第３章「２次関数」第２節　２次関数の値の変化　研究　最大・最小の応用問題

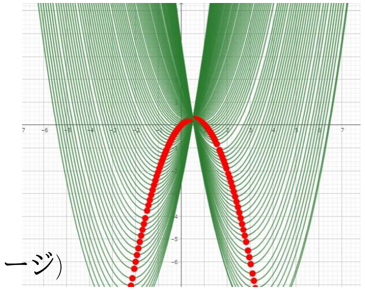
問題(クリアー例題49)

x の 2 次関数 $y=x^2-2mx+m$ の最小値を k とする。

(1)　k を m の式で表せ。

(2)　k の値を最大にする m の値と，k の最大値を求めよ。

動画を見てイメージしよう



参考　m の値を好きな数に設定するとグラフが1つ決まります。よって，そのグラフから最小値が求められます。
出てきた最小値を並べたとき，一番大きい数はいくつかという問題です。(予選リーグ→決勝トーナメントのイメージ)
k は何かというと，決勝の結果をグラフに書いたときの縦軸の名前です。

解答　(1)　$k=-m^2+m$　　(2)　$m=\dfrac{1}{2}$ で最大値 $\dfrac{1}{4}$

解説

(1)　関数の式を変形すると　　$-2m$ の半分は $-m$

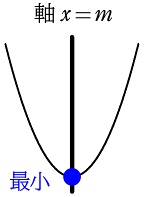
$y=x^2-2mx+m=(x-m)^2-m^2+m=(x-m)^2-m^2+m$

すなわち $y=(x-m)^2-m^2+m$　　放物線は下に凸で，

よって，y は $x=m$ で最小となる。　　頂点は点 $(m,\ -m^2+m)$

最小値は頂点の y 座標より，最小値 $-m^2+m$ をとる。

最小値を k としているので，　$k=-m^2+m$



-1 の半分は $-\dfrac{1}{2}$　　$-m^2+m=-1\times m^2+(-1)\times(-m)$
$=-1\times\{m^2+(-m)\}$

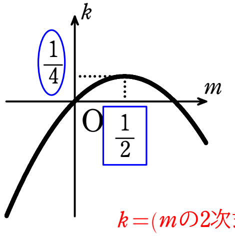
(2)　$k=-m^2+m$ を変形すると

$$k=-m^2+m=-(m^2-m)=-\left\{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$

$$=-\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=-\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

ゆえに　$k=-\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$　　放物線は上に凸で，頂点は点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$

よって，k は $m=\dfrac{1}{2}$ で最大値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。



$k=$(mの2次式)より
横軸の名前は m，
縦軸の名前は k

問題(クリアー問題192)

x の 2 次関数 $y=x^2+2mx+3m$ の最小値を k とする。

(1)　k を m の式で表せ。

(2)　k の値を最大にする m の値と，k の最大値を求めよ。

解答　(1)　$k=-m^2+3m$　　(2)　$m=\dfrac{3}{2}$ で最大値 $\dfrac{9}{4}$

解説

(1)　関数の式を変形すると　　$+2m$ の半分は $+m$

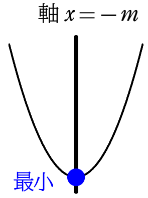
$y=x^2+2mx+3m=(x+m)^2-m^2+3m=(x+m)^2-m^2+3m$

すなわち $y=(x+m)^2-m^2+3m$　　放物線は下に凸で，

よって，y は $x=-m$ で最小となる。　　頂点は点 $(-m,\ -m^2+3m)$

最小値は頂点の y 座標より，最小値 $-m^2+3m$ をとる。

最小値を k としているので，　$k=-m^2+3m$



-3 の半分は $-\dfrac{3}{2}$　　$-m^2+3m=-1\times m^2+(-1)\times(-3m)$
$=-1\times\{m^2+(-3m)\}$

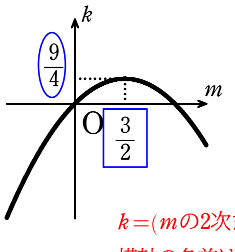
(2)　$k=-m^2+3m$ を変形すると

$$k=-m^2+3m=-(m^2-3m)=-\left\{\left(m-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}$$

$$=-\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=-\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

ゆえに　$k=-\left(m-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$　　放物線は上に凸で，頂点は点 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{9}{4}\right)$

よって，k は $m=\dfrac{3}{2}$ で最大値 $\dfrac{9}{4}$ をとる。



$k=$(mの2次式)より
横軸の名前は m，
縦軸の名前は k

問題(クリアー例題53)

実数 x, y が $2x+y=5$ を満たしながら変化するとき，x^2+y^2 の最小値と，そのときの x, y の値を求めよ。

参考(ゲームのルール)

$2x+y=5$ となる2つの数を好きに決めてください。→ あなたの $x=$ □ , $y=$ □

その x と y を使って , x^2+y^2 を計算してください。→ あなたの $x^2+y^2=$ □

出てきた x^2+y^2 の値を , 横の席の人とで比べてください。

クラスで一番小さい数になったら , あなたの勝ちです。

研究

x	1	0.5	0	2	2.5	-1
y	3	4	5	1	0	7
x^2+y^2	10	16.25	25	5	6.25	50

など

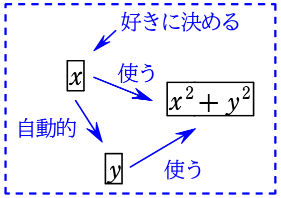
この表だと $x=2$, $y=1$ のとき最小値 5 をとることが分かりますが, x や y は小数でもいいので , 実際はグラフを書かないと最小値は分かりません。

このゲームでは x と y を好きに決めているように見えますが , $2x+y=5$ という縛りがあるので , x を決めると y も自動的に決まってしまいます。

その x と y を使うので , 結局 x を決めれば x^2+y^2 も自動的に決まります。

ゆえに , x がいくつのときに x^2+y^2 が最小となるか考えていくので , 解答の途中では y の存在を消し去ります。

x^2+y^2 が最小となるときの x を見つけたら , y を復活させます。



解答 $x=2$, $y=1$ で最小値 5

解説

$z=x^2+y^2$ とする。 ← ゲームの計算結果を z とする。このアルファベットが，後で書くグラフの縦軸の名前になる。

$2x+y=5$ より，$y=-2x+5$ ……①

であるから z に代入して

$z=x^2+y^2$ 　y に $-2x+5$ を代入

$=x^2+(-2x+5)^2$ 　$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

$=x^2+\{(-2x)^2+2\cdot(-2x)\cdot5+5^2\}$

$=x^2+(4x^2-20x+25)$ ← この問題をテストに出すと，なぜかここで5で割る者が出てくる

$=5x^2-20x+25$ 　最小値を求めるから平方完成する

$=5(x^2-4x)+25$ 　-4 の半分は -2

$=5\{(x-2)^2-2^2\}+25$

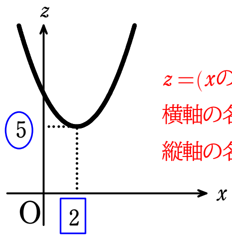
$=5(x-2)^2-5\cdot2^2+25=5(x-2)^2+5$

すなわち　$z=5(x-2)^2+5$

よって，z は $x=2$ で最小値 5 をとる。

このとき，① に $x=2$ を代入して　$y=-2\cdot2+5=1$

したがって，x^2+y^2 は $x=2$，$y=1$ で最小値 5 をとる。



$z=$(xの2次式)より
横軸の名前は x ,
縦軸の名前は z

参考

点 (2 , 5) が頂点となりますが , この 5 は y 座標ではありません。軸の名前より , この 5 は z 座標です。 ①を代入することで , ゲームから y の存在を消しているので , y の値を復活させたかったら①を使うしかありません。よくこの 5 を y の値として求めるミスが多いので , 気をつけましょう。

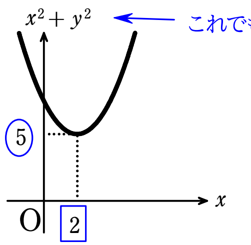
参考

ゲームの計算結果を z としていますが , 別にどの文字にしても構いません。

グラフを書くときの軸の名前になるだけです。

もっと言うと , 新しくアルファベットで名前を付けずに , 軸の名前をそのまま x^2+y^2 にしてしまう裏技もあります。

僕もこっちの書き方の方が好きです。



← これでもOK

問題(クリアー問題205)

x，y は実数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$x-y=2$ のとき，x^2+y^2 の最小値とそのときの x，y の値を求めよ。

(2)　$x+2y-1=0$ のとき，xy の最大値とそのときの x，y の値を求めよ。

解答　(1)　$x=1$，$y=-1$ で最小値 2　　(2)　$x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{4}$ で最大値 $\frac{1}{8}$

解説

(1)　$z=x^2+y^2$ とする。

$x-y=2$ より，$-y=-x+2$

両辺に (-1) をかけて $y=x-2$ ……① であるから z に代入して

$z=x^2+y^2$　（y に $x-2$ を代入）

$=x^2+(x-2)^2$　　$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$

$=x^2+(x^2-4x+4)$

$=2x^2-4x+4$

$=2(x^2-2x)+4$　　最小値を求めるから平方完成する

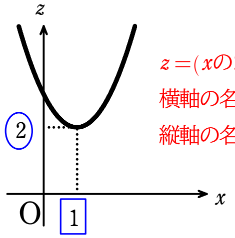
$=2\{(x-1)^2-1^2\}+4$　　-2 の半分は -1

$=2(x-1)^2-2\cdot1^2+4=2(x-1)^2+2$

よって，z は $x=1$ で最小値 2 をとる。

このとき，① に $x=1$ を代入して $y=1-2=-1$

したがって，x^2+y^2 は $x=1$，$y=-1$ で最小値 2 をとる。



$z=$(xの2次式)より
横軸の名前は x，
縦軸の名前は z

(2)　$z=xy$ とする。

$x+2y-1=0$ より，$x=-2y+1$ ……① であるから

$z=xy$　　分配法則

$=(-2y+1)y$

$=-2y^2+y$　　$-2y^2+y=-2\times y^2+(-2)\times\left(-\frac{1}{2}y\right)$

$=-2\left(y^2-\frac{1}{2}y\right)$　　$=-2\times\left\{y^2+\left(-\frac{1}{2}y\right)\right\}$

$-\frac{1}{2}$ の半分は $-\frac{1}{2}\div2=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

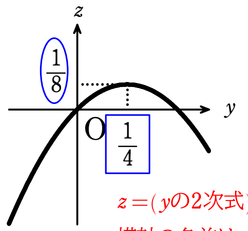
$=-2\left\{\left(y-\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}$

$=-2\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=-2\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$

よって，z は $y=\frac{1}{4}$ で最大値 $\frac{1}{8}$ をとる。

このとき，① に $y=\frac{1}{4}$ を代入して $x=-2\cdot\frac{1}{4}+1=\frac{1}{2}$

したがって，xy は $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{4}$ で最大値 $\frac{1}{8}$ をとる。



$z=$(yの2次式)より
横軸の名前は y，
縦軸の名前は z

注意　条件式から $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ と変形し，$z=xy=x\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)$ として解いてもよい。ただ，係数に分数が登場するので，同じ答えになるが計算は少し大変である。ゲームの途中では x，y のどちらの存在を消してもよい。

問題(クリアー問題206)

実数 x，y が $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y=6$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1)　x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　x^2+y^2 の最大値，最小値と，そのときの x，y の値を求めよ。

解答　(1)　$0 \leqq x \leqq 6$

(2)　$x=0$，$y=6$ または $x=6$，$y=0$ で最大値 36，
$x=3$，$y=3$ で最小値 18

解説

(1)　$x+y=6$ から　　$y=6-x$　……①

$y \geqq 0$ から　　$6-x \geqq 0$　　よって　　$x \leqq 6$

これと $x \geqq 0$ から　　$0 \leqq x \leqq 6$　……②

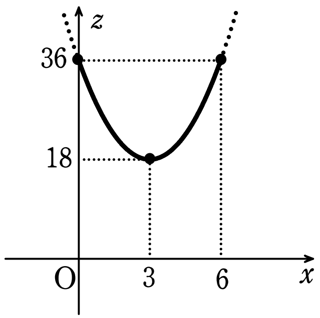
(2)　$z=x^2+y^2$ とする。

① から　　$z=x^2+y^2$

$=x^2+(6-x)^2$

$=2x^2-12x+36$

$=2(x-3)^2+18$



② において，z は $x=0$ または $x=6$ で最大値 36 をとり，
$x=3$ で最小値 18 をとる。

① から，$x=0$ のとき　　$y=6$

$x=6$ のとき　　$y=0$

$x=3$ のとき　　$y=3$

よって，x^2+y^2 は $x=0$，$y=6$ または $x=6$，$y=0$ で最大値 36 をとり，
$x=3$，$y=3$ で最小値 18 をとる。