

第3章「2次関数」第1節 2次関数とグラフ 研究 グラフの平行移動

問題 2次関数 $y=2x^2+3x+1$ のグラフを、 x 軸方向に1、 y 軸方向に3だけ平行移動するとき、移動後の放物線の方程式を求めよ。

解答 $2x^2+3x+1=2\left(x^2+\frac{3}{2}x\right)+1$ $+\frac{3}{2}$ の半分は $+\frac{3}{2}\div 2=+\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=+\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} &=2\left\{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}+1 \\ &=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+1 \\ &=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}+\frac{8}{8}=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8} \end{aligned}$$

よって $y=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$ したがって、この関数のグラフの頂点は点 $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$ である。

点 $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$ を x 軸方向に1、 y 軸方向に3だけ動かすと $\left(-\frac{3}{4}+1, -\frac{1}{8}+3\right)$ つまり $\left(\frac{1}{4}, \frac{23}{8}\right)$ となる。

点 $\left(\frac{1}{4}, \frac{23}{8}\right)$ を頂点として、 x^2 の係数が2である放物線の式は $y=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{8}$

左辺を展開して $(x-A)^2=x^2-2Ax+A^2$

$$\begin{aligned} y &=2\left\{x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}+\frac{23}{8} \\ &=2\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\right)+\frac{23}{8} \\ &=2x^2-x+\frac{1}{8}+\frac{23}{8}=2x^2-x+3 \end{aligned}$$

よって $y=2x^2-x+3$ 平方完成して頂点を動かす方法だと、見通しは立てやすいが計算が面倒で長い。

2次関数 $y=2x^2$ のグラフ F を、 x 軸方向に4、 y 軸方向に3だけ平行移動することを、グラフ上の点の移動で考えてみよう。

移動後の放物線を G とする。
 F 上に点 $P(s, t)$ をとり、この平行移動によって、点 P が G 上の点 $Q(x, y)$ へ動くとする

$t=2s^2$ ① 点 (s, t) が放物線 $y=2x^2$ の上に乗っているから代入できる。

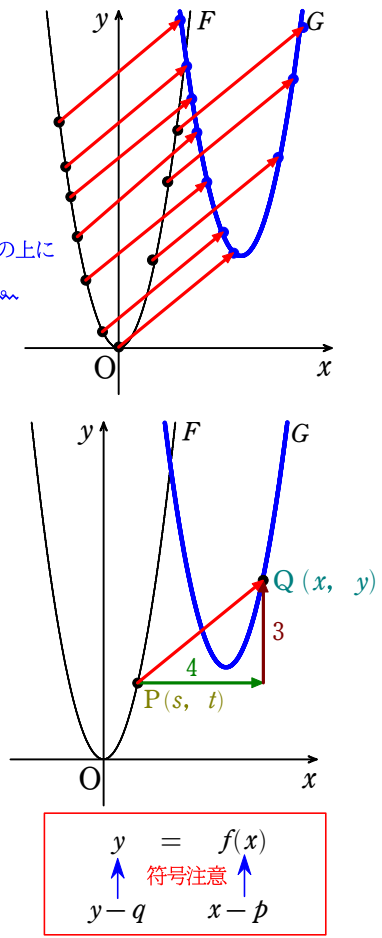
$x=s+4, y=t+3$ ②

が成り立つ。② から $s=x-4, t=y-3$
これらを①に代入すると $y-3=2(x-4)^2$
すなわち

$y=2(x-4)^2+3$
この2次関数のグラフが、放物線 G である。
これが「頂点が $(4, 3)$ であるグラフの式が $y=2(x-4)^2+3$ になる理由」である。

一般に、関数 $y=f(x)$ のグラフを、
 x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動すると、
 x を $x-p$ 、 y を $y-q$ でおき換えた
次のような関数のグラフになる。

$y-q=f(x-p)$ すなわち $y=f(x-p)+q$



例1 2次関数 $y=2x^2+3x+1$ のグラフを、 x 軸方向に1、 y 軸方向に3だけ平行移動すると、移動後の放物線の方程式は

計算すると

$$\begin{aligned} y-3 &=2(x-1)^2+3(x-1)+1 \\ y-3 &=2(x^2-2x+1)+3(x-1)+1 \\ y-3 &=2x^2-4x+2+3x-3+1+3 \\ y &=2x^2-x+3 \end{aligned}$$

すなわち $y=2x^2-x+3$ 終

$y = 2x^2 + 3x + 1$
 $y-3 = 2(x-1)^2 + 3(x-1) + 1$
この公式が一番早い

練習 1 2 次関数 $y=2x^2-5x+3$ のグラフを， x 軸方向に -2 ， y 軸方向に 1 だけ
平行移動するとき，移動後の放物線の方程式を求めよ。

解答

求める方程式は

$$y-1=2\{x-(-2)\}^2-5\{x-(-2)\}+3$$

計算すると

$$y-1=2(x+2)^2-5(x+2)+3$$

$$y-1=2(x^2+4x+4)-5(x+2)+3$$

$$y=2x^2+8x+8-5x-10+3+1$$

すなわち $y=2x^2+3x+2$

y
 $\uparrow$
 $y-1$

$=$

$2x^2$
 $\uparrow$
 $x-(-2)$

$-$

$5x$
 $\uparrow$
 $x-(-2)$

$+$

3