

第3章「2次関数」第2節 2次関数の値の変化 4 2次関数の決定

ここでは、与えられた条件を満たす2次関数を求めてみよう。

＜放物線の頂点や軸から関数を決定＞

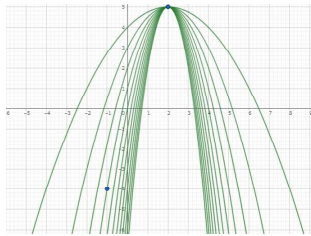
まず、 $y=a(x-p)^2+q$ の形が利用できる場合について調べよう。

この式を基本形という

例題6 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

- (1) 頂点が点(2, 5)で、点(-1, -4)を通る。
- (2) 軸が直線 $x=2$ で、2点(1, -4), (4, 5)を通る。

頂点を(2, 5)と読み取れる式を思い出す。
 x 座標は符号が逆、 y 座標はそのまま。



【解答】

- (1) 頂点が点(2, 5)であるから、
この2次関数は

$y=a(x-2)^2+5$

の形に表される。
グラフが点(-1, -4)を通るから

代入 $-4=a(-1-2)^2+5$
よって $-4=9a+5$ より $-9a=9$
つまり $a=-1$

したがって、求める2次関数は

$y=-(x-2)^2+5$

- (2) 軸が直線 $x=2$ であるから、この2次関数は
軸は頂点の x 座標

$y=a(x-2)^2+q$

の形に表される。グラフが

点(1, -4)を通るから $-4=a(1-2)^2+q$

点(4, 5)を通るから $5=a(4-2)^2+q$

よって $a+q=-4, 4a+q=5$
これを解くと $a=3, q=-7$

したがって、求める2次関数は $y=3(x-2)^2-7$

頂点の場所が分かっても、
放物線の形は分からないから a を使う。
点(-1, -4)を通るので、
 $y=a(x-2)^2+5$ に
 $x=-1, y=-4$ を代入する。

頂点を(2, q)と読み取れる式を思い出す。
 x 座標は符号が逆、 y 座標はそのまま。

頂点の x 座標が分かっても、
頂点の y 座標と放物線の形は
分からないから a と q を使う。

連立方程式を解く
$$\begin{array}{r} 4a+q=5 \\ -) a+q=-4 \\ \hline 3a=9 \end{array}$$

練習21 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

- (1) 頂点が点(1, -3)で、点(3, 5)を通る。
- (2) 軸が直線 $x=-1$ で、2点(0, 5), (2, -11)を通る。

【解答】

- (1) 頂点が点(1, -3)であるから、この2次関数は

$y=a(x-1)^2-3$

の形に表される。グラフが点(3, 5)を通るから

代入 $5=a(3-1)^2-3$
よって $4a-3=5$ より $4a=8$
これを解くと $a=2$

したがって、求める2次関数は $y=2(x-1)^2-3$

- (2) 軸が直線 $x=-1$ であるから、この2次関数は
軸は頂点の x 座標

$y=a(x+1)^2+q$

の形に表される。

グラフが点(0, 5)を通るから $5=a(0+1)^2+q$

点(2, -11)を通るから $-11=a(2+1)^2+q$

よって $a+q=5, 9a+q=-11$
これを解くと $a=-2, q=7$

したがって、求める2次関数は $y=-2(x+1)^2+7$

頂点を(1, -3)と読み取れる式を思い出す。
 x 座標は符号が逆、 y 座標はそのまま。
放物線の形が分からないので a を使う。

点(3, 5)を通るので、
 $x=3, y=5$ を代入する。

頂点を(-1, q)と読み取れる式を思い出す。
 x 座標は符号が逆、 y 座標はそのまま。

頂点の x 座標が分かっても、
頂点の y 座標と放物線の形は
分からないから a と q を使う。

連立方程式を解く
$$\begin{array}{r} 9a+q=-11 \\ -) a+q=5 \\ \hline 8a=-16 \end{array}$$

【注意】 答えは展開しなくてもよい。展開して答えてもいいが、
そこで間違えたらバツになるので注意。

<放物線上の3点から関数を決定> この式を一般形という

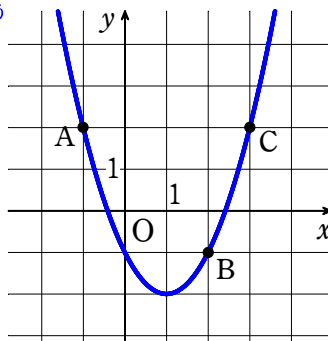
2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが3点 A(-1, 2), B(2, -1), C(3, 2) を通るとする。このとき、次の等式が成り立つ。

点 A を通るから $2 = a(-1)^2 + b(-1) + c$

点 B を通るから $-1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$

点 C を通るから $2 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$

そこで、これらを同時に成り立たせる a, b, c の値を求めてみよう。



例 10 次の3つの等式を同時に満たす a, b, c の値を求める。

$$\begin{cases} a - b + c = 2 & \cdots \text{①} \\ 4a + 2b + c = -1 & \cdots \text{②} \\ 9a + 3b + c = 2 & \cdots \text{③} \end{cases}$$

①と②を用いて c を消去する。

②-① から $3a + 3b = -3$

両辺を3で割って $a + b = -1 \quad \cdots \text{④}$

①と③を用いて c を消去する。

③-① から $8a + 4b = 0$

両辺を2で割って $2a + b = 0 \quad \cdots \text{⑤}$

④と⑤を連立させた方程式を解くと

$a = 1, b = -2$

これらを①に代入すると

$1 - (-2) + c = 2$ より $3 + c = 2$ よって $c = -1$

よって $a = 1, b = -2, c = -1$ 終

$$2b - (-b) = 2b + (+b) = 3b$$

②-①の計算

$$\begin{array}{r} 4a + 2b + c = -1 \\ -) a - b + c = 2 \\ \hline 3a + 3b = -3 \end{array}$$

割って簡単になった式を④とすると楽

③-①の計算

$$\begin{array}{r} 9a + 3b + c = 2 \\ -) a - b + c = 2 \\ \hline 8a + 4b = 0 \end{array}$$

割って簡単になった式を⑤とすると楽

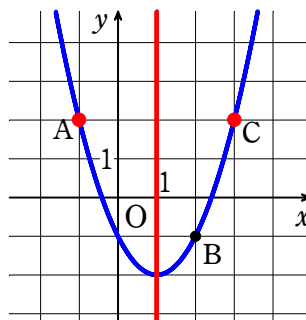
$$\begin{array}{r} 2a + b = 0 \\ -) a + b = -1 \\ \hline a = 1 \end{array}$$

参考

この問題に限った話であるが、A(-1, 2), C(3, 2) であるから、AとCの y 座標は等しい。放物線は軸に関して対称であるから、放物線は線分ACの垂直二等分線になる。ゆえに軸は直線 $x = 1$ と分かるので、

$$y = a(x - 1)^2 + q$$

とおいて求めてもよい。計算自体はこっちの方が楽である。



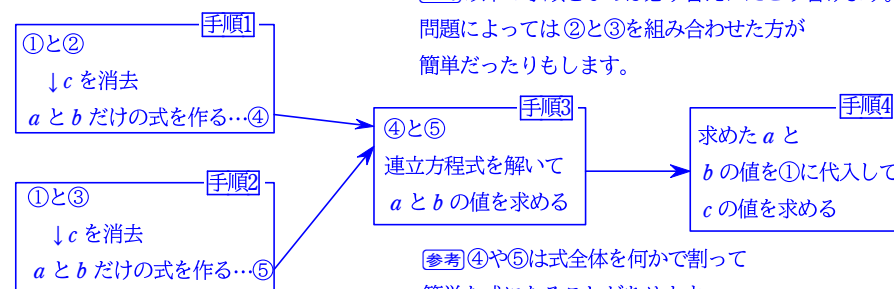
例 10 から、グラフが3点 A(-1, 2), B(2, -1), C(3, 2) を通る2次関数であることがわかる。例 10 のような、3文字を含む1次方程式を組み合わせた連立方程式を **連立3元1次方程式** という。この解き方は次のようになる。
文字が3種類だから3元

連立3元1次方程式の解き方

- [1] 1文字を消去して、残り2文字の連立方程式を導く。
- [2] 2文字の連立方程式を解く。
- [3] 残りの1文字の値を求める。

方針 以下の手順をふめば必ず答えにたどり着けます。

問題によっては②と③を組み合わせた方が簡単だったりします。



参考 ④や⑤は式全体を何かで割って簡単な式になることがあります

練習 22 連立 3 元 1 次方程式
$$\begin{cases} a - b + c = 1 \\ 4a - 2b + c = -6 \\ 9a + 3b + c = 9 \end{cases}$$
 を解け。

解答

$$\begin{cases} a - b + c = 1 & \cdots \cdots ① \\ 4a - 2b + c = -6 & \cdots \cdots ② \\ 9a + 3b + c = 9 & \cdots \cdots ③ \end{cases}$$

②-① から $3a - b = -7$ $\cdots \cdots ④$

③-① から $8a + 4b = 8$

両辺 4 で割って $2a + b = 2$ $\cdots \cdots ⑤$

④, ⑤ を解くと $a = -1, b = 4$

これらを ① に代入すると

$$(-1) - 4 + c = 1 \quad \text{より} \quad -5 + c = 1$$

すなわち $c = 6$

よって $a = -1, b = 4, c = 6$

②-① の計算

$$\begin{array}{r} 4a - 2b + c = -6 \\ -) a - b + c = 1 \\ \hline 3a - b = -7 \end{array}$$

$-2b - (-b) = -2b + (+b) = -b$

③-① の計算

$$\begin{array}{r} 9a + 3b + c = 9 \\ -) a - b + c = 1 \\ \hline 8a + 4b = 8 \end{array}$$

割って簡単になった式を⑤とすると楽

$$\begin{array}{r} 3a - b = -7 \\ -) 2a + b = 2 \\ \hline 5a = -5 \end{array}$$

例題 7 2 次関数のグラフが 3 点 (1, 5), (2, 1), (3, -7) を通るとき, その 2 次関数を求めよ。

解答 求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とする。

グラフが 3 点 (1, 5), (2, 1), (3, -7) を通るから, $y = ax^2 + bx + c$ にそれぞれの点の座標を代入して

$$\begin{aligned} x=1, y=5 \text{ 代入} \quad & 5 = a + b + c & \cdots \cdots ① \\ x=2, y=1 \text{ 代入} \quad & 1 = 4a + 2b + c & \cdots \cdots ② \\ x=3, y=-7 \text{ 代入} \quad & -7 = 9a + 3b + c & \cdots \cdots ③ \end{aligned}$$

②-① から $3a + b = -4$ $\cdots \cdots ④$

③-① から $8a + 2b = -12$

両辺 2 で割って $4a + b = -6$ $\cdots \cdots ⑤$

④, ⑤ を解くと 代入 $a = -2, b = 2$

これらを ① に代入すると

$$(-2) + 2 + c = 5 \quad \text{より} \quad c = 5$$

ゆえに $a = -2, b = 2, c = 5$ となるので

求める 2 次関数は $y = -2x^2 + 2x + 5$

②-① の計算

$$\begin{array}{r} 4a + 2b + c = 1 \\ -) a + b + c = 5 \\ \hline 3a + b = -4 \end{array}$$

③-① の計算

$$\begin{array}{r} 9a + 3b + c = -7 \\ -) a + b + c = 5 \\ \hline 8a + 2b = -12 \end{array}$$

割って簡単になった式を⑤とすると楽

$$\begin{array}{r} 4a + b = -6 \\ -) 3a + b = -4 \\ \hline a = -2 \end{array}$$

疲れてここで終わってしまう人がいます

練習 23 2 次関数のグラフが 3 点 (2, -2), (3, 5), (-1, 1) を通るとき、
その 2 次関数を求めよ。

解答

求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

グラフが 3 点 (2, -2), (3, 5), (-1, 1) を通るから

$y=ax^2+bx+c$ にそれぞれの点の座標を代入して

$x=2, y=-2$ 代入 $-2=4a+2b+c$ ①
 $x=3, y=5$ 代入 $5=9a+3b+c$ ②
 $x=-1, y=1$ 代入 $1=a-b+c$ ③

②-① から $5a+b=7$ ④

①-③ から $3a+3b=-3$

両辺3で割って $a+b=-1$ ⑤

④, ⑤ を解くと $a=2, b=-3$

これらを ③ に代入して $2-(-3)+c=1$ より $5+c=1$

よって $c=-4$ 代入

ゆえに $a=2, b=-3, c=-4$ となるので

求める 2 次関数は $y=2x^2-3x-4$

②-① の計算

$$\begin{array}{r} 9a+3b+c=5 \\ -) 4a+2b+c=-2 \\ \hline 5a+b=7 \end{array}$$

①-③ の計算

$$\begin{array}{r} 4a+2b+c=-2 \\ -) a-b+c=1 \\ \hline 3a+3b=-3 \end{array}$$

⑤-③ の計算

$$\begin{array}{r} 5a+b=7 \\ -) a+b=-1 \\ \hline 4a=8 \end{array}$$

係数が大きい方から小さい方を引いた方が楽なので、③-①でなくて①-③をしています。

割って簡単になった式を⑤とすると楽

研究 2 次関数を決定する問題では、与えられた条件によって、
最初に表す 2 次関数の形を使い分ける。

基本形 $y=a(x-p)^2+q$	標準形 $y=ax^2+bx+c$	$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$
頂点や軸が分かる	通る3点が分かる	x 切片が2カ所分かる
最大値や最小値が分かる	a と通る2点が分かる	

問題(クリアー例題55)

放物線 $y=2x^2+6x$ を平行移動した曲線で、次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

この問題で、この $y=2x^2+6x$ を平方完成する人がいますが、それは無駄です。

(1) 2 点 (1, -4), (2, 0) を通る。

(2) 点 (1, 3) を通り、その頂点が直線 $y=2x-3$ 上にある。

平行移動しただけで、形は変わらない
→ x^2 の係数も変わらない

解答

(1) 求める 2 次関数は $y=2x^2+bx+c$ と表される。

このグラフが 2 点 (1, -4), (2, 0) を通るから

$y=2x^2+bx+c$ に代入して

$x=1, y=-4$ 代入 $-4=2\cdot1^2+b\cdot1+c$ ①
 $x=2, y=0$ 代入 $0=2\cdot2^2+b\cdot2+c$ ②

①から $2+b+c=-4$ つまり $b+c=-6$

②から $8+2b+c=0$ つまり $2b+c=-8$

これを解くと $b=-2, c=-4$

よって、求める 2 次関数は $y=2x^2-2x-4$

(2) 頂点が直線 $y=2x-3$ 上にあるから、

頂点の x 座標を p とすると、 y 座標は $y=2p-3$ に

$x=p$ を代入して $y=2p-3$,

つまり頂点の座標は $(p, 2p-3)$ と表される。

また、放物線 $y=2x^2+6x$ を平行移動したものであるから、
 x^2 の係数は2で変わらない。したがって、
求めるグラフの方程式は

$y=2(x-p)^2+2p-3$ ①

と表される。

このグラフが点 (1, 3) を通るから、

①に $x=1, y=3$ を代入して $3=2(1-p)^2+2p-3$

展開して $3=2(1-2p+p^2)+2p-3$ より $3=2-4p+2p^2+2p-3$

$0=2p^2-2p-4$ 両辺入れ替えて、さらに2で割ると $p^2-p-2=0$

因数分解して $(p+1)(p-2)=0$ よって $p=-1, 2$

①に代入して $y=2(x-(-1))^2+2(-1)-3, y=2(x-2)^2+2\cdot2-3$

つまり、 $y=2(x+1)^2-5, y=2(x-2)^2+1$

問題(クリアー問題215)

次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

- (1) 放物線 $y=2x^2-x+1$ を平行移動した曲線で、2点 $(1, 2)$, $(-1, 6)$ を通る。
- (2) 放物線 $y=x^2$ を平行移動した曲線で、点 $(2, 3)$ を通り、頂点が直線 $y=x+1$ 上にある。

解答

- (1) 求める2次関数は $y=2x^2+bx+c$ と表される。

このグラフが2点 $(1, -4)$, $(2, 0)$ を通るから

$y=2x^2+bx+c$ に代入して

$x=1, y=2$ 代入 $2=2\cdot 1^2+b\cdot 1+c \dots\dots ①$

$x=-1, y=6$ 代入 $6=2\cdot (-1)^2+b(-1)+c \dots\dots ②$

①から $2+b+c=2$ つまり $b+c=0$

②から $2-b+c=6$ ^{代入} つまり $-b+c=4$

これを解くと $b=-2, c=2$ $\leftarrow \begin{array}{r} b+c=0 \\ -) -b+c=4 \\ \hline 2b=-4 \end{array}$

よって、求める2次関数は $y=2x^2-2x+2$

- (2) 頂点が直線 $y=x+1$ 上にあるから、

頂点の x 座標を p とすると、 y 座標は $y=x+1$ に

$x=p$ を代入して $y=p+1$,

つまり頂点の座標は $(p, p+1)$ と表される。

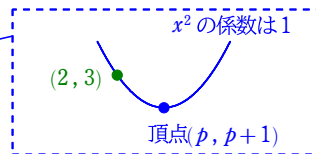
また、放物線 $y=x^2$ を平行移動したものであるから、

x^2 の係数は1で変わらない。したがって、

求めるグラフの方程式は

$y=(x-p)^2+p+1 \dots\dots ①$

と表される。



このグラフが点 $(2, 3)$ を通るから、①に $x=2, y=3$ を代入して

$$3=(2-p)^2+p+1$$

展開して $3=(4-4p+p^2)+p+1$ より $0=p^2-3p+2$

両辺入れ替えて、 $p^2-3p+2=0$ 因数分解して $(p-1)(p-2)=0$

よって $p=1, 2$

①に代入して $y=(x-1)^2+1+1, y=(x-2)^2+2+1$

つまり、 $y=(x-1)^2+2, y=(x-2)^2+3$