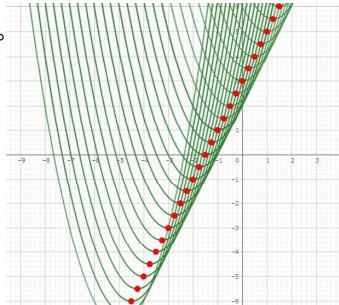


第3章「2次関数」第2節 2次関数の値の変化 補充問題

4 x の2次関数 $y = x^2 + 2mx + m^2 - 2m + 3$ について、次の問いに答えよ。

- (1) この関数の最小値を m の式で表せ。
- (2) この関数の最小値が -1 であるとき、 m の値を求めよ。

【参考】 m の値を好きな数に設定するとグラフが1つ決まります。よって、そのグラフから最小値が求められます。



【解答】 (1) $-2m + 3$ (2) $m = 2$

【解説】

(1) $y = x^2 + 2mx + m^2 - 2m + 3$ を変形すると

$$y = x^2 + 2mx + m^2 - 2m + 3 \quad +2m \text{ の半分は } +m$$

$$= (x + m)^2 - m^2 + m^2 - 2m + 3$$

$$= (x + m)^2 - 2m + 3$$

放物線は下に凸で、
頂点は点 $(-m, -2m + 3)$

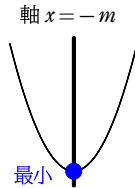
$$\text{すなわち } y = (x + m)^2 - 2m + 3$$

よって、 y は $x = -m$ で最小となる。

最小値は頂点の y 座標より、最小値 $-2m + 3$ をとる。

(2) (1) より $-2m + 3 = -1$

解くと $-2m = -4$ より $m = 2$



5 a は定数とする。関数 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 1$ ($0 \leq x \leq 2$) の最小値を、次の場合について、それぞれ求めよ。

- (1) $a < 0$
- (2) $0 \leq a \leq 2$
- (3) $2 < a$

【解答】 (1) $x = 0$ で最小値 $a^2 + 1$ (2) $x = a$ で最小値 1 (3) $x = 2$ で最小値 $a^2 - 4a + 5$

【解説】

この関数の式を変形すると $-2a$ の半分は $-a$

$$y = x^2 - 2ax + a^2 + 1 = (x - a)^2 - a^2 + a^2 + 1 = (x - a)^2 + 1$$

$$\text{すなわち } y = (x - a)^2 + 1 \quad (0 \leq x \leq 2)$$

動画を見てイメージしよう
放物線が横に動いていきます

(1) $a < 0$ のとき 軸は定義域より左側

この関数のグラフは図[1]の実線部分である。

よって、 y は $x = 0$ で最小となる。

最小値は $y = x^2 - 2ax + a^2 + 1$ に $x = 0$ を代入して

$$y = 0^2 - 2a \cdot 0 + a^2 + 1 = a^2 + 1$$

ゆえに $a < 0$ では $x = 0$ で最小値 $a^2 + 1$ をとる。

(2) $0 \leq a \leq 2$ のとき 軸は定義域の内部

この関数のグラフは図[2]の実線部分である。

よって、 y は $x = a$ で最小となる。

最小値は頂点の y 座標より、最小値 1 をとる。

ゆえに $0 \leq a \leq 2$ では $x = a$ で最小値 1 をとる。

(3) $2 < a$ のとき 軸は定義域より右側

この関数のグラフは図[3]の実線部分である。

よって、 y は $x = 2$ で最小となる。

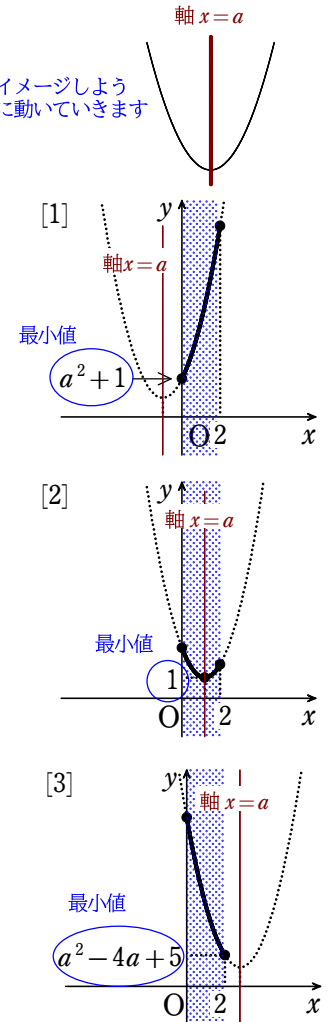
最小値は $y = x^2 - 2ax + a^2 + 1$ に $x = 2$ を代入して

$$y = 2^2 - 2a \cdot 2 + a^2 + 1 = a^2 - 4a + 5$$

ゆえに $2 < a$ では $x = 2$ で最小値 $a^2 - 4a + 5$ をとる。

a の範囲は「棒の置き方」と考えます。

$a < 0$ とは「 $x = a$ の棒を $x = 0$ の棒より左側に置く」と読み取ります。



6 次のような2次関数を求めよ。

- (1) グラフが3点(3, 0), (-1, 0), (2, 6)を通る。
- (2) グラフの頂点は放物線 $y=2x^2+4x+1$ の頂点と同じであり, y 軸と点(0, 2)で交わる。
- (3) $x=2$ で最大値8をとり, $x=1$ で $y=5$ となる。

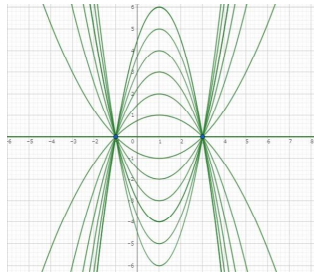
【解答】 (1) $y=-2x^2+4x+6$ (2) $y=3(x+1)^2-1$ (3) $y=-3(x-2)^2+8$

【解説】

- (1) 求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。
 グラフが3点(3, 0), (-1, 0), (2, 6)を通るから
 $y=ax^2+bx+c$ にそれぞれの点の座標を代入して
- $x=3, y=0$ 代入 $0=9a+3b+c$ ①
 $x=-1, y=0$ 代入 $0=a-b+c$ ②
 $x=2, y=6$ 代入 $6=4a+2b+c$ ③
- ①-② から $8a+4b=0$
 すなわち $2a+b=0$ ④
- ①-③ から $5a+b=-6$ ⑤
- ④, ⑤ を解くと $a=-2, b=4$
 これらを ② に代入して $-6+c=0$ より $c=6$
 ゆえに $a=-2, b=4, c=6$ となるので
 求める2次関数は $y=-2x^2+4x+6$
- ①-②の計算

$$\begin{array}{r} 9a+3b+c=0 \\ -) a-b+c=0 \\ \hline 8a+4b=0 \end{array}$$
- ①-③の計算

$$\begin{array}{r} 9a+3b+c=0 \\ -) 4a+2b+c=6 \\ \hline 5a+b=-6 \end{array}$$
- ④より②の方が簡単そうなので代入
 $(-2)-4+c=0$ より $-6+c=0$ よって $c=6$
- 疲れてここで終わってしまう人がいます



【別解】

x 軸と2点(3, 0), (-1, 0)で交わるから,
 求める2次関数は

$$y=a(x-3)(x+1)$$

と表される。

グラフが点(2, 6)を通るから

$x=2, y=6$ を $y=a(x-3)(x+1)$ に代入して

$$6=a(2-3)(2+1)$$

すなわち $6=a \cdot (-1) \cdot 3$ より $-3a=6$

よって $a=-2$

したがって, 求める2次関数は

$$y=-2(x-3)(x+1)$$

展開してみると $-2(x-3)(x+1)=-2(x^2-2x-3)=-2x^2+4x+6$ となって, 本解で求めた答えと同じになる。

- (2) $y=2x^2+4x+1$ を変形すると $+2$ の半分は $+1$

$$\begin{aligned} y=2x^2+4x+1 &= 2(x^2+2x)+1=2[(x+1)^2-1^2]+1 \\ &= 2(x+1)^2-2 \cdot 1^2+1=2(x+1)^2-1 \end{aligned}$$

したがって $y=2(x+1)^2-1$

この放物線の頂点の座標は(-1, -1)より

求める2次関数は $y=a(x+1)^2-1$ ①
 の形で表される。

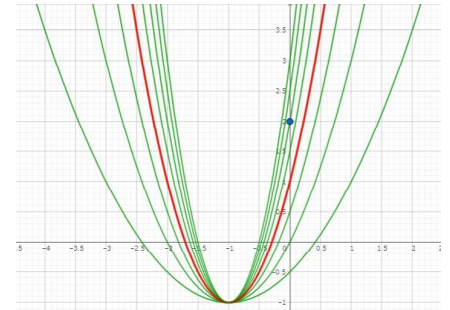
2次関数①のグラフが点(0, 2)を通るから

$y=a(x+1)^2-1$ に $x=0, y=2$ を代入して

$$2=a(0+1)^2-1 \quad \text{より} \quad 2=a-1$$

これを解くと $a=3$

よって, 求める2次関数は $y=3(x+1)^2-1$



赤い放物線が $y=2x^2+4x+1$

- (3) $x=2$ で最大値8をとるから, 求める2次関数の
 グラフは頂点が(2, 8)で上に凸である。

したがって, そのようなグラフをもつ2次関数は

$$y=a(x-2)^2+8 \quad \text{ただし, } a<0$$

の形に表される。

$x=1$ で $y=5$ となるから代入して $5=a(1-2)^2+8$

よって $5=a \cdot (-1)^2+8$ から $a+8=5$

ゆえに $a=-3$ これは $a<0$ を満たす。

したがって, 求める2次関数は $y=-3(x-2)^2+8$

赤い下線部分は必ず書くこと。
 最大値をとるので, グラフは
 上に凸の形でなければならない。