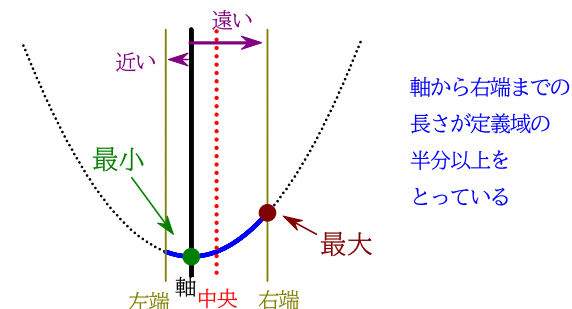
軸から左端まで行く方が、軸から右端まで行くより遠くなる。

[3] 軸と定義域の中央が一致



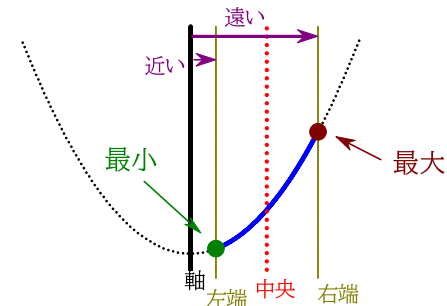
軸から左端まで行くのも、軸から右端まで行くのも同じ。

[4] 軸が定義域内部の左半分 → 軸が左端と中央の間



軸から右端まで行く方が、軸から左端まで行くより遠くなる。

[5] 定義域全体が軸よりも右 → 左端が軸よりも右



最大も最小も聞かれている	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
最大だけ聞かれている	軸が中央より右			軸が中央より左	
最小だけ聞かれている		軸が定義域の内部			

最大も最小も聞かれている → [1]~[5]の5個に場合分け
 最大だけ聞かれている → [1][2],[3],[4][5]の3個に場合分け
 最小だけ聞かれている → [1],[2]~[4],[5]の3個に場合分け