

第3章「2次関数」第1節 2次関数とグラフ 研究 グラフの対称移動

平面上で、図形上の各点を、直線または点に関して対称な位置に動かすことを、直線または点に関して **対称移動** するという。

**問題** 2次関数  $y = x^2 - 2x + 3$  のグラフの、 $x$  軸、 $y$  軸、原点それぞれに関する対称移動後の放物線の方程式を求めよ。

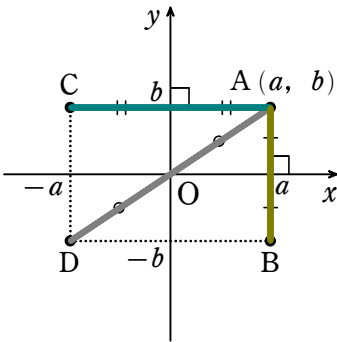
**解答**  $x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 - 1^2 + 3 = (x - 1)^2 + 2$

よって  $y = (x - 1)^2 + 2$   
したがって、この関数のグラフの  
頂点は点  $(1, -2)$  である。  
 $x$  軸、 $y$  軸、原点それぞれに関する  
対称移動後の放物線の方程式は、  
次のようになる。

$x$  軸： $x^2$  の係数は  $-1$ ，頂点は  $(1, -2)$   
よって  $y = -(x - 1)^2 - 2 = -(x^2 - 2x + 1) - 2 = -x^2 + 2x - 3$   
 $y$  軸： $x^2$  の係数は  $1$ ，頂点は  $(-1, 2)$   
よって  $y = (x + 1)^2 + 2 = (x^2 + 2x + 1) + 2 = x^2 + 2x + 3$   
原点： $x^2$  の係数は  $-1$ ，頂点は  $(-1, -2)$   
よって  $y = -(x + 1)^2 - 2 = -(x^2 + 2x + 1) - 2 = -x^2 - 2x - 3$   
平方完成して頂点を動かす方法だと、見通しは立てやすいが計算が面倒で長い。

**参考** 座標軸や原点に関して対称な点について考えてみよう。

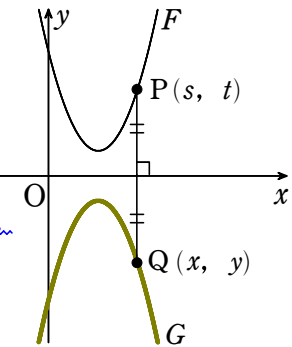
右の図からわかるように、点  $A(a, b)$  と  
 $x$  軸に関して対称な点  $B$   $x$  座標が変わらず、 $y$  座標が反対  
 $y$  軸に関して対称な点  $C$   $y$  座標が変わらず、 $x$  座標が反対  
原点に関して対称な点  $D$   $x$  座標も  $y$  座標も反対  
の座標は、それぞれ次のようになる。



|           |           |            |
|-----------|-----------|------------|
| 点 B       | 点 C       | 点 D        |
| $(a, -b)$ | $(-a, b)$ | $(-a, -b)$ |

2次関数  $y = x^2 - 4x + 5$  のグラフ  $F$  を、 $x$  軸に関して対称移動するとき、移動後の放物線を  $G$  とする。

$F$  上に点  $P(s, t)$  をとり、この対称移動によって、点  $P$  が  $G$  上の点  $Q(x, y)$  へ動く  
とすると  $t = s^2 - 4s + 5$  ..... ① 点  $(s, t)$  が放物線  $y = x^2 - 4x + 5$  の上に乗っているから代入できる。  
 $x = s, y = -t$  ..... ②  $x$  座標が変わらず、 $y$  座標が反対  
② より  $s = x, t = -y$  である。



これらを ① に代入すると  $-y = x^2 - 4x + 5$   
すなわち両辺に  $-1$  をかけて  $y = -x^2 + 4x - 5$   
この2次関数のグラフが、放物線  $G$  である。

一般に、関数  $y = f(x)$  のグラフを、 $x$  軸、 $y$  軸、原点それぞれに関して対称移動すると、次のような関数のグラフになる。

$x$  軸： $y = f(x)$  の  $x$  はそのまま、 $y$  座標が変わらず、 $y$  座標が反対  
 $y$  を  $-y$  におきかえた  $-y = f(x)$   
 $y$  軸： $y = f(x)$  の  $x$  を  $-x$  におきかえて、 $y$  座標が変わらず、 $x$  座標が反対  
 $y$  はそのままの  $-y = f(x)$   
原点： $y = f(x)$  の  $x$  を  $-x$  におきかえて、 $x$  座標も  $y$  座標も反対  
 $y$  を  $-y$  におきかえた  $-y = f(-x)$

この公式の覚え方は  
これをイメージすることが大事

|            |            |            |
|------------|------------|------------|
| $y = f(x)$ | $y = f(x)$ | $y = f(x)$ |
| $-y$       | $y$        | $-y$       |
| $x$        | $-x$       | $-x$       |

例1 2次関数  $y = x^2 - 2x + 3$  のグラフの、 $x$  軸、 $y$  軸、原点それぞれに関する対称移動後の放物線の方程式は、次のようになる。

$x$  軸： $-y = x^2 - 2x + 3$   
両辺に  $-1$  かけて  $y = -x^2 + 2x - 3$   
 $y$  軸： $y = (-x)^2 - 2(-x) + 3$   
すなわち  $y = x^2 + 2x + 3$   
原点： $-y = (-x)^2 - 2(-x) + 3$   
すなわち  $-y = x^2 + 2x + 3$   
両辺に  $-1$  かけて  $y = -x^2 - 2x - 3$  終  
グラフを平行移動させるだけなら、この公式が一番早い

|                    |                    |                    |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| $y = x^2 - 2x + 3$ | $y = x^2 - 2x + 3$ | $y = x^2 - 2x + 3$ |
| $-y$               | $y$                | $-y$               |
| $x$                | $-x$               | $-x$               |

練習 1 2 次関数  $y=x^2+4x+1$  のグラフの，  $x$  軸，  $y$  軸， 原点それぞれに  
関する対称移動後の放物線の方程式を求めよ。

解答

$x$  軸： $-y=x^2+4x+1$   
両辺に  $-1$  かけて  $y=-x^2-4x-1$   
 $y$  軸： $y=(-x)^2+4(-x)+1$   
すなわち  $y=x^2-4x+1$   
原点： $-y=(-x)^2+4(-x)+1$   
すなわち  $-y=x^2-4x+1$   
両辺に  $-1$  かけて  $y=-x^2+4x-1$

終

$$\begin{array}{c} y \\ \uparrow \\ -y \end{array} = \begin{array}{c} x^2 \\ \uparrow \\ x \end{array} + \begin{array}{c} 4x \\ \uparrow \\ x \end{array} + 1$$

$$\begin{array}{c} y \\ \uparrow \\ y \end{array} = \begin{array}{c} x^2 \\ \uparrow \\ -x \end{array} + \begin{array}{c} 4x \\ \uparrow \\ -x \end{array} + 1$$

$$\begin{array}{c} y \\ \uparrow \\ -y \end{array} = \begin{array}{c} x^2 \\ \uparrow \\ -x \end{array} + \begin{array}{c} 4x \\ \uparrow \\ -x \end{array} + 1$$